

FORÇAS DE CONTATO: CASOS PARTICULARES COM COMPORTAMENTO CONSERVATIVO

CONTACT FORCES: PARTICULAR CASES WITH CONSERVATIVE BEHAVIOR

THIAGO LOBO FONSECA¹, MICHAEL MORAES CÂNDIDO¹, MÁRCIO GOMES
DA SILVA², MINOS MARTINS ADÃO NETO³, OCTÁVIO DANIEL RODRIGUEZ
SALMON³

¹Instituto Federal do Rio de Janeiro, Rua Dr. José Augusto Pereira dos Santos, s/n (C.I.E.P.
436 Neusa Brizola), 24425-004 São Gonçalo, Rio de Janeiro, Brasil.

²Instituto Federal do Amazonas, Av. 7 de Setembro, 1975, Centro, Manaus, AM, Brasil.

³Departamento de Física, Universidade Federal do Amazonas, 3000, Japiim, 69077-000
Manaus, AM, Brasil.

Resumo

As forças normal e de atrito são forças de contato presentes numa grande gama de problemas de mecânica newtoniana, em especial nos primeiros anos do ensino médio. Apesar disso, um ponto de pouca discussão no ensino da física é a questão das características conservativas que estas forças podem assumir quando são impostas algumas condições de contorno especiais. O presente trabalho ilustra a análise de dois problemas de mecânica clássica onde são impostos vínculos geométricos particulares, produzindo um comportamento conservativo de tais forças. Apresentaremos a análise de gráficos das forças de contato em função do tempo e da distância, bem como o balanço energético para os dois casos.

Palavras-chave: *forças conservativas, atrito estático, força normal.*

Abstract

The normal and frictional forces are contact forces present in a wide range of Newtonian mechanics problems, especially in the early years of high school. Nevertheless, a point of little discussion in the teaching of physics is the question of the conservative characteristics that these forces can assume, when some special boundary conditions are imposed. The present work illustrates the analysis of two classical mechanics problems where particular geometric constraints are imposed, producing a conservative behavior of such forces. We will present the graphic analysis of the contact forces as a function of time and distance, as well as the energy balance for both cases.

Keywords: conservative forces, static friction, normal force.

I. INTRODUÇÃO

No estudo da dinâmica dos corpos pontuais, observamos que muitas sutilezas referentes às forças de contato do tipo normal e de atrito, não são bem compreendidas pelos alunos. Esta dificuldade foi relatada como consequência de alguns fatores, dentre eles a utilização da própria intuição, que muitas vezes produz resultados espúrios, na pré-análise desses problemas (KALAJIAN; MAKAROVA, 2014).

A força de atrito é definida como $F^{at} = \mu N$, onde N é o módulo da força normal e μ é o coeficiente de atrito, constante que depende da interação entre as duas superfícies em contato e se existe ou não deslizamento entre elas. A força de atrito, por possuir uma natureza onde seu módulo, direção e sentido variam de acordo com as condições de contorno impostas, invariavelmente gera dúvidas para os alunos (HIZILCIK, 2023). Quando tais dúvidas não são sanadas, acabam por conduzir à uma construção errônea sobre outras grandezas e conceitos definidos posteriormente, como por exemplo, o trabalho e a conservação de energia mecânica. Considerações semelhantes podem ser feitas acerca da força normal, cujos erros mais comuns estão associados ao ponto de aplicação dessa força e ao seu par ação-reação (MONGAN *et al.*, 2020).

A resolução de problemas contraituitivos no ensino de Física é uma estratégia adotada para desconstruir alguns falsos paradigmas que os alunos acabam admitindo como verdadeiros durante o processo de ensino-aprendizagem (CAMPANÁRIO, 1998), e por conseguinte, moldar os pilares associados aos conceitos corretos. Ao perguntar para um aluno de ensino médio se é possível que a força de atrito estático realize trabalho sobre um sistema ou se é possível que a força normal atue como uma força harmônica sob determinadas condições, é de se esperar que obtenha-se respostas negativas para ambas as perguntas.

