

REVELANDO A ORIGEM RELATIVÍSTICA DA LEI DE LENZ NA TEORIA ELETROMAGNÉTICA GALILEANA

UNCOVERING THE RELATIVISTIC FOUNDATION OF LENZ'S LAW IN GALILEAN ELECTROMAGNETIC THEORY

THALES BRITO DE SOUZA FONSECA RODRIGUES ^{*1}, RAFAEL C. M. DE CASTRO ^{†1}, BRUNO FERREIRA RIZZUTI ^{‡1}

¹Depto. de Física, ICE, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG, Brasil

Resumo

Este artigo investiga as origens da lei de Lenz no contexto do Eletromagnetismo Galileano. Sua ideia central é que a teoria eletromagnética comporta dois limites de baixa velocidade distintos: o elétrico e o magnético. Nosso principal resultado concentra-se neste último, onde a lei da indução é válida. Demonstramos que um boost galileano implica que a única relação linear possível entre $\nabla \times \vec{E}$ e $\partial \vec{B} / \partial t$ é caracterizada por um sinal negativo, correspondente à lei de Lenz. Concluímos, portanto, que a lei de Lenz possui uma origem profunda no princípio da relatividade, seja no regime clássico (galileano) ou relativístico (lorentziano). Nossos resultados oferecem uma nova perspectiva sobre os aspectos fundamentais da teoria eletromagnética e sua relação com a relatividade em baixas velocidades.

Palavras-chave: Eletromagnetismo Galileano. Lei de Lenz. Relatividade.

*thales.fonseca@estudante.ufjf.br

†rafaelcostamcastro@hotmail.com

‡brunorizzuti@ufjf.br

Abstract

This paper investigates the origins of Lenz's law within the framework of Galilean Electromagnetism. Its central idea is that electromagnetic theory accommodates two distinct low-speed limits: the electric and magnetic one. Our main result is focused on the latter, where the induction law is valid. We demonstrate that a Galilean boost implies that the only possible linear relationship between $\nabla \times \vec{E}$ and $\partial \vec{B} / \partial t$ is characterized by a minus sign, corresponding to Lenz's law. Thus, we conclude that Lenz's law has a profound origin in the principle of relativity, whether in the classical (Galilean) or relativistic (Lorentz) regimes. Our findings offer a novel perspective on the foundational aspects of electromagnetic theory and its relationship to relativity at low velocities.

Keywords: Galilean Electromagnetism. Lenz's law. Relativity.

I. INTRODUÇÃO

As equações de Maxwell ocupam um lugar tão central no avanço da ciência e da tecnologia que identificar sua aplicação mais crítica é quase impossível. No entanto, se fosse necessário destacar uma equação particularmente significativa, um cientista aplicado poderia apontar para a lei da indução de Faraday, devido à sua relevância direta para tecnologias úteis, como a geração de energia elétrica. Para além de suas implicações práticas, ao se aprofundar em aspectos mais fundamentais, a lei de Faraday está intimamente relacionada com o fator “ -1 ”, frequentemente referido como a lei de Lenz (LENZ, 1834), cujas raízes podem ser rastreadas até o princípio da relatividade, conforme discutido em (RODRIGUES; RIZZUTI, 2023). Nesse trabalho, em particular, a natureza relativa dos campos elétrico e magnético é esclarecida por meio da análise da transformação do tensor de campo eletromagnético sob um *boost* de Lorentz.¹ Consequentemente, um experimento simples — que revisitaremos aqui com auxílio dos dois referenciais — revela que a relação entre $\nabla \times \vec{E}$ e $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ é de fato regida por esse sinal negativo fundamental,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

Assim, a natureza unificada dos campos elétrico e magnético é elegantemente revelada sob a ótica da relatividade restrita. Tipicamente, essa unificação é explorada por meio do cálculo tensorial, uma ferramenta padrão no estudo da teoria eletromagnética em cursos de graduação e pós-graduação (JACKSON, 1999). No entanto, um artigo recente demonstra a invariância das equações de Maxwell sob transformações de Lorentz utilizando apenas cálculo básico, especificamente a regra da cadeia (FILHO; FERREIRA, 2023). A relatividade dos campos elétrico e magnético é fundamental para evitar a interpretação de que (1) implica que $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ gera um campo elétrico não conservativo $\vec{E}$ afinal, a igualdade pode ser compreendida de forma equivalente a partir de ambos os lados da equação (HILL, 2010).

¹O termo *boost* é utilizado na literatura para indicar que um referencial se afasta em relação a outro com velocidade constante (ROCHA; MOTA, 2013).

