Revista do Professor de Física, v. 6, n. 3, p. 101-118, Brasília, 2022.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

Artigo original

Revista do Professor de Física

Ensino de Física

Um Estudo sobre a Equação da Onda Eletromagnética e a sua (não) Invariância sob Transformações de *Galileu* (*Lorentz*)

A study about the Eletromagnetic Wave Equation and its (non) Invariance by Galileo (Lorentz) Transformations

Jean Carlos Coelho Felipe[1], Vanessa Soares Veloso[1]

[1]Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - UFVJM - Campus Janaúba

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a demonstração de que a Equação da Onda Eletromangética é invariante sobre Transformaçãoes de Lorentz mas é não invariante quando submetida às Transformações de Galileu. Para um melhor entendimento, serão discutidos alguns conceitos oriundos da Teoria da Relatividade Restrita (TRR) e aplicações diretas desses conceitos (Transformações de Lorentz). Também será apresentado uma breve dicussão sobre as Transformações de Galileu bem como a dedução da Equação da Onda Eletromagnética, partindo da formulção diferencial das Equações de Maxwell.

Palavras-chave: *Teoria da Relatividade Restrita. Transformações de Lorentz. Transformações de Galileu. Equação da Onda Eletromagnética. Invariância de Galileu e Lorentz.*

Abstract

The present work aims to present the demonstration that the Electromagnetic Wave Equation is invariant on Lorentz Transformations but is non-invariant when submitted to Galileo Transformations. For a better understanding, some concepts from the Theory of Restricted Relativity (TRR) and direct applications of these concepts (Transformations of Lorentz) will be discussed. A brief discussion about the Galileo Transformations will also be presented, as well as the deduction of the Electromagnetic Wave Equation, starting from the differential formulation of the Maxwell Equations.

Keywords: *Restricted Relativity Theory. Lorentz Transformations. Galileo Transformations. Electromagnetic Wave Equation. Galileo and Lorentz Invariance.*

I. Introdução

Desde muito cedo na história da Física, o caráter relativista das leis físicas que regem o movimento é conhecido. Porém, esse contexto teve início com *Aristóteles*, onde o mesmo, em suas observações, imaginava um esquema de física completo, desenvolvido para um universo onde a Terra permanecia no centro e em repouso em relação aos demais corpos celestes (COHEN, 1967). Como já era algo bem estabelecido, mudar o pensamento de que, agora, a Terra estaria em movimento, necessitaria de argumentos bem incisivos, afim de derrubar uma teoria já bem estabelecida.

Cabe salientar aqui que a própria igreja católica à época, concordava com tal pensamento, uma vez que o mesmo ia de encontro ao que é narrado pelos textos bíblicos, que colocam o homem como o centro de toda a criação divina. Uma vez que o homem estava na Terra, nada mais natural que a mesma estivesse no centro do universo. Tal modelo, formalizado do ponto de vsita matemático por *Ptolomeu*, permaneceu válido por vários séculos como modelo cosmológico dominante (FRANCISCO, 2020). Modelos posteriores ao geocêntrico, que conseguiam explicar melhor a mecânica celeste eram sumariamente refutados pela igreja à época, sendo aquelas pessoas que defendiam tais pensamentos eram classificadas como hereges, sendo condenados pela Santa Inquisição as mais variadas penas, inclusive a morte, como ocorreu com *Giordano Bruno* à época (RIOGA, 2021)

Posteriormente, tais ideias foram refutadas por meio do estudo do movimento dos corpos celestes, onde *Nicolau Copérnico* observou que as leis que regem tais movimentos seriam melhor descritas se o Sol fosse tomado como objeto central, estando os demais planetas do Sistema Solar girando ao seu redor, ao contrário do que sustentava o modelo aristotélico, o qual considerava a Terra como centro do Universo (NUSSENZVEIG, 2006a). Cabe salientar que muitas das ideias de *Copérnico* se encaixavam nos paradigmas de outro famoso astrônomo e cientista da época, *Ptolomeu*. Importante ressaltar que o sistema proposto por *Copérnico* serviu como base para os paradigmas propostos por cientistas posteriores a ele (COHEN, 1967).

Um destes cientista (pós-*Copérnico*) foi *Galileu Galilei*, o qual foi o primeiro a introduzir o telescópio como objeto de observação científica, lançando as bases para uma nova física. O mesmo havia introduzido o conceito de movimento relativo, o que implicava que as leis da mecânica, num dado referencial, seriam igualmente equivalentes em um segundo referencial, que se move com velocidade constante em relação ao primeiro (NETO, 2010). Na sequência, *Johannes Kepler* vem estabelecer bases sobre o movimento planetário, o qual já havia sido percebido por outros cientistas, como por exemplo, *Tycho Brhae*, como a órbita elíptica dos planetas ao redor do sol, a lei das áreas e a lei dos períodos bem como outras características do movimento planetário. Importante salientar que o próprio *Kepler*, que gozava de grande prestígio do clero à época, foi reticente inicialmente à ideia de que o movimento planetário fosse governado por órbitas elípticas e não por órbitas círculares, como previa *Copérnico*. Apesar de acreditar na hipótese círcular proposta pelo último, ele também acreditava nos dados observacionais obtidos pelo seu antecessor, *Tycho Brhae*, o que talvez tenha o encorajado mais a derrubar a ideia que as órbitas dos planetas deveriam ser combinadas em círculos, bem como o fato de que a órbita da Terra era quase circular, segundo os dados observacionais analisados por *Kepler* (KEPLER, 1969).