Em um trabalho anterior (SILVA; PEIXOTO, 2018), foram estudados dois sistemas em que a força de atrito estático se apresentava de maneira não conservativa. No primeiro caso, o estudo de uma esfera que rolava sobre um plano inclinado sem deslizar, os autores mostraram que o trabalho realizado pela força de atrito era nulo, e a interpretação de que essa força pudesse ser considerada conservativa, foi rechaçada para este caso. No outro exemplo, os autores estudaram um bloco em repouso sobre uma superfície móvel ligada a

uma mola. Essa superfície era colocada para oscilar e conforme a energia era dissipada, o conjunto descrevia uma oscilação amortecida. O bloco era mantido fixo à superfície devido à força de atrito estático entre ambas as superfícies. Neste exemplo, foi mostrado também que a força de atrito não poderia ser conservativa, pois o trabalho num ciclo fechado de oscilação não era nulo.

Apresentaremos neste trabalho dois sistemas ideais em que duas forças de contato bastante usuais, se comportam de maneira conservativa. Forças conservativas são aquelas cujo trabalho depende apenas das posições final e inicial do corpo onde a força é aplicada, independentemente do caminho escolhido entre os dois pontos. Sendo assim, uma força conservativa possui trabalho nulo para um caminho fechado, quando a posição final coincide com a posição inicial do corpo. Dois exemplos clássicos de forças conservativas são as forças peso e elástica. O trabalho realizado pela força peso para deslocar um corpo de massa m entre duas alturas h e h_0 pode ser calculado pela igualdade $mg(h - h_0)$. Da mesma forma, o trabalho realizado por uma força elástica para um deslocamento entre duas posições x e x_0 pode ser calculado pela igualdade $\frac{k}{2}(x^2 - x_0^2)$. É fácil verificar que quando o sistema retorna à sua posição original, ou seja, quando $h = h_0$ e $x = x_0$, o trabalho se anula para ambos os casos.

No primeiro exemplo analisado, colocamos um bloco sobre uma superfície oscilante, mas desprezamos todos os atritos externos, de maneira que só exista atrito entre a superfície e o bloco. Apresentaremos o cálculo do trabalho realizado pela força de atrito estático e mostraremos que ele é zero num ciclo fechado, como deve ser para uma força conservativa. No segundo exemplo, pensamos num bloco que se encontra em equilíbrio sobre uma balança. O sistema é colocado em oscilação. Apresentaremos o cálculo para o trabalho da força normal, mostrando novamente que esta força se comporta de maneira conservativa.

O presente artigo encontra-se dividido da seguinte maneira: Nas seções II e III apresentamos o desenvolvimento das equações diferenciais que regem os dois casos particulares estudados, através da aplicação da 2ª lei de Newton. Nas mesmas seções apresentamos os resultados da discussão através da análise de gráficos das forças de contato em função da posição e também do tempo. A seção IV traz o balanço energético de ambos os sistemas físicos e a discussão do seu comportamento conservativo. Na última seção, V, apresentamos a conclusão do trabalho.

II. FORÇA DE ATRITO ESTÁTICO NO SISTEMA MASSA-MOLA DE DOIS BLOCOS

Considere dois corpos, um bloco de massas m e uma plataforma de massa M . A plataforma está presa a uma mola ideal de constante elástica K e desliza sem atrito sobre uma superfície plana, descrevendo um movimento harmônico simples.

O corpo de massa m se encontra em repouso sobre a plataforma devido a uma força de atrito cujo coeficiente de atrito estático entre as duas superfícies é μ_e . Durante todo o movimento a velocidade relativa entre os blocos é **nula**, fato que permite escrever o vínculo