Neste trabalho, buscamos explorar a transição do regime relativístico para o clássico, reconhecendo que, no limite apropriado, as transformações de Lorentz se reduzem às transformações de Galileu. Nesse contexto, consideramos estas últimas como uma aproximação efetiva das primeiras (ROCHA; MOTA, 2013; GAIO; RIZZUTI, 2023). As questões fundamentais que abordamos são: a lei de Lenz continua válida no limite clássico? E, se sim, ela ainda se origina da relatividade dos campos?

Embora nosso foco aqui esteja nas leis da indução de Faraday e de Lenz, o limite clássico das equações de Maxwell já foi examinado de forma abrangente. Essa discussão teve início no artigo seminal de M. Le Bellac e J.-M. Lévy-Leblond (BELLAC; LÉVY-LEBLOND, 1973), cujo objetivo central era estabelecer uma teoria não relativística consistente e fisicamente significativa do eletromagnetismo clássico. Verifica-se que tal teoria é de fato alcançável quando se consideram não apenas um, mas dois limites corretos das transformações de Lorentz para o campo eletromagnético, conduzindo ao que hoje se conhece como Eletromagnetismo Galileano (EG) doravante, usaremos eletromagnetismo e eletrodinâmica de forma intercambiável, com o mesmo significado. Uma reavaliação recente do tema pode ser encontrada em (MONTIGNY; ROUSSEAUX, 2006). Os mesmos autores exploram diversas aplicações do EG em (MONTIGNY; ROUSSEAUX, 2007), abrangendo desde mecânica quântica e supercondutividade até a eletrodinâmica de meios contínuos. Curiosamente, concluem que tecnologias modernas distintas podem ser descritas de maneira coerente pelos dois limites da eletrodinâmica galileana, desde que a propagação de ondas não seja significativa. Uma análise mais aprofundada é oferecida em (SANTOS *et al.*, 2004), onde os autores desenvolvem modelos de campo lagrangianos que dão origem aos dois limites do EG. Do ponto de vista histórico, vários experimentos como o efeito Rowland-Vasilescu-Karpen, o efeito Röntgen-Eichenwald e o efeito de Wilson são revisados em (ROUSSEAUX, 2013), destacando as limitações da relatividade especial em contextos experimentais envolvendo movimentos lentos. Assim, o EG surge não apenas como uma alternativa à relatividade especial, mas também como um arcabouço útil para descrever tais experimentos.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma. Na Seção II, fornecemos uma breve revisão dos princípios fundamentais do Eletromagnetismo Galileano. Dando continuidade, a Seção III descreve a forma das equações de Maxwell nos dois limites do EG. A principal contribuição de nossa análise é apresentada na Seção IV, onde propomos uma possível origem para a lei de Lenz com base em considerações relativísticas, mesmo no regime clássico de baixas velocidades. Por fim, a Seção V é reservada para nossas conclusões.

II. UMA BREVE REVISÃO SOBRE O ELETROMAGNETISMO GALILEANO

Iniciamos nossa discussão revisando a estrutura do Eletromagnetismo Galileano. Para começar, consideremos as transformações de Lorentz que relacionam as coordenadas $(ct', \vec{r}')$ de um referencial S' , que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{n}$ em relação ao referencial S , parametrizado por $(ct, \vec{r})$,

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right), \quad (2)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1)(\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n} - \gamma \vec{v}t, \quad (3)$$

onde $\gamma = (1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2}$ é o conhecido fator de Lorentz.

Normalmente, consideramos apenas o limite $|\vec{v}| \ll c$ para obter as transformações de Galileu

$$t = t' \quad (4)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \quad (5)$$

uma vez que $\gamma \rightarrow 1$. No entanto, poderíamos considerar não apenas esse limite, no qual os vetores são fortemente do tipo tempo ($ct \gg \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}$), mas também o caso de vetores predominantemente do tipo espaço ($ct \ll \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}$). Nesse cenário, as transformações de Lorentz tendem a

$$ct' = ct - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}, \quad (6)$$

$$\vec{r}' = \vec{r}. \quad (7)$$

Como essas transformações se aplicam ao EG? Elas são, de fato, válidas para qualquer quadrivetor. Se considerarmos o quadrivetor corrente $\vec{J} = (c\rho, \vec{j})$, onde ρ e $\vec{j}$ representam, respectivamente, as densidades de carga e de corrente, nos deparamos com dois possíveis limites, já que $\vec{J}$ pode ser do tipo temporal ou espacial, dependendo da corrente ou carga que geram os campos. O primeiro caso ocorre quando $|c\rho| \gg |\vec{j}|$. A lei de transformação correspondente é:

$$c\rho' = c\rho, \quad (8)$$

$$\vec{j}' = \vec{j} - \frac{\vec{v}}{c}c\rho. \quad (9)$$

Chamamos esse caso de limite elétrico. A interpretação desse limite é direta: o referencial S' não observa alteração no volume nem no valor das cargas, o que leva à relação (8). Entretanto, esse mesmo referencial percebe as cargas descritas por ρ como se estivessem se movendo com velocidade $-\vec{v}$, o que resulta em (9). Antes de considerarmos o segundo limite, é importante destacar que $|c\rho| \gg |\vec{j}|$ implica

$$|\vec{E}| \gg |c\vec{B}|. \quad (10)$$

Como de costume, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ representam, respectivamente, os campos elétrico e magnético.