Outro ponto importante é que os resultados de *Kepler* não foram bem aceitos à época pelos adeptos de *Copérnico*. Basta observar que entre o ano da publicação destes resultados (1619) e o de publicação dos *Princípia*, de *Isaac Newton* (1687), muito pouco se é falado sobre as leis de *Kepler*. O próprio *Galileu*, que tinha em mãos uma cópia do trabalho de *Kepler* e já tinha conhecimento sobre a possibilidade das órbitas elípticas, nunca fez nenhuma menção em seus trabalhos científicos às leis de *Kepler*, seja concordando ou refutando o mesmo, o que se deve em parte ao seu pensamento ainda *Copernicano*, ainda preso à crença da circularidade das órbitas dos planetas (COHEN, 1967).

Por fim, seguindo essa linha clássica, no ano da morte de *Kepler* surge *Isaac Newton* e com ele uma nova descrição sobre o movimento dos corpos de maneira geral. Devido a um grande número de situações, onde a formulação newtoniana funcionava perfeitamente, as conhecidas Leis de *Newton* para o movimento dos corpos prevaleceram irrefutáveis por quase 200 anos! (NETO, 2010; COHEN, 1967).

Porém, ao final do século XIX, começaram a surgir situações onde as leis de *Newton* não previam os resultados para determinados fenômenos físicos, no sentido de que as predições teóricas e experimentais dos mesmos não convergiam. O "divisor de águas"entre a Física Clássica e a Física Moderna foi decorrente dos estudos envolvendo a radiação eletromagnética (sua natureza e forma de propagação). *Alber Einstein* teve papel importante nessa discussão, por meio de seus trabalhos sobre o efeito fotoelétrico e o movimento *browniano*, pilares para um discussão profunda e para o desenvolvimento da Física Quântica (MEDEIROS, 2005) [1]. Nesse sentido, a discussão sobre a validade da teoria corpuscular, muito bem elaborada por *Newton*, porém refutada tanto pela óptica quando pela eletrodinâmica dos corpos em movimento, a descrição de modelos em física via teoria cinético-molecular bem como a descrição da radiação em cavidade (a qual estuda o comportamento da ra-

[1]Se o rumo a ser tomado for no sentido de entender como se dá a interação da radiação eletromagnética com a matéria, acabamos por seguir o caminho rumo aos primórdios da Física Quântica, com a discussão da radiação de corpo negro, que perpassa por *Planck*, embora tenha sido o *Kirchoff* o primeiro a discutir essa questão.

diação eletromagnética em equilíbrio térmico) foram alguns dos pilares que levaram ao desenvolvimento da TRR (para maiores detalhes, *vide* (JANSSEN; STACHEL, 1995)).

Desde muito cedo (por volta de seus 17 anos), *Einstein* questionava a existência do éter, tendo escrito um texto onde o éter atuava como intermediador dos fenômenos eletromagnéticos e ópticos (RENN, 2004). Outro ponto importante que ele questionado pelo mesmo à época é, como pareceria uma onda eletromagnética, para um observador em um referencial onde o próprio movesse com a velocidade da luz na direção de propagação da onda. São estes pequenos *Gedankenexperiment* que levantam a questão de qual seria a velocidade da luz medida por um determinado observador. Toda essa discussão perpassa por qual seria o modelo a ser adotado para o éter, ou seja, considerando o mesmo em repouso, não sendo arrastado pelo sistema em movimento ou pelo observador, a velocidade da luz pelo sistema em movimento deveria sempre alterar-se. (EINSTEIN, 1895; EINSTEIN, 1982)

Assim como todas a mudanças conceituais importantes ocorridas na Física no final do século XX tiveram origem em problemas na fronteira da física clássica, a Teoria da Relatividade também surgiu nesse sentido, onde *Einstein* se perguntou como uma onda eletromagnética seria vista por um observador viajando à velocidade da luz. Tal questionamento serviu como embasamento para a discussão sobre o éter, ou seja, considerando um referencial em repouso (éter), a velocidade da luz relativa a um referencial em movimento deveria sempre sofrer alterações (RENN, 2004). Tal hipótese da exigência de um meio para a propagação da luz (éter luminífero) acabou caindo por terra com os experimentos de *Michelson-Morley*, onde percebeu-se que a luz não necessitava de um meio material para se propagar (MICHELSON; MORLEY, 1887). Assim, diante destes acontecimentos, no ano de 1905, *Einstein* formulou a Teoria da Relatividade (PIATELLA, 2020).[2]

Assim, dessa formulação viu-se que, para velocidades próximas à da luz, certos fenômenos já bem estabelecidos do ponto de vista da mecânica newtoniana sofriam modificações como, por exemplo, o efeito da contração do espaço e da dilatação do tempo. De posse desse novo ferramental foi possível explicar o problema do decaimento do *múon*, o qual, só foi possível devido aos conceitos introduzidos pela Teoria da Relatividade Restrita (NUSSENZVEIG, 2006b). Importante ressaltar que, ao tomarmos o limite para velocidades baixas (muito menores do que c), a física volta a ser explicada segundo a mecânica newtoniana ou, do ponto de vista mais abrangente, da Mecânica Clássica (NUSSENZVEIG, 2006a) [3].