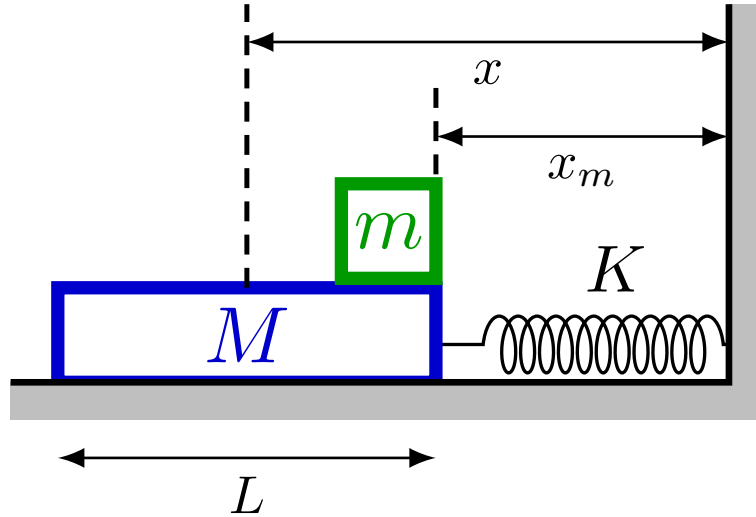


Figura 1: Representação de uma plataforma ligada a uma mola que desliza sem atrito enquanto um bloco permanece em repouso em cima da plataforma por causa de uma força de atrito estático.

geométrico em termos das posições dos blocos, x e x_m , e do comprimento da plataforma, L :

$$x - x_m = \frac{L}{2}. \quad (1)$$

Derivando a Eq.(1) duas vezes em relação ao tempo, temos:

$$a = a_m, \quad (2)$$

condição que garante que os blocos irão oscilar sempre sem que haja deslocamento relativo entre eles e, conseqüentemente, com a mesma aceleração.

No instante $t = 0$, tiramos o conjunto da sua posição relaxada x_0 e esticamos a mola até uma posição A . Podemos considerar, que para o conjunto $M + m$, a força resultante é a força elástica F_{el} , de maneira que:

$$F^{el} = M'a \quad (3)$$

$$-Kx = M'\ddot{x} \quad (4)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (5)$$

onde $M' = M + m$ e $\omega^2 = K/M'$. Esta equação é bastante conhecida e sua solução é do tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (6)$$

sendo A a amplitude e ϕ_0 a fase inicial. Essas duas grandezas podem ser obtidas através da aplicação das condições iniciais. Consideramos que no instante $t = 0$, a mola está totalmente esticada, o sistema se encontra em repouso e com aceleração máxima. Dessa forma, $x(0) = A$

e $a(0)$ = máximo. Essas duas condições implicam, respectivamente em:

$$\text{sen}(\phi_0) = 1$$

e, portanto,

$$\phi_0 = \pi/2 \quad (7)$$

derivando duas vezes no tempo a Eq.6, temos a aceleração do conjunto em função do tempo:

$$a(t) = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t + \pi/2) \quad (8)$$

o que implica numa aceleração máxima no instante $t = 0$:

$$a(0) = a_{\max} = -A\omega^2 \quad (9)$$

Observando apenas o bloco de massa m , no referencial sobre a plataforma de massa M , podemos escrever que a força resultante deve ser a força de atrito estático, que mantém os dois corpos em repouso, um em relação ao outro. Dessa forma,

$$F_e^{at} = ma(t) \quad (10)$$

como visto anteriormente, o vínculo geométrico garante que a aceleração do conjunto é a mesma de cada um dos dois corpos isoladamente. Sendo assim, podemos reescrever a igualdade anterior com auxílio da Eq. (8)

$$F_e^{at} = -Am\omega^2 \text{sen}(\omega t + \pi/2) \quad (11)$$

Dessa maneira, a força de atrito estático, deve oscilar no tempo com a mesma frequência ω do sistema massa-mola. Podemos calcular o valor máximo de amplitude para que não haja deslizamento entre os corpos. Este problema foi proposto no capítulo 3 do volume 2, do livro de Física básica do Moysés (2002). Igualando a força de atrito estático com a resultante de aceleração máxima, obtemos:

$$-\mu_e N = ma_{\max} \quad (12)$$

$$-\mu_e g = -A\omega^2 \quad (13)$$

$$A = \frac{\mu_e M' g}{K} \quad (14)$$

O conjunto executa um movimento harmônico simples restrito ao vínculo da Eq.(14). Para uma oscilação hipoteticamente mais forte, os corpos se separam pois a F_e^{at} não sustenta a inércia do corpo menor, implicando no deslizamento relativo.