Não há nenhuma restrição para considerarmos o caso oposto, no qual $|c\rho| \ll |\vec{j}|$. Nesse cenário, as transformações são:

$$c\rho' = c\rho - \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{c}, \quad (11)$$

$$\vec{j}' = \vec{j}. \quad (12)$$

Estabelecidos os dois limites acima, podemos agora investigar os limites das transformações para $\vec{E}$ e $\vec{B}$. A transformação geral de um *boost* de Lorentz é dada por (veja, por exemplo,

(SEXL; URBANTKE, 2002))

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + (1 - \gamma) \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{E})}{\vec{v}^2}, \quad (13)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}) + (1 - \gamma) \frac{\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{B})}{\vec{v}^2}. \quad (14)$$

Se considerarmos de forma ingênua o caso em que $|\vec{v}| \ll c$ (isto é, $\gamma \rightarrow 1$), sem levar em conta a comparação entre $|\vec{E}|$ e $|c\vec{B}|$, então (13) e (14) tendem a

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (15)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (16)$$

À primeira vista, essas transformações parecem não apresentar problemas, pois $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são componentes do campo eletromagnético e podem se combinar. No entanto, (15) e (16) não possuem uma estrutura de grupo algébrico, algo fundamental para a conexão entre referenciais sucessivos. Para ilustrar isso, definimos um espaço de dimensão 6, $\mathbb{E}$, com vetores dados por $\vec{\eta} = (E_i, B_j)$, onde $i, j = 1, 2, 3$. Nesse contexto, (15) e (16) reduzem-se a $\vec{\eta}' = \mathcal{B}(\vec{v})\vec{\eta}$, onde $\mathcal{B}(\vec{v})$ é a matriz 6×6 definida por:

$$\mathcal{B}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathcal{V}(\vec{v}) \\ -\frac{1}{c^2} \mathcal{V}(\vec{v}) & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

com

$$\mathcal{V}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Esperaríamos que $\mathcal{B}(\cdot)$ fosse uma representação do grupo de Galileu no espaço $\mathbb{E}$. Isso significa que, se $\vec{\eta}' = \mathcal{B}(\vec{b})\vec{\eta}$ e $\vec{\eta}'' = \mathcal{B}(\vec{a})\vec{\eta}'$, indicando que o referencial $S''(S')$ está em movimento relativo ao referencial $S(S')$ com velocidades $\vec{b}(\vec{a})$, então espera-se que $\vec{\eta}'' = \mathcal{B}(\vec{a} + \vec{b})\vec{\eta}$. Contudo, $\mathcal{B}(\vec{a})\mathcal{B}(\vec{b}) \neq \mathcal{B}(\vec{a} + \vec{b})$. De fato,

$$\mathcal{B}(\vec{a})\mathcal{B}(\vec{b}) = \begin{pmatrix} \mathcal{N} & \mathcal{V}(\vec{a} + \vec{b}) \\ -\frac{1}{c^2} \mathcal{V}(\vec{a} + \vec{b}) & \mathcal{N} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

$\mathcal{N}$ é uma 3×3 -matriz cujos elementos são dados por

$$\mathcal{N}_{ij} = \begin{cases} 1 + \frac{\vec{b} \cdot \vec{a} - b_i a_i}{c^2}, & i = j, \\ \frac{b_i a_j}{c^2}, & i \neq j. \end{cases} \quad (20)$$

Isso sugere que os limites em (15) e (16) podem não estar corretos. Vamos reconsiderar o limite clássico em que $|\vec{v}| \ll c$, mas agora tendo em mente que

$$|c\rho| \gg |\vec{j}| \Rightarrow |\vec{E}| \gg |c\vec{B}|, \quad (21)$$

$$|c\rho| \ll |\vec{j}| \Rightarrow |\vec{E}| \ll |c\vec{B}|. \quad (22)$$

No primeiro caso (o limite elétrico), (13) e (14) tendem a,

$$\vec{E}' = \vec{E}, \quad (23)$$

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}, \quad (24)$$

o que é equivalente a $\vec{\eta}' = \mathcal{B}_e(\vec{v})\vec{\eta}$. Aqui, $\mathcal{B}_e(\vec{v})$ representa o *boost* no limite elétrico,

$$\mathcal{B}_e(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -\frac{1}{c^2} \mathcal{V}(\vec{v}) & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