O presente trabalho está divido da seguinte forma. Na Seção 2 será feita uma revisão sobre as Transformações de *Lorentz* e *Galileu*, que são tópicos importantes para o entendimento da ideia central do trabalho. Compreendidos esses conceitos e suas consequências, na Seção 3 será apresentado o resultado principal o qual, partindo da dedução das expressões para a equação da onda eletromagnética (em termos do campo elétrico $\vec{E}$ e do campo magnético $\vec{B}$), será demonstrado que a equação da onda eletromagnética é não-invariante por Transformações de *Galileu* e tem sua invariância preservada do ponto de vista das Transformações de *Lorentz*. Na Seção 4 serão feitas as considerações finais sobre o trabalho. Saliento aqui que este artigo baseia-se nos resultados obtidos no Trabalho de Conclusão de

[2]Em 1905 foi formulada a Teoria da Relatividade Restrita a qual não englobava aspectos gravitacionais. Esse aspecto foi abordado 10 anos mais tarde, no ano de 1915, por meio da Teoria da Relatividade Geral.

[3]Obviamente, trata-se apenas de uma adequação do modelo matemático, não implicando que a Teoria da Relatividade tenha nascido das limitações da Física Clássica (modelo *newtoniano*).

Curso, recentemente produzido, o qual versa sobre o conteúdo a ser descrito no corpo desse trabalho (para maiores detalhes, vide (VELOSO, 2019).

II. Referencial Teórico

Nessa seção serão apresentados conceitos e resultados importantes para o entendimento do trabalho como um todo.

II.1. Transformações de *Lorentz*

Na tentativa de explicar o insucesso da detecção do éter, *Lorentz* inseriu um fator de contração γ dos corpos causado pelo éter, o que resolveu o fato de haver uma inobservância do movimento da Terra em relação ao éter (M. C. Baldiotti, 2019). Este fator de contração foi reinterpretado da teoria de *Lorentz* por *Einstein* para corrigir as transformações de *Galileu*, e dessa forma, a coordenada temporal foi inserida nas transformações de *Galileu*, o que resultou na incrível compatibilidade com os postulados da TRR.

Cabe salientar que até mesmo as leis de transformação para um referencial que se move, a partir da leis de um referencial em repouso também já haviam sido deduzidas por *Lorentz* no ano de 1895, de forma aproximada e, posteriormente, em 1889, agora de forma exata. Apenas em 1904, ele conseguiu apresentar uma teoria bastante sólida que conseguiria explicar toda a teoria sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento (JANSSEN; STACHEL, 1995). Posteriormente, quem denominou tais transformações de Transformações de *Lorentz* foi o *Henri Poincaré*, que obsevara que a teoria de *Lorentz* conseguia abarcar todos os fenômenos que ficaram amplamente conhecidos na TRR (contração espacial e dilatação temporal), bem como o aumento da massa de um observador à medida que sua velocidade fosse aumentando, apesar de que, na interpretação de *Lorentz*, que diferia um pouco daquela dada no contexto da TRR, as transformações de *Galileu* continuariam verdadeiras, porém garantindo o princípio da relatividade apenas a nível de mecânica clássica (RENN, 2004). No fundo, para *Lorentz*, suas transformações não eram uma substituição àquelas da mecânica clássica, e sim um complemento às mesmas. Sua teoria também teve papel importante no que tange o refutar da teoria do éter luminífero, que para a teoria de *Einstein*, ao contrário da interpretação de *Lorentz*, não apresentava relevância alguma.

O multiplicador constante γ aplicado nas transformações de *Galileu* provoca transformações nos referenciais entre os quais existe um movimento relativo. A exemplo disso, vamos imaginar dois referenciais S e S' (com S' se movendo com velocidae constante em relação a S) passíveis de sofrerem transformações de *Galileu*, que estejam em um mesmo tempo $t = 0$ e posição inical $x_0 = 0$ (origens coincidentes). A partir de um determinado instante, o referencial S' começa a se mover com velocidade v constante em relação ao referencial S. A Figura 1 nos auxilia a visualizar como essa transformação acontece (note que o evento ocorre ao longo do eixo x apenas, logo, as coordenadas y e z não sofrem nenhum efeito oriundo da transformação). Esta transformação, do ponto de vista da TRR, é descrita inserindo o fator de contração γ de *Lorentz* (TIPLER, 2014; ROCHA; MOTA, 2013). Se S' se move ao longo de x temos que

