Revista do Professor de Física, v. 8, n. 3, p. 94-105, Brasília, 2024.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

Artigo original

Revista do Professor de Física | Ensino de Física

A INVARIÂNCIA DA EQUAÇÃO DA ONDA ELETROMAGNÉTICA SOB TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

THE INVARIANCE OF THE ELECTROMAGNETIC WAVE EQUATION UNDER LORENTZ TRANSFORMATIONS

José Medeiros da Costa Netto [1], Heydson Henrique Brito da Silva[1]

[1]Núcleo de Formação Docente, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru - PE, 55014-900, Brasil

Resumo

A origem da teoria da relatividade especial teve como principal motivação o problema da incompatibilidade entre a mecânica newtoniana e o eletromagnetismo de Maxwell. Isto é, as equações da onda eletromagnética mudam de forma ao se considerar as conhecidas transformações galileanas. Isto é um problema, pois a física não pode ser diferente quando se muda de um sistema referencial para outro. Este empecilho é sanado quando a mecânica relativística é proposta, sendo ela baseada nas transformações de Lorentz. Neste trabalho mostraremos detalhadamente como a equação da onda eletromagnética em sua forma geral é invariante sob transformações de Lorentz, isto é, mostraremos que a forma do operador dAlembertiano não muda sua forma mesmo sem conhecer previamente como os campos se transformam. Antes disso, entretanto, reservamos uma seção para demonstrar que tal equação varia sua estrutura quando as transformações de Galileu são aplicadas. Apesar da importância histórica destes fatos, as derivações mostradas neste trabalho não estão presentes nos principais livros-texto de Física Moderna ou Relatividade Especial, o que permitirá servir como material didático para estudantes de Física.

Palavras-chave: *Invariância da equação de onda. Transformações galileanas. Transformações de Lorentz.*

Abstract

The origin of the theory of special relativity had as its main motivation the problem of incompatibility between Newtonian mechanics and Maxwell's electromagnetism. That is, the electromagnetic wave equations change shape when considering the well-known Galilean transformations. This is a problem, as physics cannot be different when moving from one frame of reference to another. This hindrance is solved when relativistic mechanics is proposed, based on Lorentz transformations. In this work we will show in detail how the electromagnetic wave equation in its general form is invariant under Lorentz transformations, that is, we will show that the form of the dAlembertian operator does not change its form even without previously knowing how the fields transform. Before that, however, we reserve a section to demonstrate that such an equation varies its structure when Galilean transformations are applied. Despite the historical importance of these facts, the derivations shown in this work are not present in the main textbooks of Modern Physics or Special Relativity, which will allow them to serve as didactic material for Physics students.

Keywords: *Invariance of wave equation. Galilean transformations. Lorentz transformations.*

I. INTRODUÇÃO

As transformações de Galileu são (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016; NUSSENSZVEIG, 2014):

$$x' = x - vt, \tag{1}$$

$$y' = y, \tag{2}$$

$$z' = z, \tag{3}$$

$$t' = t. \tag{4}$$

Essas expressões são usadas para relacionar as coordenadas espaço-temporais (x,y,z,t) de um evento que ocorre em um referencial S com as coordenadas correspondentes (x',y',z',t') em um referencial S' que se move a uma velocidade constante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, como mostra a figura 1.