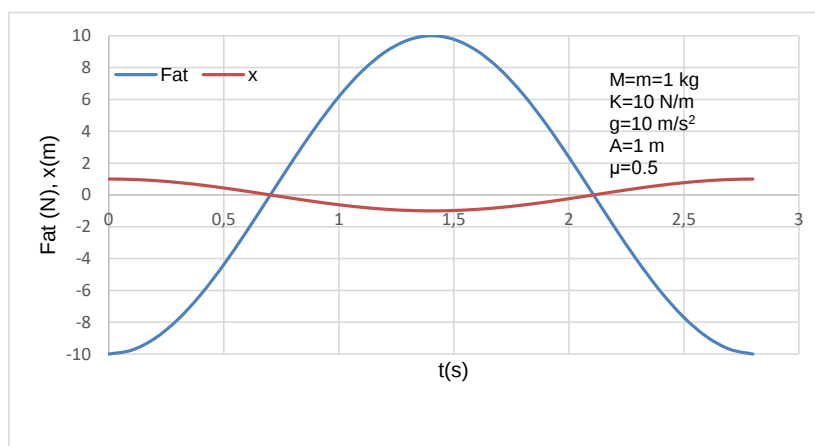


Figura 2: Força de atrito estático e deformação da mola em função do tempo, para uma oscilação completa.

Na Fig.(2) apresentamos graficamente a força de atrito estático em função do tempo, obtida pela relação da Eq.(11) para uma amplitude igual à máxima possível sem deslizamento Eq.(14) dentro de um ciclo completo. Na posição $x = A$, na máxima distensão da mola, a força de atrito estático, inicialmente negativa, apresenta seu maior módulo. Conforme se desloca para o ponto de equilíbrio, o módulo da força se reduz e se anula em ($x = 0$). A partir desse ponto, a mola se comprime e a força atinge seu valor máximo positivo na máxima compressão da mola ($x = -A$). No caminho inverso, a sequência de alternância do sinal se repete, até atingir novamente sua posição inicial.

Essa dependência pode ser mais bem visualizada na Fig.(3), onde normalizamos a força de atrito e a deformação da mola.

Na Fig.(4) apresentamos a força de atrito estático em função da deformação da mola, com o mesmo comportamento linear do tipo $-Kx$. Observamos novamente as mudanças do sinal da força, conforme o sistema oscila. Repare que inicialmente, ou seja, no instante $t = 0$, a deformação da mola é uma distensão máxima e, portanto, $x = A = 1m$. Nesse ponto a força de atrito é negativa. A medida que o tempo passa, a mola passa pela posição de relaxamento, onde $x = 0$ e finalmente se encontra na posição de compressão máxima ($x = -A = -1m$), onde a força de atrito se torna positiva.

III. FORÇA NORMAL NO SISTEMA CAIXA OSCILANTE COM BALANÇA

Considere agora o exemplo da Fig.5, representado por um conjunto contendo uma caixa oca, pendurada ao teto através de uma mola ideal de constante elástica K . Dentro da caixa, encontra-se uma balança digital. Chamamos de M a massa desse conjunto. Um outro corpo, de massa m , é colocado sobre a balança e o sistema é posto para oscilar.

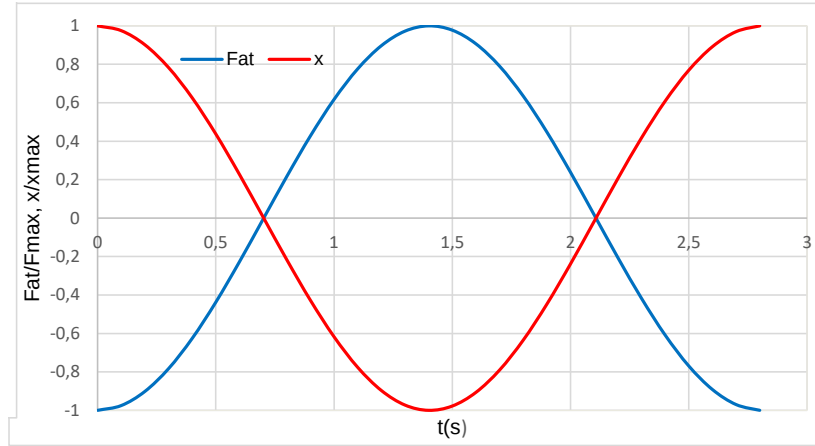


Figura 3: Força de atrito estático e deformação da mola normalizados em função do tempo, para uma oscilação completa.