$$S' \rightarrow \quad x' \quad = \quad \gamma(x - vt). \tag{1}$$

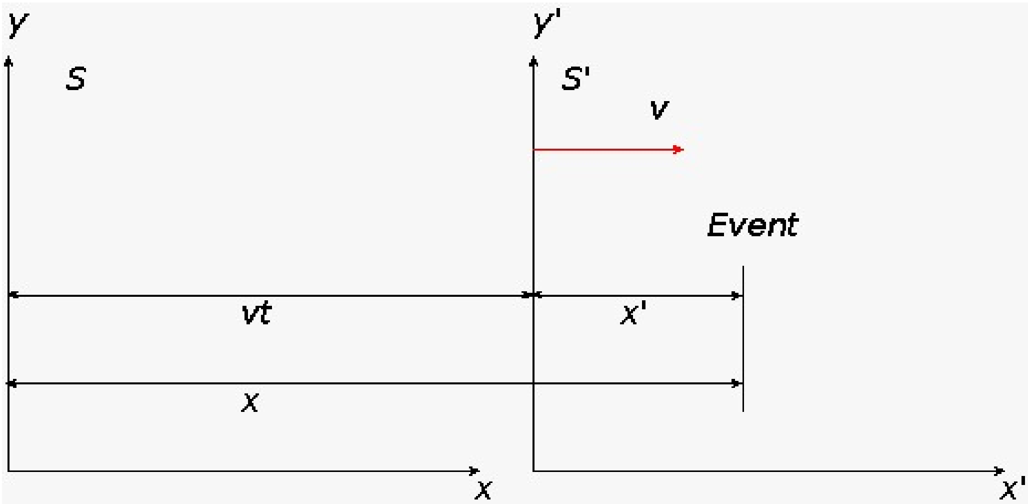

Figura 1: *Esta é a figura que representa a transformação de um referencial S para um referencial S′ causada por uma aceleração sofrida pelo referencial S, que se move ao longo do eixo x.*

Uma vez que as leis da física são as mesmas para todos os referenciais, pode-se escrever o resultado

$$\begin{aligned} S \rightarrow x &= \gamma(x' + vt') && (2)\\ y' &= y && (3)\\ z' &= z. && (4) \end{aligned}$$

Para a coordenada temporal, o fator γ afeta as transformações quando trocamos as coordenadas do referencial t para o referencial t'. Substituindo a equação (1) na equação (2) é possível mostrar que a introdução do fator γ de fato modifica a coordenada temporal da forma

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) && (5)\\ x &= \gamma(x' + vt'), && (6) \end{aligned}$$

sendo tal alteração uma das consequências cinemáticas das Transformações de *Lorentz* (TL). Mas por enquanto, vamos demonstrar quantitativamente como é possível por meio da TL, obeter a relação entre as coordenadas t (referencial em repouso) e t' (referencial em movimento). Para isto, tomamos as equações (5) e (6) relacionadas aos referenciais S e S', respectivamente, e substituímos a equação (5) na equação (6):

$$\begin{aligned} x &= \gamma[(\gamma x - \gamma vt) + vt'] && (7)\\ x &= \gamma[(\gamma - \gamma vt) + \gamma vt'] && (8)\\ x &= \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt'. && (9) \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em isolar a variável t' na equação (9). Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \gamma v t + x &= \gamma^2 x + \gamma^2 v t, & (10) \\ \gamma v t' &= x - \gamma^2 x + \gamma^2 v t, & (11) \\ t' &= x\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right) + \gamma t. & (12) \end{aligned}$$

Para dar continuidade à demonstração, precisamos encontrar o valor da constante γ que aparece ao longo das equações anteriores ((1) a (12)). Para isso, aplica-se o postulado que versa sobre o princípio da constância da luz, o qual nos diz: Imagine que um feixe de luz seja emitido no tempo $t = t' = 0$ e a partir do ponto $x = x' = 0$, quando esse feixe atinge os referenciais $S(x,t)$ e $S'(x',t')$. De acordo com *Einstein*, o feixe viaja com a mesma velocidade nos dois referenciais. Isso quer dizer que no referencial S a luz é $x = ct$, onde c é a velocidade da luz no vácuo, e t o tempo que a luz gastou para percorrer o trajeto. Já em S' a luz vale $x' = ct'$. Agora, substituímos ct na equação (1) e ct' na equação (2), o que leva às seguintes equações

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & (13) \\ ct' &= \gamma(ct - vt). & (14) \end{aligned}$$

Para as coordenadas sem linha, tem-se:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' - vt') & (15) \\ ct &= \gamma(ct' + vt'). & (16) \end{aligned}$$

Assim, substituindo a relação entre t e t' da equação (16) na equação (18) chega-se (após algumas manipulações algébricas) ao seguinte resultado

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{17}$$

o qual apresenta de maneira simples, uma forma de deduzir o fator de contração de *Lorentz*.

Assim, reescrevendo a equação (17) como $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$, onde $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$, temos que o termo entre parênteses na equação (12) pode ser escrito da forma

$$\left(\frac{1-\gamma^2}{\gamma v}\right) = -\frac{\beta^2}{v\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{18}$$

Assim, substituindo a equação (18) na equação (12), chega-se ao resultado

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \tag{19}$$

confirmando que as transformações de *Lorentz* têm relação direta na componente temporal quando realizada uma mudança de coordenadas (TIPLER; MOSCA, 2008). Um comentário importante é que, como neste caso não foi considerado nenhum movimento relativo nas coordenadas (eixos) y e z, as mesmas permanecem inalteradas, não sofrendo alteração alguma da aplicação das TL (M. C. Baldiotti, 2019).