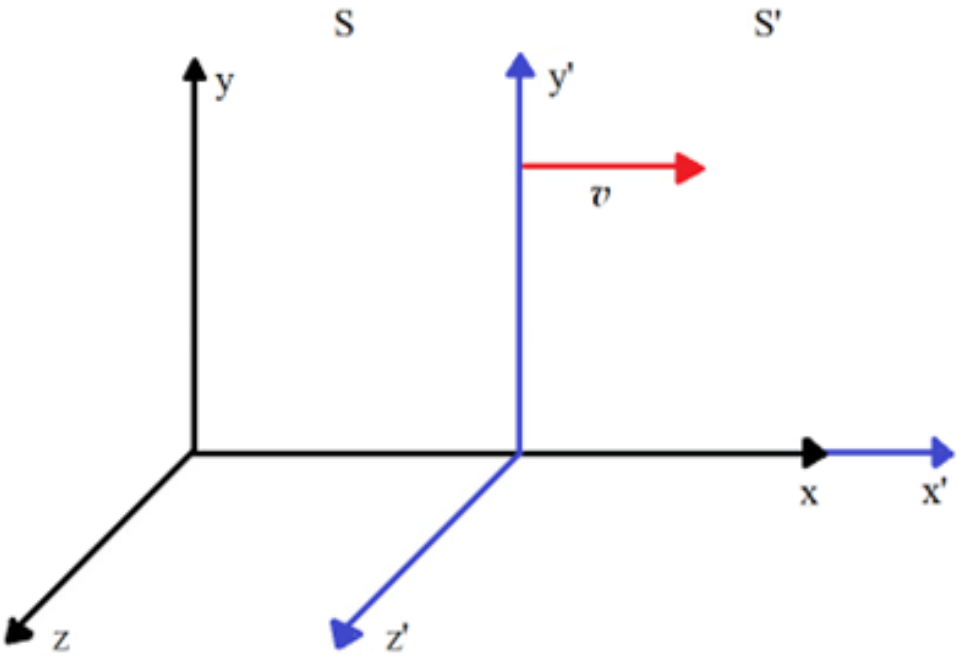

Figura 1: *A representação esquemática dos referenciais S e S′ pode ser utilizada para ilustrar a relação entre as coordenadas espaciais e temporais em diferentes sistemas de referência. Supondo que as origens dos dois sistemas coincidam no instante $t = t' = 0$, é possível, com um pouco de geometria, derivar as equações que relacionam as coordenadas de um evento em S com as coordenadas do mesmo evento em S′. As equações resultantes são: $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$, e $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ é o fator de Lorentz, v é a velocidade relativa entre os referenciais, e c é a velocidade da luz no vácuo. Essas equações, conhecidas como transformações de Lorentz, mostram como as medições de espaço e tempo são influenciadas pelo movimento relativo entre os observadores nos referenciais S e S′.*

Essas equações de transformação geram algumas consequências interessantes. A primeira e mais nítida é que o tempo é absoluto na Física Newtoniana. De fato, como podemos ver, se S mede um intervalo de tempo Δt para um certo evento, S medirá o mesmo intervalo $\Delta t' = \Delta t$. Além disso, pode-se mostrar que $\Delta x = \Delta x'$, o que significa que comprimentos também são absolutos segundo as equações (1)-(4). Além disso, ao derivar duas vezes em relação ao tempo a equação (1), teremos $a' = a$ (a aceleração é invariante), de modo que $\mathbf{F}'_{\text{res}} = \mathbf{F}_{\text{res}}$ pela segunda lei de Newton (todas as grandezas em negrito neste trabalho representam vetores). Essa, talvez, seja a mais importante consequência das transformações de Galileu, pois, uma vez que todas as leis da mecânica derivam das leis de Newton, isso implica que a Mecânica Newtoniana é a mesma para todos os referenciais inerciais. Ou seja, as leis da física devem ser invariantes de forma; isto é, covariantes. Tal resultado, chamado de princípio da relatividade de Galileu, já havia sido mencionado pelo mesmo no seu famoso livro *Diálogos* (SYMON, 1996): Se as leis da Mecânica são válidas em um dado referencial, então são igualmente válidas em qualquer outro referencial que se mova em translação uniforme em relação ao primeiro.

A Mecânica Newtoniana, publicada na famosa obra *Principia* de 1687, tornou-se aos poucos um dos pilares da física. Sua contestação era praticamente impossível devido às

sucessivas comprovações experimentais. No século XIX, a termodinâmica de Boltzmann se juntou à Mecânica Newtoniana para compor as bases da física. O que só restava era unificar os resultados experimentais eletromagnéticos em uma teoria consistente.

Em 1864, James C. Maxwell conseguiu o feito, unificando a eletricidade e o magnetismo nas famosas equações que levam seu nome. No vácuo e na ausência de fontes, as equações de Maxwell são escritas como

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{8}$$

em que **E** e **B** são os campos elétrico e magnético, respectivamente. μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo e ϵ_0 a permissividade elétrica também no vácuo.