A priori, a exigência nesta situação é de que não haja movimento relativo entre a caixa de massa M e o bloco de massa m . A equação do vínculo neste caso é dada por:

$$x_m - x = h, \quad (15)$$

onde h representa a distância do topo do bloco ao teto da caixa e x e x_m são, respectivamente, as posições da caixa e do bloco em função do tempo. Analogamente ao que foi feito no caso anterior, é possível escrever a partir da Eq.(15) que:

$$a = a_m, \quad (16)$$

Para um dado instante de tempo t podemos imaginar que a leitura da balança não será, necessariamente, o peso real do corpo. A força normal deve oscilar, produzindo valores oscilantes de leitura. Dessa forma,

$$N(t) - P = ma(t) \quad (17)$$

e por outro lado, o sistema massa mola nos dá a igualdade

$$M'g - F^{el} = M'a(t) \quad (18)$$

$$-Kx = M'\ddot{x} - M'g \quad (19)$$

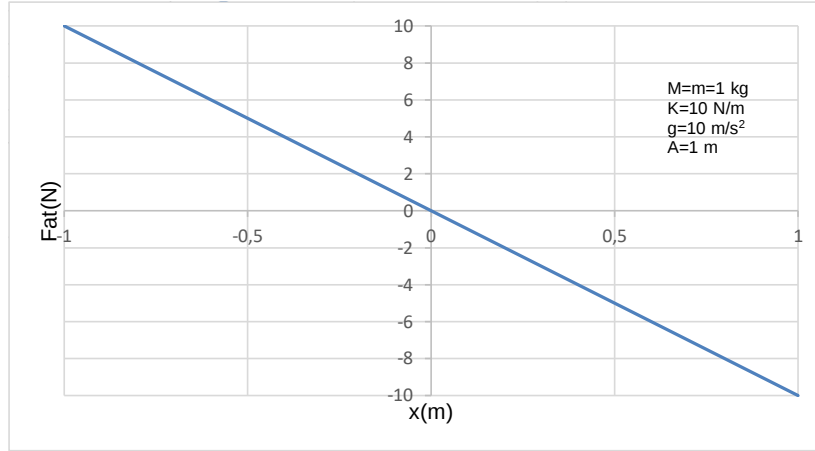


Figura 4: Força de atrito estático em função da deformação da mola, para uma oscilação completa.

Podemos finalmente escrever a equação diferencial para o sistema acoplado à mola

$$M'\ddot{x} + Kx = M'g \quad (20)$$

Essa equação possui uma combinação de duas soluções, uma homogênea e outra particular. A solução homogênea é a mesma da Eq.(6), exceto para a fase inicial, já que no instante $t = 0$, o conjunto se encontra na posição A e dessa forma $N(0)$ deve apresentar o valor máximo, que ocorre para um $\phi_0 = 3\pi/2$. A solução particular que satisfaz a Eq.(20) é dada por:

$$x_p = M'g/K \quad (21)$$

produzindo uma solução para o sistema do tipo

$$x = A\cos(\omega t + \phi_0) + M'g/K \quad (22)$$

Dessa maneira, utilizando a Eq.(17), podemos verificar que o comportamento da força normal, que produz a leitura da balança, deve também ser do tipo harmônico simples:

$$N(t) = m(g - A\omega^2\sin(\omega t + \phi_0)) \quad (23)$$

para $\omega^2 = K/M'$ e $\phi_0 = 3/4$.

Na Fig(6) apresentamos graficamente a força normal em função do tempo para valores específicos de massa, constante elástica, aceleração da gravidade e amplitude de oscilação.