De fato, nesse caso, temos uma estrutura de grupo, pois $\mathcal{B}_e(\vec{a})\mathcal{B}_e(\vec{b}) = \mathcal{B}_e(\vec{a} + \vec{b})$, observando que o conjunto $\mathcal{B}_e(\vec{v})$ é fechado sob o produto usual de matrizes invertíveis, o elemento neutro é dado por $\mathcal{B}_e(\vec{0})$ e, para cada $\mathcal{B}_e(\vec{v})$, o inverso único é dado por $\mathcal{B}_e^{-1}(\vec{v}) = \mathcal{B}_e(-\vec{v})$.

O limite magnético segue de maneira análoga. Como $|\vec{E}| \ll |c\vec{B}|$, juntamente, claro, com $|\vec{v}| \ll c$, (13) e (14) tendem a

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (26)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (27)$$

As duas equações podem ser unificadas por meio de $\vec{\eta}' = \mathcal{B}_m(\vec{v})\vec{\eta}$. Nesse caso, assim como antes, $\mathcal{B}_m(\vec{v})$ corresponde ao *boost* que conecta dois referenciais em movimento relativo com velocidade $\vec{v}$

$$\mathcal{B}_m(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathcal{V}(\vec{v}) \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{1}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Mais uma vez, temos que $\mathcal{B}_m(\vec{a})\mathcal{B}_m(\vec{b}) = \mathcal{B}_m(\vec{a} + \vec{b})$ o que confere ao conjunto $\mathcal{B}_m(\vec{v})$ a estrutura de grupo desejada.

Diante dos dois limites bem definidos acima, na próxima seção discutiremos como as equações de Maxwell se apresentam em cada um deles.

III. AS EQUAÇÕES DE MAXWELL NA ELETRODINÂMICA GALILEANA

Começemos pelo limite elétrico. Nesse caso particular, a forma local das equações de Maxwell resulta em,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (30)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{0}, \quad (31)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}. \quad (32)$$

É um cálculo direto mostrar que elas permanecem invariantes sob as transformações galileanas (8), (9), (23) e (24), juntamente com

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \nabla, \quad (33)$$

$$\nabla' = \nabla, \quad (34)$$

como consequência de (4) e (5). Para verificar a consistência do limite elétrico das equações de Maxwell, calculamos a divergência de (32). O lado esquerdo se anula identicamente: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$. O lado direito resulta em

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (35)$$

Essa é simplesmente a equação de continuidade, que se espera ser válida. Notamos que (35) também é invariante galileana. Para concluir nossa discussão sobre o limite elétrico, observamos que as leis de transformação dos campos estão intrinsecamente conectadas às equações (31) e (32). Por um lado, o movimento do campo elétrico ($\vec{v} \times \vec{E}$) gera um campo magnético ($\vec{B}'$), como visto em (24). Nesse caso, (32) mantém o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, que é o responsável por gerar $\vec{B}$.

No entanto, o mesmo não pode ser dito em relação ao movimento de $\vec{B}$. Como $\vec{E}$ permanece inalterado em (23) (não há termo do tipo $\vec{v} \times \vec{B}$ presente), a indução deixa de ser válida, resultando em um campo elétrico conservativo: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$. Este resultado retrata um fato interessante: este é exatamente o conteúdo abordado na primeira parte de um curso de eletromagnetismo, quando as fontes de campo concentram-se em cargas estáticas em um determinado referencial. Assim, o limite elétrico poderia justificar tecnicamente a existência da diferença de potencial elétrico.

Voltemos agora nossa atenção para o limite magnético e conduzamos uma discussão análoga à anterior. Começamos com as equações de Maxwell, que agora assumem a forma,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (36)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (37)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t'}, \quad (38)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (39)$$

Um cálculo direto mostra que elas são aproximadamente covariantes sob o limite magnético das transformações galileanas, *i.e.*, (11), (12), (26), (27), juntamente com

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (40)$$

$$\nabla' = \frac{1}{c^2} \vec{v} \frac{\partial}{\partial t} + \nabla. \quad (41)$$

As expressões acima decorrem de (6) e (7). Para verificar a consistência de (36)(39), começamos calculando o divergente de (38). Por um lado, ele é identicamente nulo: $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$. Por outro lado, $\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{B} = 0$, devido a (37), e utilizamos o teorema de Clairaut para trocar a ordem das derivadas. Um cálculo análogo aplica-se a (39), em que a equação de continuidade neste regime assume a forma

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (42)$$

Como esperado, (42) também é invariante pelas transformações de Galileu.