Combinando as equações (5)-(8) e usando as propriedades dos operadores vetoriais, teremos (GRIFFITHS, 2011; JACKSON, 1998):

$$\nabla^2 E_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \tag{9}$$

$$\nabla^2 B_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

O subíndice $i = 1,2,3$ representa a i-ésima componente dos campos. Como as equações (9) e (10) têm a mesma forma, podemos trabalhar com apenas uma equação se definirmos uma função Φ, que pode ser tanto E_i como B_i, tal que

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

A equação (11) já era bem conhecida na época de Maxwell: trata-se da equação de uma onda que se propaga no vácuo com velocidade $v = c$, sendo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s} \tag{12}$$

a velocidade da luz no vácuo. Maxwell concluiu, portanto, que a luz é uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, sendo as amplitudes dos próprios campos **E** e **B** que oscilam na perturbação. Esse foi o outro grande feito de Maxwell. Sua teoria foi comprovada poucos anos depois, em 1887, quando Heinrich Hertz gerou ondas eletromagnéticas pela primeira vez.

A equação (11) pode ainda ser escrita na forma

$$\Box^2 \Phi = 0 \tag{13}$$

em que

$$\Box^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{14}$$

é o operador dAlembertiano. O termo usado dá-se em homenagem a Jean le Rond d'Alambert, físico francês que deu importantes contribuições para a ondulatória. É comum utilizarmos o sistema de unidades naturais, em que se define $c = 1$. Assim, a equação (14) pode ser conhecida com essa leve modificação.

Uma pergunta natural que surgiu na época foi: se as transformações de Galileu valem para a mecânica, elas também valem para o eletromagnetismo? Era crucial que sim, pois, como comentamos, a Mecânica Newtoniana era um dos pilares da física, e contrariá-la não era recomendado. No entanto, a resposta é não! E é isto que iremos demonstrar na seção 2: a equação (11) não conserva sua forma quando submetida às transformações galileanas.

Portanto, a conclusão acima gerou as seguintes possibilidades na época (RESNICK, 1971):

1. A Relatividade Newtoniana existe para a mecânica, mas não para o eletromagnetismo, onde há um sistema inercial preferencial, denominado éter;

2. A Relatividade Newtoniana existe tanto para a mecânica como para o eletromagnetismo, mas as leis apresentadas por Maxwell não são corretas;

3. Um princípio da relatividade (que não seja o de Galileu) existe tanto para a mecânica como para o eletromagnetismo, porém as leis de Newton devem ser reformuladas.

A possibilidade **1** foi desconsiderada quando Albert Michelson, em 1881, e Edward Morley, em 1887, descartaram experimentalmente a existência de um referencial privilegiado como o éter. A possibilidade **2** também foi descartada, já que os experimentos eletromagnéticos concordavam todos com as equações de Maxwell, sem nenhuma exceção. Houve tentativas de se modificar o eletromagnetismo (RESNICK, 1971), mas sem sucesso. Só restou a última possibilidade, e ela foi a que se mostrou correta. Essa demonstração é feita na seção 3, onde mostramos que as transformações de Lorentz, que substituíram as transformações de Galileu, garantem que a equação de onda (12) mantém sua forma ao se mudar de referencial. Esse foi o passo inicial para considerar uma mecânica mais geral do que a Mecânica Newtoniana: a mecânica relativística. Isso, por incrível que pareça, não foi feito formalmente na maioria dos livros-textos específicos e/ou de física moderna, tais como Brehm e Mullin (1989), Caruso e Oguri (2006), Resnick (1971), Tipler e Llewellyn (2014) dentre outros.

No trabalho de Felipe e Veloso (2022) há uma abordagem semelhante ao que propomos aqui, onde eles fazem uma discussão geral sobre a invariância da equação de onda sob transformações de Lorentz. Os autores utilizam, previamente, as transformações relativísticas dos campos E e B para demonstrar (de modo superficial) a invariância da equação (12). Nós, porém, propomos uma abordagem mais geral e rigorosa, no sentido de que não precisamos conhecer previamente a relação entre os campos para determinar a invariância da equação de onda. Historicamente foi isso que aconteceu. As transformações relativísticas entre os campos elétrico e magnético foram propostas num momento posterior.