Na próxima Seção, vamos discutir um pouco sobre as Transformações de *Galileu*.

II.2. Transformações de *Galileu*

Para uma determinada lei física existente, faz-se necessário dizer até onde a mesma possui validade. Por exemplo, na tentativa de aplicar a lei da Inércia em um trem acelerado, a mesma certamente falhará. Dado que o movimento está sempre associado a um sistema de coordenadas, faz-se necessário saber para quais sistemas de coordenadas tais equações que descrevem o movimento de um determinado sistema são válidas. Daí surge a necessidade de se introduzir um "Sistema de Referência"que, no caso das leis de *Newton* é o referencial inercial. Uma vez definido o sistema de referência adequado, torna-se possível encontrar uma lei de transformação entre dois ou mais sistemas de referência que sejam equivalentes do ponto de vista das leis físicas.

Como já fora dito, a descrição do movimento do ponto de vista da física clássica baseia-se no conjunto de equações conhecidas como Leis de *Newton* que, por sua vez, estão associadas a um sistema de coordenadas $\vec{r} = (x, y, z)$ e t. Tais equações são invariantes por um grupo de transformações conhecidas por transformações de *Galileu*, traduzidas matematicamente pelas expressões (NUSSENZVEIG, 2006b; HALLIDAY; WALKER, 2012)

$$x \to x' = x - vt, \tag{20}$$

$$y \to y' = y, \tag{21}$$

$$z \to z' = z, \tag{22}$$

$$t \to t' = t, \tag{23}$$

onde a velocidade v é constante. No fundo, tais transformações dão a noção intuitiva de soma e subtração de velocidades. Assim, as transformações de coordenadas entre dois referenciais S e S' são feitas pelas transformações apresentadas nas equações (20), (21), (22) e (23), respectivamente. Tais resultados são importantes para quaisquer referenciais vinculados a essas transformações, uma vez que eles também são referenciais inerciais.

Até o início do século XX, a luz foi considerada uma onda que necessitava de um meio material para se propagar, o que foi mostrado não ser verdade mais tarde por meio do experimento de *Michelson* e *Morley*. Assim, a luz é uma onda eletromagnética que se propaga com velocidade c. Ao realizar uma transformação de coordenadas, descrevendo como se transformam os campos elétrico e magnético de um sistema de coordenadas S para um sistema de coordenadas S', percebeu-se que os mesmos obedeciam às regras da transformação de *Lorentz*, mas não obedeciam às transformações de *Galileu*.

III. Resultados e Discussões

Nesta seção serão apresentados a dedução da equação da onda eletromagnética para os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$, a invariância das mesmas por transformações de *Lorentz*, a não-invariância por transformações de *Galileu*, bem como comentários pertinentes a respeito dos resultados obtidos.

III.1. Dedução da Equação da Onda Eletromagnética

A teoria eletromagnética de *Maxwell* é o resultado da análise do conjunto de quatro equações: A lei de *Gauss*, a lei *Gauss* para o magnetismo, a lei de *Ampère* e a lei de *Faraday* (NETO, 2010).

Lei de *Gauss*

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{24}$$

A lei de *Gauss* determina o fluxo elétrico que atravessa uma determinada superfície fechada.

Lei de *Gauss* para o magnetismo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{25}$$

Esta última equação determina o fluxo magnético através de uma superfície, independente da forma ou do valor do campo $\vec{B}$. O fluxo sempre será nulo, visto que não há ainda a comprovação da existência de monopólos magnéticos.

Lei de *Ampère*

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \tag{26}$$

Tal expressão trata da definição do fluxo de corrente elétrica, que depois de ser corrigida por *Maxwell* se tornou:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t} + \mu_0 I_{int}. \tag{27}$$

A Lei de *Faraday*, expressa pela equação

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}, \tag{28}$$

constata que a variação temporal do campo magnético gera um campo elétrico (NETO, 2010). Com base nestas equações e considerando o vácuo (ausência de fontes externas), é possível determinar a equação da onda eletromagnética.

Seja um campo eletromagnético dado por suas componentes $\vec{E}$ e $\vec{B}$, inserido em uma região do espaço sem cargas e correntes [4] (por exemplo, no vácuo). Afim de simplificar o entendimento, escrevemos as equações de *Maxwell* em sua forma diferencial. Para isso,

[4] Nesse caso, tanto a densiade de carga como a densidade de corrente são nulas.

basta aplicar os teoremas de *Green* e *Stokes* nas formas integrais das equações expressas anteriormente. Fazendo tal operação, chega-se ao conjunto de equações.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \tag{29}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{30}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{31}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{32}$$

Aplicando o rotacional em ambos os lados da equação (31) temos

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}). \tag{33}$$

No lado esquerdo da equação (33) é aplicada a identidade vetorial que diz que o rotacional do rotacional de um campo vetorial é igual ao gradiente do divergente desse mesmo campo vetorial, subtraído do laplaciano do mesmo. Assim, podemos reescrevê-la como

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \tag{34}$$

Agora, da equação (29), vemos que o primeiro termo do lado esquerdo da equação (34) se anula, o que leva ao seguinte resultado

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{35}$$

Note que ao comparar a equação (35) com a equação da onda eletromagnética em sua forma geral, é possível certificar que a velocidade de propagação da onda eletromagnética é igual a velocidade da luz, como pode ser observado na eq. (36).

$$\frac{1}{v^2} = \mu_0 \epsilon_0 \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \tag{36}$$

Portanto, a onda eletromagnética se propaga no vácuo com a velocidade da luz c (NETO, 2010; GRIFFITHS, 2011).