Podemos repetir a discussão a respeito das leis de transformação do campo eletromagnético. Neste caso, o movimento do campo magnético ($\vec{v} \times \vec{B}$) gera um campo elétrico ($\vec{E}'$), conforme indicado em (26). Portanto, espera-se que a indução seja válida, em contraste com o limite elétrico.

Além disso, como o campo magnético permanece inalterado em (27) (não há termo do tipo $\vec{v} \times \vec{E}$), a corrente de deslocamento em (39) está ausente.

A análise acima conclui nossa revisão dos dois limites do Eletromagnetismo Galileano. Nosso foco agora se volta para o limite magnético, pois pretendemos investigar a lei de Lenz. Na próxima seção, proporemos um experimento simples para sugerir que a lei de Lenz pode ter uma origem fundamentada em argumentos relativísticos.

IV. A ORIGEM RELATIVÍSTICA DA LEI DE LENZ NO ELETROMAGNETISMO GALILEANO

Existem muitos experimentos de bancada que oferecem visualizações experimentais da indução e da lei de Lenz (ver (MORAES; RIZZUTI; GONÇALVES, 2022; BOHÁ *et al.*, 2025; FONTES; RODRIGUES, 2021; SANTIAGO *et al.*, 2018; SILVA; LUNA, 2025) e referências aí citadas). Com base nessas construções empíricas/operacionais, discutimos um experimento que indica qualitativamente a estrutura da lei de Lenz/Faraday, ilustrada na Figura 1 (LESCHE, 2025).

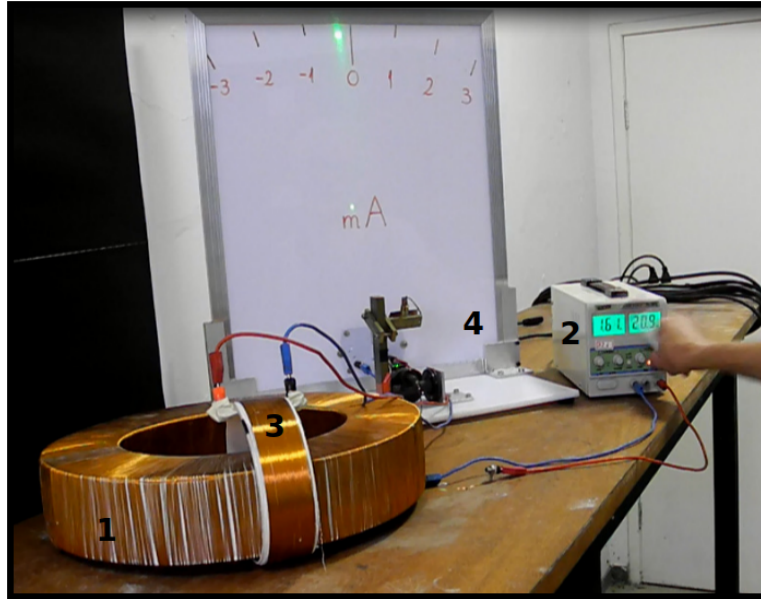


Figura 1: Montagem experimental mostrando a correlação entre $\nabla \times \vec{E}$ and $\partial \vec{B} / \partial t$.

A bobina toroidal 1 está conectada a uma fonte DC 2, que gera um campo magnético confinado no seu interior ao injetarmos corrente. A bobina cilíndrica 3 envolve a bobina toroidal, e as duas não possuem contato elétrico direto. Esta última, por sua vez, está conectada a um amperímetro 4, projetado especificamente para fins didáticos, permitindo que o público interprete e visualize literalmente as medições. A mão borrada na Figura 1 indica seu movimento, alternando entre ligar e desligar a corrente. O resultado líquido é que o amperímetro registra correntes positivas e negativas, mesmo na ausência de contato direto entre as bobinas.

A corrente alternada introduzida em 1 gera um campo magnético variável no tempo, $\partial \vec{B} / \partial t$. As cargas em 3 estavam completamente estáticas. A única força capaz de movê-las, resultando na resposta do amperímetro, deve ter sido originada de um campo elétrico circundando a bobina 3; denotamos isso como $\nabla \times \vec{E}$, devido à sua formação geométrica.