Também devemos mencionar que o artigo de Silva Filho e Ferreira (2023) possui uma motivação parecida com a deste trabalho. Entretanto, lá os autores mostram que as equações

de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz por meio de ideias simples de cálculo diferencial e integral. Eles fazem isso como alternativa ao tradicional método que utiliza cálculo tensorial, conteúdo (quase) nunca visto em cursos de graduação de física.

Por fim, nas conclusões, explicamos que fazer tal demonstração é importante no sentido que a Teoria da Relatividade Especial (TRE) surgiu justamente da inquietação de Albert Einstein com o fato da equação da onda eletromagnética não manter sua forma sob transformações de Galileu. Isso o fez dar significado físico às equações que levam o nome do físico neerlandês Hendrik Lorentz.

II. A EQUAÇÃO DE ONDA E AS TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU

Como dito anteriormente, usamos as definições de divergente e rotacional de um vetor nas equações de Maxwell para chegar nas equações da onda eletromagnética no vácuo. Elas foram generalizadas na equação (11) tomando uma função de amplitude $\Phi = \Phi(x,y,z,t)$ que pode ser tanto uma componente do campo elétrico quanto do campo magnético.

Considere que, numa mudança de referencial de S para S', obtemos $\Phi = \Phi(x',y',z',t')$. Vamos, separadamente, determinar as componentes retangulares do laplaciano e a segunda derivada parcial de Φ com relação ao tempo levando em consideração as equações de transformação de Galileu. Inicialmente temos, pela regra da cadeia para diferenciações parciais:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}(x - vt) + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial x} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \tag{17}$$

Derivando novamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} \tag{20}$$

Por sua vez, a derivada parcial da função de amplitude com relação a y é:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y} \tag{21}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y}(x - vt) + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial y} \tag{22}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \tag{23}$$

Dada a simetria das transformações de Galileu para os eixos perpendiculares ao movimento relativo, concluímos que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}. \tag{24}$$

Analogamente, para a segunda derivada parcial de Φ com relação a z, temos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} \tag{25}$$

Nos sistemas S e S', o laplaciano em coordenadas retangulares é definido, respectivamente, como:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{26}$$

$$(\nabla')^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} \tag{27}$$

Assim, podemos observar pelas relações obtidas que

$$\nabla^2 \Phi = (\nabla')^2 \Phi \tag{28}$$

Agora vamos determinar a segunda derivada parcial de Φ em relação a t:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}(x - vt) + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t}{\partial t} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -v\frac{\partial \Phi}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} = \frac{\partial \Phi}{\partial t'} - v\frac{\partial \Phi}{\partial x'} \tag{31}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right) - v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right) \tag{32}$$

Como o tempo é absoluto na Física Newtoniana, derivar em relação a t é equivalente a derivar em relação a t'. Logo,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} - v\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} \tag{33}$$

Substituindo as equações (28) e (33) na equação (11), teremos finalmente:

$$(\nabla')^2\Phi - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - v\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'\partial x'}\right) = 0 \tag{34}$$

$$(\nabla')^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} = -\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'\partial x'} \tag{35}$$

Nota-se, assim, que a equação (35) não tem a mesma forma que a equação (11), pois um termo cruzado aparece do lado direito da primeira. Isso nos permite afirmar que a equação da onda eletromagnética não conserva sua forma sob transformações galileanas. Em outras palavras, o operador dAlembertiano da equação (14) muda sua forma sob transformações de Galileu.