III.2. Não-Invariância da Equação da Onda sob Transformações de *Galileu*

Seja a equação da onda eletromagnética na forma diferencial dada pela seguinte expressão

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \tag{37}$$

ou, trabalhando em termos das componentes do campo elétrico, a mesma pode ser escrita como

$$\nabla^2 E_i - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0, \tag{38}$$

onde o índice $i = 1,2,3$ nos fornece três equações (uma para componente espacial do campo elétrico). Cabe salientar aqui que o mesmo vale para o campo magnético, bastando fazer a substituição de $\vec{E}$ por $\vec{B}$ nas equações (37) e (38), respectivamente.

É correto afirmar que a equação (37) é não-invariante sob transformações de *Galileu*. Para demonstrar, vamos considerar dois referenciais inerciais S e S'. Ora, caso se faça a passagem de um referencial para outro por meio das transformações de *Galileu*, tem-se o seguinte resultado

$$\nabla'^2 \vec{E}(\vec{r'},t') - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r'},t')}{\partial t'^2} \neq \nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}, \tag{39}$$

ou seja, sob uma Transformação de *Galileu*, as equações não permanecem as mesmas. Para demonstrar tal afirmação, basta aplicar as transformações nas coordenadas espacial e temporal do campo elétrico e aplicar as derivadas correspodentes. [5] Para tal, vamos considerar que a transformação ocorra apenas na direção do movimento e que este esteja ocorrendo no eixo correspondente à coordenada x.

A fim de facilitar o entendimento, realiza-se o procedimento nos dois termos da equação (37), mas de forma separada. Primeiro, tomar-se-á a derivada espacial do campo elétrico em relação a coordenada x [6]; na sequência é aplicado a mudança de referencial; em seguida, o mesmo procedimento é feito para a derivada temporal. Finalmente, soma-se a solução compara-se o resultado à equação (37). Do ponto de vista algébrico, tem-se

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} = \frac{\partial E_i}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}. \tag{40}$$

Olhando para equação (20) e (23), observa-se que a derivada de x' com relação à x é 1 e a derivada de x' com relação à t é zero, uma vez que não há dependência em x na transformação para a coordenada temporal. Saliento aqui que foi utilizada a regra da cadeia, uma vez que a coordenada x' depende implicitamente da coordenada x. Dessa forma obtém-se que

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} = \frac{\partial E_i}{\partial x'}. \tag{41}$$

Similarmente, a derivada temporal do campo elétrico será dada pela expressão

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{\partial E_i}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial E_i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}, \tag{42}$$

e, novamente das equações (20) e (23), obtemos que a derivada da coordenada x' com relação

[5] A equação para o campo magnético $\vec{B}$ é obtida de maneira análoga.

[6] Cabe ressaltar que a dependência funcional do campo com as coordenadas é descrita da forma $E_i(x',t') = E_i(x - vt, t)$, sendo as derivadas e a regra da cadeia aplicadas seguindo a relação entre o campo E_i e suas coordenadas independentes

a t será $-v$ e da coordenada t' com relação a t será 1. Assim, obtém-se o seguinte resultado

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = -v\frac{\partial E_i}{\partial x'} + \frac{\partial E_i}{\partial t'}. \tag{43}$$

O próximo passo consiste em tomar a derivada segunda tanto da posição quanto do tempo, partindo dos resultados obtidos nas equações (41) e (43), respectivamente. Para a parte espacial, a segunda derivada será obtida pela expressão

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_i}{\partial x} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_i}{\partial x'\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_i}. \tag{44}$$

De forma análoga, de posse dos resultados das derivadas em relação a x' e t', chega-se na seguinte relação para a derivada de segunda ordem espacial para o campo elétrico

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2}. \tag{45}$$

Da derivada temporal da equação (20), têm-se o resultado

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial E_i}{\partial t}\right)\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial E_i}{\partial t}\right)\frac{\partial t'}{\partial t}. \tag{46}$$

Aplicando o resultado obtido para as derivadas primeiras (equação (43)), chega-se ao seguinte resultado para a derivada segunda do campo elétrico em relação à coordenada temporal

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial t'^2} + v^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial E_i}{\partial t'\partial x'}. \tag{47}$$

Por fim, basta substituir os resultados das equações (45) e (47) na expressão para a equação da onda eletromagnética (equação (20) e, após alguma álgebra, chega-se ao resultado