Além disso, uma análise cuidadosa revela que a correlação entre $\partial \vec{B} / \partial t$ e $\nabla \times \vec{E}$ é regida pela regra da *mão esquerda*, como ilustrado na Figura 2. Considerando que ambas as expressões possuem a mesma dimensão, isto é, $T/s = N/(C \cdot m)$, restamos com uma relação linear,

$$\nabla \times \vec{E} = \zeta \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (43)$$

O parâmetro ζ é uma incógnita a ser determinada posteriormente. Segundo J. D. Jackson (JACKSON, 1999), ζ não é uma constante empírica independente a ser obtida experimentalmente, mas sim uma consequência da suposição da invariância galileana. Em outras palavras, o sinal e o valor de ζ são determinados pela exigência de que as leis eletromagnéticas subjacentes permaneçam consistentes sob transformações galileanas, refletindo os princípios fundamentais de simetria inerentes à mecânica clássica.

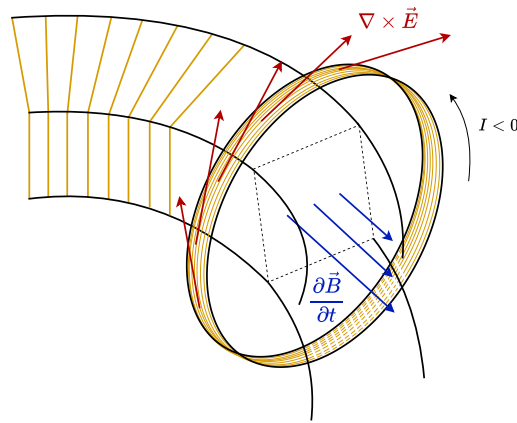


Figura 2: Representação da correlação entre $\nabla \times \vec{E}$ and $\partial \vec{B} / \partial t$ através da regra da mão esquerda.

A discussão acima sugere que $\zeta < 0$. Além disso, como acabamos de mencionar, uma análise dimensional mostra que ζ é um número puro adimensional, que poderia ser, por exemplo, $-\pi$, $-\sqrt{2}$ ou qualquer outro valor negativo. Argumentamos que $\zeta = -1$ não é coincidência e pode, de fato, ser deduzido. A seguir, demonstramos isso.

Considere um experimento prático envolvendo um fio retilíneo infinito e fixo em um referencial S . O fio conduz uma corrente $I > 0$ orientada ao longo do eixo $\hat{e}_2$. Como usual, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ denota a base canônica em um sistema de coordenadas cartesianas. Próximo ao fio, há um circuito retangular fechado com lados de comprimento a e b e resistência R . O circuito está no plano $x^1 x^2$ e se afasta do fio com velocidade $\vec{v} = v\hat{e}_1$. Denotamos o referencial no qual o circuito está situado como S' . Como não há cargas estáticas e $v \ll c$, estamos operando dentro do limite magnético. Acoplado ao circuito há um amperímetro A , conectado conforme mostrado na Figura 3.

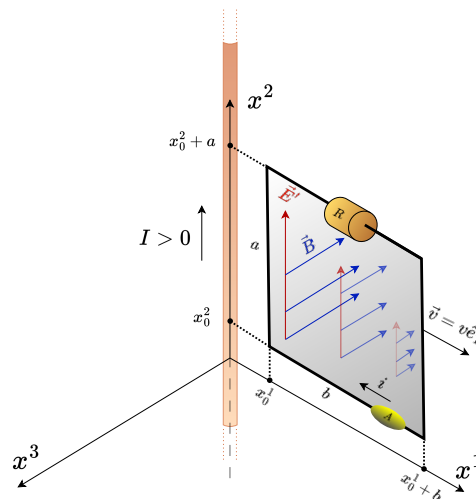


Figura 3: Configuração experimental empregada para investigar uma possível origem relativística da lei de Lenz.

A seta próxima a A indica apenas o procedimento experimental para conectar o am-

perímetro ao circuito, a fim de evitar ambiguidades (BERREDO-PEIXOTO *et al.*, 2018). A corrente i pode ser positiva ou negativa, dependendo de como o experimentador interpreta o resultado medido.

Vamos analisar o resultado do amperímetro a partir do referencial S . A corrente I gera um campo magnético

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x^1} \hat{e}_3 \quad (44)$$

que atravessa a superfície retangular do circuito.