Este resultado foi e ainda é profundamente impactante. O fato das equações de transformação de Galileu não conservarem o formato da equação de uma onda eletromagnética, implica que tais expressões não demonstram corretamente as relações entre as coordenadas de dois eventos em referenciais inerciais em movimento relativo. Isto foi um motivador crucial para que uma nova teoria da relatividade fosse proposta, levando em consideração os resultados da experiência de Michelson-Morley e o fato da equação (35) ser uma igualdade matematicamente consistente. Esta nova teoria precisaria ser tal que as equações de transformação entre referenciais conservassem o formato da equação (11). Como bem sabemos, Albert Einstein foi quem primeiro sugeriu tal teoria, a teoria da relatividade especial, em seus artigos de 1905, mostrando que as já existentes equações de transformação de Lorentz eram as que relacionavam corretamente as coordenadas espaço-temporais entre dois referenciais S e S. Mostraremos a seguir que elas mantêm o formato da equação da onda eletromagnética quando são devidamente aplicadas.

III. A EQUAÇÃO DE ONDA E AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Considerando a mesma situação representada pela Figura 1, as transformações de Lorentz são dadas por (**??**),

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{36}$$

$$y' = y \tag{37}$$

$$z' = z \tag{38}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{39}$$

em que

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{40}$$

é o fator de Lorentz. Vamos, inicialmente, determinar a primeira derivada parcial de Φ em relação a x levando em consideração as transformações de Lorentz e derivar novamente o resultado para obter a segunda derivada parcial dessa função em relação a essa variável, que é o que nos interessa. Assim, derivando uma vez, temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \tag{41}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}[\gamma(x - vt)] + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right] \tag{42}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \gamma\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t'} \tag{43}$$

Derivando novamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right) - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right) \tag{44}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = {} & \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} + \\ & + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial t'}{\partial x} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial x'}{\partial x} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial y'}{\partial x} - \\ & - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial z'}{\partial x} - \gamma\frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial x}\end{aligned} \tag{45}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \gamma^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - \gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'\partial x'} - \gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \tag{46}$$

Assumindo que $\Phi = \Phi(x', y', z', t')$ é uma função bem comportada, então podemos invocar o teorema de Clairaut[1] e afirmar que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'\partial x'} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'\partial t'} \tag{47}$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \gamma^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} \tag{48}$$

As transformações de Lorentz, assim como as transformações de Galileu, guardam uma simetria para os eixos y e z dos dois referenciais. Assim, podemos usar os resultados das equações (24) e (25) para as outras duas componentes espaciais. Vamos, por fim, determinar a segunda derivada parcial de Φ com respeito a t. Realizando inicialmente a primeira derivada, temos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \tag{49}$$

[1] O teorema de Clairaut estabelece que, caso uma função, digamos, $f = f(x,y)$ não possua descontinuidades, então $f_{(xy)} = f_{(yx)})$ em que $f_{(xy)}$ é a derivada parcial de f com relação à y com relação à x (STWART, 2013).

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma(x-vt)\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)\right] \tag{50}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\gamma v\frac{\partial\Phi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial t'} = \gamma\frac{\partial\Phi}{\partial t'} - \gamma v\frac{\partial\Phi}{\partial x'} \tag{51}$$

Derivando mais uma vez,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = \gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right) - \gamma v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right) \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = {} & \gamma\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial y'}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial z'}{\partial t} + \\ & + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t} - \gamma v\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} - \gamma v\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial y'}{\partial t} - \\ & - \gamma v\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial z'}{\partial t} - \gamma v\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}\end{aligned} \tag{53}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} - \gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'\partial x'} \tag{54}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - \gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'\partial x'} - \gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} \tag{55}$$

Segundo o teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} \tag{56}$$

Substituindo as equações (24) e (25) e as equações (48) e (56) na equação (11), chegamos finalmente a:

$$\gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - \frac{1}{c^2}\left(\gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - 2\gamma^2 v\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2 v^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2}\right) = 0 \tag{57}$$

$$\gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} - 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} - \frac{1}{c^2}\gamma^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} + 2\gamma^2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'\partial t'} - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} = 0 \tag{58}$$

$$\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} - \gamma^2\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} = 0 \tag{59}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t'^2} = 0 \tag{60}$$

$$\left(\nabla'\right)^2 \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = 0 \tag{61}$$

Esse resultado destaca a invariância da equação da onda eletromagnética na forma apresentada na equação (14) sob transformações de Lorentz. Isso fez com que uma nova mecânica, a mecânica relativística, fosse plenamente desenvolvida. Apesar de Einstein ter sido seu principal contribuinte, devemos ser justos e mencionar que não há uma concordância entre os historiadores da ciência sobre se ele conhecia ou não os resultados do experimento de Michelson-Morley e até que ponto, caso os conhecesse, eles o motivaram na concepção da Teoria da Relatividade Especial (PIRES, 2011).