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} - \mu_0\epsilon_0\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial t'^2} + v^2\frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} - 2v\frac{\partial E_i}{\partial t'\partial x'}\right), \tag{48}$$

o qual claramente mostra a não-invariância da equação da onda eletromagnética (Vanessa, 2019). Importante salientar que os cálculos foram feitos considerando apenas coordenada x, mas o resultado seria completamente análogo para o movimento nas coordenadas y e z. Essa mesma demonstração também é válida para o campo magnético, bastando apenas substituir E_i por B_i na demonstração acima. Percebe-se que a não-invariância da equação (37) ocorre na parte temporal da mesma. Isso acabou por levantar à época a seguinte questão: ou as equações de *Maxwell* não representam leis físicas de fato ou as Transformações de *Galileu* não são as transformações adequadas que fazem com que as leis físicas permaneçam invariantes. Algum tempo mais tarde, dispondo dos cálculos do experimento de *Michelson* e *Morley*, a segunda hipótese foi refutada, o que levou a confirmar que a luz é, de fato, uma onda eletromagnética (não precisando assim de um meio material para se propagar) e que a mesma propaga-se com a velocidade da luz c, levando à necessidade de uma lei de transformação que se adequasse às suas características que, com o advento da TRR, ficaram conhecidas como as Transformações de *Lorentz*.

III.3. Invariância da Equação da Onda sob Transformações de *Lorentz*

Conforme discutido anteriormente, uma vez que as equações de *Maxwell* estavam corretas, se fez necessário encontrar outro conjunto de transformações que deixasse a equação da onda eletromagnética invariante sob as mesmas, mas preservando suas características. Tais transformações existem e são conhecidas como Transformações de *Lorentz*.

A construção dessas transformações ocorre de maneira correlata às transformações de *Galileu*, ou seja, dados dois referenciais S e S', onde o segundo (S') se move com uma velocidade constante em relação ao primeiro (S). De posse desse conceito e, partindo de uma transformação mais geral entre esses referenciais, as transformações de *Lorentz* são construídas e as expressões são escritas da forma que se segue:

$$x' = \gamma(x - vt), \tag{49}$$

$$y' = y, \tag{50}$$

$$z' = z, \tag{51}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \tag{52}$$

Sendo conhecidas as transformações de *Lorentz*, o próximo passo consiste em verificar se a equação (37) é invariante sob as mesmas. A ideia para efetuar essa demonstração é similar à utilizada para trabalhar as transformações de *Galileu*. Partindo das equações (40) e (42), o que vai alterar no resultado são as derivadas de x' com relação à x e de t' com relação à x, bem como a derivada de t' com relação à t, uma vez que agora as leis de transformação são diferentes.

Outro ponto importante a destacar aqui é que, assim como as coordenadas, os campos elétrico e magnético também dependem do referencial adotado de forma que, nesse caso, não podemos considerá-los como um invariante relativístico. Considerando o vetor velocidade $\vec{v} = v\hat{j}$, tem-se que os campos elétrico e magnético se transformam da forma

$$E'_x = \gamma\Big(E_x + vB_z\Big), \tag{53}$$

$$E'_y = E_y, \tag{54}$$

$$E'_z = \gamma\Big(E_z - vB_x\Big), \tag{55}$$

$$B'_x = \gamma\Big(B_x - \frac{v}{c^2}E_z\Big), \tag{56}$$

$$B'_y = B_y, \tag{57}$$

$$B'_z = \gamma\Big(B_z + \frac{v}{c^2}E_x\Big). \tag{58}$$

Na TRR, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dependem do referecial e a covariância da equação da onda ao passar de um referencial para outro, nesse caso, só pode ser vista por meio da mudança tanto dos campos como das coordenadas (NUSSENZVEIG, 2006b). Porém, pode-se realizar os cálculos considerando os campos (e suas componentes) de forma mais geral, como dependentes das coordenadas da transformação, sendo necessário apenas realizar as derivadas em termos das coordenadas, sem precisar derivar os campos efetivamente (mas sempre lembrando que eles também dependem dos parâmetros das transformações de *Lorentz*.

Assim, teremos os seguintes resultados para as derivadas das coordenadas no referencial em repouso (S) em relação às coordenadas no referencial que se move (S')

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \tag{59}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\gamma \frac{v}{c^2}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\gamma v, \tag{61}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma, \tag{62}$$

lembrando que $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$. Substituindo as derivadas das coordendas espaciais e temporais nas expressões (40) e (42), encontram-se

$$\frac{\partial E_i}{\partial x} = \gamma \frac{\partial E_i}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_i}{\partial t'}. \tag{63}$$

e

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} = -\gamma v \frac{\partial E_i}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_i}{\partial t'}, \tag{64}$$

respectivamente. De posse das primeiras derivadas, o passo seguinte consiste em obter as segundas derivadas. Por sorte, as mesmas já foram calculadas, como pode ser visto nas equações (44) e (46). Substituindo os resultados para as derivadas na expressões citadas, obtém-se os seguintes resultados

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_i}{\partial x' \partial t'} \tag{65}$$

e

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\gamma v \frac{\partial E_i}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_i}{\partial t'} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} \left(-\gamma v \frac{\partial E_i}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial E_i}{\partial t'} \right). \tag{66}$$

Após algumas simplificações, a derivada segunda do campo elétrico em função do tempo fica da forma