Como a bobina está se afastando do fio, a variação temporal de $\vec{B}$ aponta na direção positiva de x^3 ,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi (x^1)^2} \hat{e}_3. \quad (45)$$

Para prever a medida do amperímetro, utilizamos a lei de indução de Faraday (43) e aplicamos o teorema de Stokes. Integramos o campo elétrico $\vec{E}$ no sentido horário ao longo do circuito,

$$\oint_{(\partial S)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Ri = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \zeta \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (46)$$

(∂S) denota o caminho orientado ao redor do circuito. Por sua vez, isso implica que a superfície (S) está orientada por $d\vec{S} = dx^1 dx^2 (-\hat{e}_3)$. Portanto,

$$i = \frac{\zeta}{R} \int_{x_0^1}^{x_0^1+a} \frac{\mu_0 I v}{2\pi (x^1)^2} \hat{e}_3 \cdot (-\hat{e}_3) dx^1 dx^2 = \zeta \frac{\mu_0 I v a}{2\pi R} \left(\frac{1}{x_0^1 + b} - \frac{1}{x_0^1} \right). \quad (47)$$

Aqui, x_0^1 e x_0^2 denotam as coordenadas do canto inferior esquerdo do circuito em um instante arbitrário de tempo.

Agora, vamos investigar o que é observado no referencial S' . De acordo com (26), o campo magnético $\vec{B}$ é percebido em S' como um campo elétrico,

$$\vec{E}' = v \hat{e}_1 \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi x^1} \hat{e}_3 \right) = \frac{\mu_0 I v}{2\pi x^1} \hat{e}_2. \quad (48)$$

Integramos $\vec{E}'$ ao longo do circuito para obter i' , a medida prevista pelo amperímetro no referencial S' .

$$Ri' = \oint_{(\partial S)} \vec{E}' \cdot d\vec{\ell}' = \int_{x_0^2}^{x_0^2+a} \frac{\mu_0 I v}{2\pi x_0^1} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 dx'^2 = \int_{x_0^2}^{x_0^2+a} \frac{\mu_0 I v}{2\pi (x_0^1 + b)} \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 dx'^2, \quad (49)$$

implicando em

$$i' = \frac{\mu_0 I v a}{2\pi R} \left(\frac{1}{x_0^1} - \frac{1}{x_0^1 + b} \right). \quad (50)$$

Sabendo que a leitura do amperímetro é independente do referencial, uma comparação

entre (47) e (50) nos fornece

$$i = i' \Rightarrow \zeta = -1, \quad (51)$$

o que é exatamente a lei de Lenz que buscávamos deduzir.

Vale mencionar que a abordagem metodológica adotada nesta seção segue linhas semelhantes às desenvolvidas em (RODRIGUES; RIZZUTI, 2023), porém com uma diferença fundamental: enquanto o trabalho citado opera exclusivamente no limite relativístico, nossa análise mantém-se inteiramente no âmbito da aproximação galileana.

V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, utilizamos o Eletromagnetismo Galileano para explorar uma possível origem da lei de Lenz. Em resumo, nossos resultados podem ser sintetizados da seguinte forma:

1. Apresentamos uma breve revisão do EG, demonstrando que a teoria eletromagnética comporta dois limites distintos para baixas velocidades.
2. Enquanto um limite ingênuo (considerando apenas $\gamma \rightarrow 1$ quando $|\vec{v}| \ll c$) resulta em transformações dos campos eletromagnéticos que não formam um grupo, os limites elétrico e magnético, por sua vez, apresentam essa estrutura. Embora não seja uma novidade, esses resultados foram explorados aqui de forma detalhada, utilizando uma abordagem baseada na teoria de grupos.
3. A relatividade galileana fornece um pano de fundo conceitual que justifica a divisão tradicional dos cursos de Física 3 (Eletromagnetismo) em duas partes distintas: eletrostática e magnetismo. No regime clássico de baixas velocidades, os campos elétricos e magnéticos se comportam como entidades praticamente independentes, refletindo os dois limites elétrico e magnético do Eletromagnetismo Galileano. Dessa forma, não é necessária uma unificação completa entre esses campos nesse estágio do aprendizado. Essa unificação, que revela a natureza intrinsecamente ligada dos campos elétrico e magnético, surge apenas mais tarde com a relatividade restrita, quando as transformações entre sistemas de referência passam a conectar os campos de forma não trivial. Assim, a estrutura pedagógica tradicional encontra respaldo na fundamentação teórica da relatividade galileana como um limite clássico, enquanto a relatividade especial é o marco que promove a integração completa dos fenômenos eletromagnéticos.
4. Nosso principal resultado refere-se ao limite magnético, onde a lei da indução é válida. Demonstramos que um *boost* galileano exige que a única relação linear possível entre $\nabla \times \vec{E}$ e $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ seja caracterizada por um sinal negativo – isto é, a lei de Lenz. Assim, concluímos que a lei de Lenz possui uma origem profunda no princípio da relatividade, seja no regime clássico (galileano) ou no regime relativístico (lorentziano).