Essas constantes foram escolhidas de forma que a amplitude tivesse seu maior valor possível obedecendo o vínculo geométrico que garante que não há descolamento entre o corpo de massa m e a balança. Podemos calcular essa amplitude, utilizando a Eq. (14) com

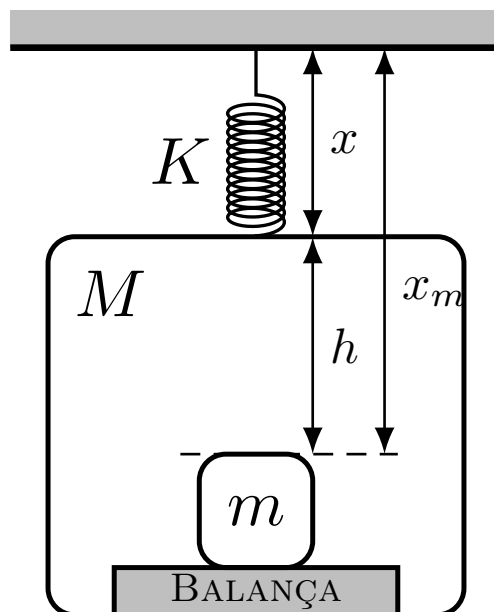


Figura 5: Representação da balança dentro de uma caixa acoplada a uma mola.

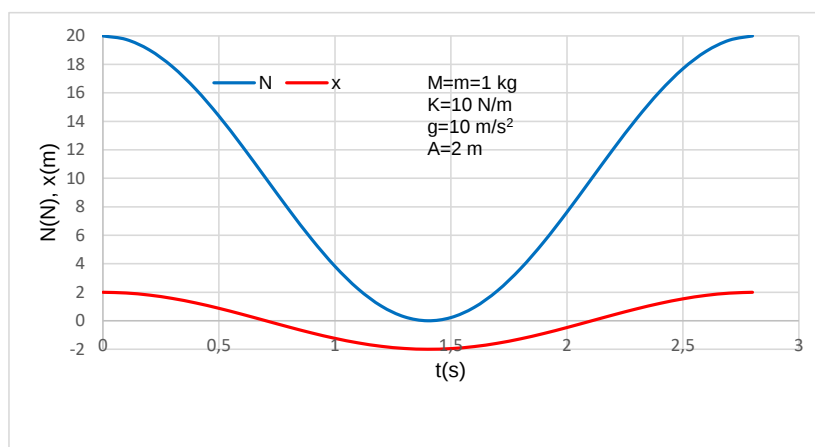


Figura 6: Força Normal e deformação da mola em função do tempo para uma oscilação completa.

a aproximação $N \approx 0$ na posição $x = -A$. Dessa forma, podemos escrever que

$$mg = ma_{max} \quad (24)$$

$$g = \omega^2 A \quad (25)$$

e, portanto,

$$A = M'g/K \quad (26)$$

No instante $t = 0$, para essas constantes escolhidas, temos o valor máximo da leitura da balança $N = 20N$, que representa o dobro do peso real do corpo. No instante de tempo igual à um quarto do período do movimento $t = T/4$ a leitura na balança se iguala ao peso real do corpo, uma vez que a mola se encontra na posição de equilíbrio $x = 0$. No instante de tempo $t = T/2$, ou seja, quando a mola está no ponto de compressão máxima, o peso aparente do corpo é zero. Neste instante o corpo está na iminência de deslizar e a leitura da balança deve ser zero. Logo depois, no retorno à posição de equilíbrio, a balança produz novamente leitura diferente de zero e segue repetindo as leituras anteriores conforme percorre o caminho inverso. A dependência pode ser mais bem visualizada na Fig.7, onde apresentamos a força normal e a deformação da mola normalizados em função do tempo, para uma oscilação completa.

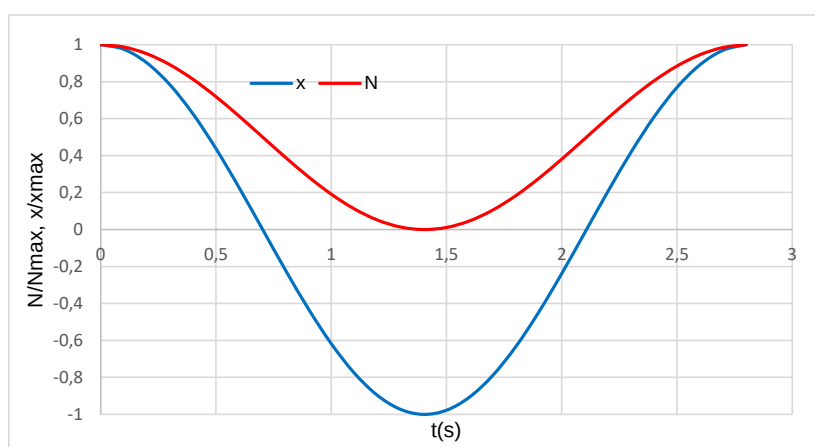


Figura 7: Força Normal e deformação da mola normalizados em função do tempo para uma oscilação completa.