É importante notar que não é necessário, em momento algum, explicitar as transformações relativísticas dos campos elétrico e magnético para demonstrar que o operador dAlembertiano mantém sua forma mediante as transformações de Lorentz.

IV. CONCLUSÃO

A demonstração aqui apresentada é o grande ápice alcançado pelas transformações de Lorentz, tanto historicamente quanto fisicamente. Dizemos isso porque a Teoria da Relatividade Especial (TRE) só pôde ser desenvolvida devido ao fato de que as equações de transformações de Galileu não preservam o formato da equação da onda eletromagnética. Esse problema poderia ter sido contornado caso o experimento de Michelson-Morley comprovasse que a Terra se move relativamente a um meio preferencial, o éter, onde a luz se propaga com velocidade c. Como sabemos, os resultados obtidos por Michelson e Morley corroboraram essa ideia: não há evidência física que sustente a hipótese do éter.

Nas tentativas de modificar o eletromagnetismo de Maxwell, as chamadas teorias de emissão propuseram que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética depende do movimento da fonte. Entretanto, as observações de Willem de Sitter sobre estrelas binárias e os experimentos de Tomaschek-Miller comprovaram que a hipótese básica das teorias de emissão estava errada. Logo, não há alternativa: devemos aceitar a limitação das transformações de Galileu e, consequentemente, a incompletude da Mecânica Newtoniana e também a comprovação do eletromagnetismo. Disso surge a relatividade restrita e os seus postulados básicos, que foram fundamentais não só para derivar de uma forma alternativa as transformações de Lorentz, mas também dar significado físico a elas. Mostramos aqui que ao passar pelo mesmo teste que as transformações galileanas, tais equações não falham, evidenciando sua completude.

Por fim, acreditamos que este trabalho, por mais que se trate da demonstração de um resultado já previsto, é importante do ponto de vista que instiga alunos de graduação a buscarem mostrar por si próprios resultados que a maior parte das bibliografias utilizadas nos cursos de Física Moderna e Relatividade Especial não mostram em seu texto. Explicitar estes cálculos, acreditamos, deixa os/as alunos/as mais propícios a se aventurarem em problemas um tanto mais complexos e que exijam uma certa maturidade que pode ser alcançada aos poucos com esse espírito de redescoberta.

Referências

BREHM, J. J.; MULLIN, W. J. *Introduction to the structure of matter*: a course in modern physics. New York: John Wiley and Sons, 1989.

CARUSO, F.; OGURI, V. *Física Moderna*: Origens Clássicas e Fundamentos Quânticos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

FELIPE, J.; VELOSO, V. Um Estudo sobre a Equação da Onda Eletromagnética e a sua (não) Invariância sob Transformações de Galileu (Lorentz). *Revista do Professor de Física* v.6, n. 3, p. 101-118, 2022.

GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. 3ª ed. São Paulo: Pearson, 2011.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: Mecânica*. 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 3ª ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 1998.

NUSSENSZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica 2*: Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 5ª ed. São Paulo: Blucher, 2014.

PIRES, A. *Evolução das ideias da física*. 2ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

RESNICK, R. *Introdução à Relatividade Especial*. São Paulo: Edusp, 1971.

SILVA FILHO, O. L.; FERREIRA, M. Invariância das equações de Maxwell por transformações de Lorentz: pontes conceituais via derivação como alternativa ao cálculo tensorial. *Revista Brasileira de Ensino de Física* v. 45, p. e20230231, 2023.

STEWART, J. *Cálculo*: volume 2. 7ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SYMON, K. R. *Mecânica*. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1996.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.