Editora Responsável: Maria de Fátima da Silva Verdeaux

REFERÊNCIAS

- BELLAC, M. L.; LÉVY-LEBLOND, J. M. Galilean electromagnetism. *Il Nuovo Cimento*, v. 14, p. 217-233, 1973.
- BERREDO-PEIXOTO, G.; HERNANDO, J.; LESCHE, B.; RIZZUTI, B. F. When a series of capacitors is not just capacitors in series. *Eur. J. Phys.*, v. 39, p. 065203, 2018. doi: <<https://doi.org/10.1088/1361-6404/aadda5>>.
- BOHÁ, R.; KOPECKÝ, V.; PRIMAS, J.; MALÍK, M.; SLAVÍK, L. Educational device for demonstrating Lenz's law. *Phys. Educ.*, v. 60, p. 015012, 2025. doi: <<https://doi.org/10.1088/1361-6552/ad8e27>>.
- FILHO, O. L. S.; FERREIRA, M. Invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz: pontes conceituais via derivação como alternativa ao cálculo tensorial. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, v. 45, p. e20230231, 2023. doi: <<https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2023-0231>>.
- FONTES, D. T. M.; RODRIGUES, A. M. Faraday's law low-cost experiment without permanent magnets. *The Phys. Teach.*, v. 59, p. 345, 2021. doi: <<https://doi.org/10.1119/10.0004884>>.
- GAIO, L. M.; RIZZUTI, B. F. A categorical view on the principle of relativity. *Reports on Mathematical Physics*, v. 92, p. 291-307, 2023. doi: <[https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(23\)00081-2](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(23)00081-2)>.
- HILL, S. E. Rephrasing Faraday's law. *The Physics Teacher*, v. 48, p. 410-412, 2010. doi: <<https://doi.org/10.1119/1.3479724>>.
- JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- LENZ, E. Über die Bestimmung der Richtung der durch elektrodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme. *Annalen der Physik und Chemie*, v. 107, p. 483-494, 1834. doi: <<https://doi.org/10.1002/andp.18341073103>>.
- LESCHÉ, B. *Notas de aula - Física 3*. 2025. Disponível em: <<https://www2.ufjf.br/fisica/wp-content/uploads/sites/427/2013/10/FIII-08-01-A-lei-de-indu%C3%A7%C3%A3o-de-Faraday.pdf>>. Acesso em: 28 abr. 2025.
- MONTIGNY, M.; ROUSSEAUX, G. On the electrodynamics of moving bodies at low velocities. *Eur. J. Phys.*, v. 27, p. 755-768, 2006. doi: <<https://doi.org/10.1088/0143-0807/27/4/>>.

007>.

MONTIGNY, M.; ROUSSEAUX, G. On some applications of galilean electrodynamics of moving bodies. *Am. J. Phys.*, v. 75, p. 984-992, 2007. doi: <<https://doi.org/10.1119/1.2772289>>.

MORAES, J. T.; RIZZUTI, B. F.; GONÇALVES, B. Instructional experiment on Lenzs law. *Quarks*, v. 4, p. 61-80, 2022.

ROCHA, B. F. R. A.; MOTA, D. Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos. *Rev. Bras. Ensino Fís.*, v. 35, p. 4304, 2013. doi: <<https://doi.org/10.1590/S1806-11172013000400004>>.

RODRIGUES, T. B. S. F.; RIZZUTI, B. F. On the connection between Lenzs law and relativity. *Eur. J. Phys.*, v. 44, p. 065204, 2023. doi: <<https://doi.org/10.1088/1361-6404/acef1a>>.

ROUSSEAUX, G. Forty years of galilean electromagnetism (1973-2013). *Eur. Phys. J. Plus*, v. 128, p. 81, 2013. doi: <<https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13081-5>>.

SANTIAGO, A. J.; MACHADO, A. F.; SILVA, C. E.; PINHEIRO, L. C.; TAVARES Jr, A. D. Construindo um motor elétrico de corrente contínua como aprendizagem ativa da lei de Faraday. *Revista do Professor de Física*, v. 2, n. 2, p. 10-26, 2018. doi: <<https://doi.org/10.26512/rpf.v2i2.12075>>

SANTOS, E. S.; MONTIGNY, M.; KHANNA, F. C., SANTANA, A. E. Galilean covariant lagrangian models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 37, p. 97719789, 2004. doi: <<https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/41/011>>.

SEXL, R. U.; URBANTKE, H. K. *Relativity, Groups, Particles: Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics*. Vienna: Springer-Verlag, 2002.

SILVA, F. U. da; LUNA, C. B. B. Engajando estudantes com práticas experimentais: o caso da mini bobina de Tesla. *Revista do Professor de Física*, v. 9, p. 498-512, 2025. doi.: <<https://doi.org/10.26512/rpf.v9i1.57305>>