O comportamento da força normal pode ser corroborado pela análise da Fig.8 que apresenta a força normal em função da deformação da mola. Podemos observar o peso aparente máximo na posição $x = A$. Para $x = 0$, o peso aparente se iguala ao peso real, pois a mola se encontra em sua posição relaxada. Quando $x = -A$, na máxima compressão da mola, o sentido do movimento se inverte e o peso aparente se anula.

IV. CÁLCULO DO TRABALHO DAS FORÇAS

Para o primeiro caso apresentado, podemos calcular o trabalho realizado pela força de atrito estático quando o conjunto sai da posição inicial ($x = A$) e vai até a compressão

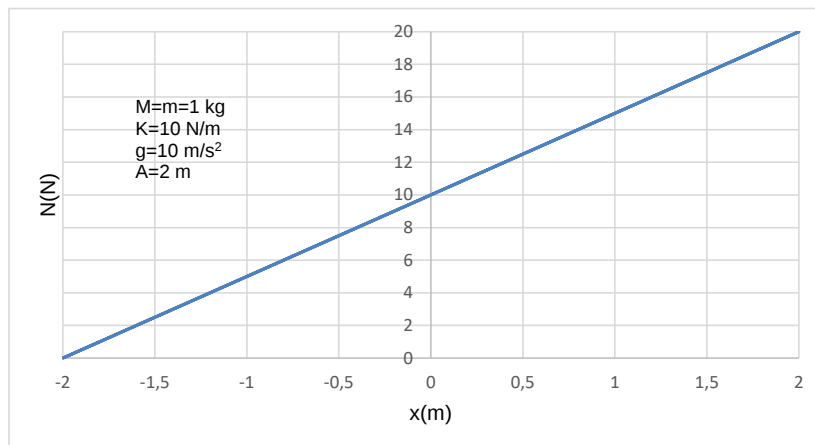


Figura 8: Força Normal em função da deformação da mola para valores específicos da massa, constante elástica, aceleração da gravidade e amplitude de oscilação.

máxima, em $x = -A$. Chamamos esse trabalho de W_{ida} . Seria um erro considerar que esta força é constante durante o percurso, sabemos que ela acompanha a força elástica aplicada ao conjunto e sua dependência deve ser do tipo $-Kx$.

$$W_{ida} = \int_A^{-A} F_{at}^e dx \quad (27)$$

$$W_{ida} = \int_A^{-A} -Kx dx \quad (28)$$

Podemos dividir o caminho entre as amplitudes em duas partes: o primeiro da posição inicial A até o ponto 0, onde a força da mola é nula e o segundo trecho, de 0 até $-A$.

$$W_{ida} = -K \int_A^0 x dx - K \int_0^{-A} x dx \quad (29)$$

$$W_{ida} = K \left(\frac{A^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) + K \left(\frac{0^2}{2} - \frac{-A^2}{2} \right) \quad (30)$$

$$W_{ida} = 0. \quad (31)$$

Pode-se adotar o mesmo procedimento para o caminho inverso, de $-A$ até A , obtendo também um trabalho de volta $W_{volta} = 0$. Ou seja, o trabalho total da força de atrito estático

para o caminho fechado é nulo. Essa é uma característica das forças conservativas, onde toda energia gasta pelo sistema num caminho é devolvida ao sistema no caminho inverso.

$$W_{i \rightarrow f} + W_{f \rightarrow i} = 0. \quad (32)$$

Este resultado implica que, desprezando os atritos externos, não haverá dissipação de energia no sistema analisado. Caso a força de atrito estático fosse constante, ou tivesse outro tipo de dependência espacial, o sistema seria dissipativo e o trabalho para o caminho fechado não seria nulo, implicando num amortecimento do sistema. Porém, o que podemos observar é que toda a energia armazenada na distensão da mola é devolvida à mesma no processo de compressão e isso se estende à força de atrito estático, que como já discutimos, é uma força de contato que reage à forças externas, que neste caso, é uma força elástica.

Para o segundo caso, da balança dentro de caixa, o processo é idêntico. A força normal, que pode ser medida pela leitura da balança, também não é constante e sua dependência deve ser do tipo $-Kx$. Neste caso, calculando os trabalhos de subida e descida da força normal, numa oscilação completa da mola, encontramos também um trabalho nulo para o caminho fechado, indicando que essa força se comporta de maneira conservativa.

Um ponto importante que deve ser notado é que para os dois casos anteriores, tanto a força normal quanto a força de atrito estático, realizam trabalho nos trechos entre as amplitudes e o ponto médio de equilíbrio. Esse trabalho não nulo justifica a variação da energia cinética do conjunto ligado à mola.

V. CONCLUSÕES

Observamos que as forças de contato, tais como a força de atrito estático e a força normal, por possuírem características próprias de resposta às forças externas aplicadas ao sistema, podem se comportar como forças conservativas. Esse comportamento foi observado em dois exemplos em que a força de atrito estático e a força normal se conservavam num ciclo completo de oscilação, desde que alguns vínculos fossem santisfeitos. No primeiro exemplo estudado, verificamos através dos gráficos que, conforme a mola se distende, a força de atrito estático acompanha o módulo da força elástica, de maneira a manter os corpos em contato e sem deslizamento. Dessa forma, a força de atrito responde à inércia do corpo variando seu valor através da relação do tipo $-Kx$, mantendo o sistema em repouso relativo.

É importante salientar que a força de atrito, do ponto de vista microscópico, pode ser representada por uma grande quantidade de interações conservativas entre as moléculas das duas superfícies em contato. O efeito conservativo deixa de existir quando o corpo, mesmo voltando à sua posição macroscópica inicial, se encontra num estado microscópico diferente. Portanto, a força de atrito pode apresentar comportamento conservativo em situações onde não há deslizamento ou em casos bastante particulares, onde a quantidade de moléculas interagentes é pequena o suficiente para que se possa, de forma quase-estática, reconduzir a configuração microscópica ao seu estado original (ALONSO & FINN, 1972).

No segundo exemplo estudado, verificamos que a força normal também responde à oscilação do sistema, de forma a manter o corpo e a balança sempre em contato. Essa dependência também deve ser do tipo $-Kx$, produzindo portanto, uma leitura na balança

que oscila no tempo e, conseqüentemente, um comportamento conservativo para a força normal. Finalmente calculamos o trabalho de ambas as forças num ciclo completo de oscilação. verificamos que o trabalho não é zero em partes isoladas da trajetória dos corpos, o que justifica a variação de energia cinética entre as regiões de amplitude e relaxamento elástico. Porém, quando observamos uma oscilação completa do sistema, o trabalho calculado é zero, o que confirma o caráter conservativo dessas duas forças de contato para esses dois casos específicos.

VI. AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer ao Professor Igor Tavares Padilha por sua contribuição, tanto na revisão do artigo quanto na sugestão de referências.

REFERÊNCIAS

KALAJIAN, P.; MAKAROVA, M. Friction and the Intuition-Outcome Disparity. *The Physics Teacher*, v. 52, p. 172-173, 2014.

KIZILCIK, H. S. *et al.* Possible misconceptions about solid friction. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, v. 17, p. 023107, 2021.

MONGAN S. W. *et al.* Misconception of weights, normal forces and Newton third law. *J. Phys.: Conf. Ser.*, v. 1572, p. 012046, 2020.

J. M. CAMPANARIO. Using counterintuitive problems in teaching physics. *The Physics Teacher*, v. 36, n. 7, p. 439-441, 1998.

SILVA, D. R.; PEIXOTO, P. A força de atrito estático não é conservativa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 1, p. e1303, 2018.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica*, Vol. 2, Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor, 4ª ed., EdgardBlucher2002.

ALONSO, M.; FINN, E.J. *Física - Um curso Universitário*, Vol. 2, 2ª ed., EdgardBlcherLtda., 1972.