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = -\gamma^2 v \frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 E_i}{\partial x' \partial t'} - \gamma^2 v \frac{\partial^2 E_i}{\partial t' \partial x'} + \gamma^2 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t'^2}. \tag{67}$$

O último passo consiste em fazer a substituição do resultado das expressões (65) e (67) na expressão (38), cálculo este que nos retorna o seguinte resultado

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_i}{\partial x'^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t'^2}, \tag{68}$$

que nos mostra que, de fato, a equação da onda eletromagnética é invariante sob transformações de *Lorentz* e propaga-se no vácuo com a velocidade da luz c (VELOSO, 2019). Tais características apresentadas pela equação da onda eletromagnética refutam a ideia de que a mesma precisaria do éter luminífero para se propagar. Um comentário aqui se faz necessário. Nesse caso, seria necessário realizar não só as derivadas das coordenadas mas também as derivadas dos campos (nesse caso específico do campo elétrico, embora o resultado seja análogo para o campo magnético), uma vez que no caso relativístico, os campos também se transformam segundo as transformações de *Lorentz*, como pode ser visto das equações $(53) - (58)$. Ao realizar as derivadas dos campos, o que se tem é um fator de $\frac{1}{\gamma^2}$ que é comum as duas parcelas da Equação (38), o que não altera o resultado e o objetivo principal do cálculo que consiste em mostrar que a equação da onda eletromagnética é invariante sob transformações de *Lorentz*.

Alguns comentários são importantes. Do ponto de vista educacional e pedagógico, este trabalho é de grande valia no que tange à introdução dos estudantes dos cursos de ciências exatas e engenharias ao tema, uma vez que não há na literatura uma apresentação detalhada da dedução apresentada, sendo encontradas apenas colocações teóricas sobre a mesma, como pode ser visto nas referências (ROCHA; MOTA, 2013; JESUS, 2010). Algumas deduções são feitas, mas apenas do ponto de vista das equações de *Maxwell*, sem envolver diretamente a análise da invariância da equação da onda eletromagnética (ARAúJO, 2017), o que faz com que o trabalho seja de grande importância, do ponto de vista de ensino e aprendizado para os estudantes do ciclo básico e profissonal dos cursos de ciências exatas e engenharias, de maneira geral. Embora alguns livros tragam uma discussão formal sobre a equação da onda eletromagnética e as transformaçõs de *Galileu* e *Lorentz*, nenhuma demonstração detalhada é apresentada (REITZ; CHRISTY, 1988). Sendo assim, a proposta desse trabalho foi apresentar as demonstrações de maneira bastante detalhada de forma que o estudante ou um entusiasta do tema possa entender cada passo dos cálculos bem como a física que cerca cada um dos passos desse resultado pois, como mencionado anteriormente, o que a literatura sobre o assunto apresenta são discussões sem um detalhamento mais aprofundado, o que pode levar o leitor a ter dificuldades de entendimento de maneira geral.

IV. Considerações Finais

A mecânica newtoniana na qual se baseiam as transformações de *Galileu* não são capazes de descrever movimentos relativísticos com velocidades próximas a c. Na verdade, a relatividade de *Galileu* não distingue referenciais inerciais, então, de qualquer forma se o resultado obtido pelo Experimento *Michelson-Morley* fosse o que os cientistas almejavam à época, seria provada a existência de um referencial privilegiado (éter), o que não faria sentido de acordo com as leis da mecânica newtoniana. Essa incosistência deixou os cientistas confusos até 1905 (STACHEL, 2004). O advento da TRR trouxe luz sobre este questionamento. Ressalta-se que os postulados de *Einstein* não invalidam as transformações de *Galieu*, que permanecem incontestáveis através dos séculos quanto às suas aplicações em baixas velocidades. Por sua vez, as transformações de *Lorentz* vieram oferecer uma oportunidade de calcular velocidades próximas à da luz c e colaborar com a comprovação da TRR. Os resultados obtidos mostram que a onda eletromagnética é não invariante por transformações de *Galileu* e invariante por transformações de *Lorentz* respectivamente. Esta alteração na forma da equação (37), quando há mudança de coordenadas, é devido ao fato de que as transformações de *Galileu* não são adequadas para velocidades próximas a c.

Por sua vez, o conjunto de transformações de *Lorentz*, quando aplicado na equação da onda eletromagnética (37), mostrou-se em consonância com relação à mudança de um referencial S (repouso) para um referencial S' (movimento), o que veio a corroborar que o conjunto de transformações de *Lorentz*, mesmo quando empregadas em transformações de coordendas que envolvam velocidades próximas a c, fazem com que as leis físicas permaneçam invariantes e, por consequência, refuta a ideia da existência do éter luminífero (MICHELSON; MORLEY, 1887), uma vez que a luz é uma onda eletromagnética e não necessita de um meio para propagar-se.

Além de refutar a existência de um referencial absoluto (éter), as teorias propostas por *Albert Einstein* no *annus mirabilis* que originaram a TRR viriam à sofrer alterações nos anos posteriores à 1905 apesar de que, a época em que *Einstein* desenvolveu suas teorias, a tecnologia existente não era suficiente para comprová-las. Conforme os sistemas tecnológicos foram se desenvolvendo, os seus trabalhos foram sendo comprovados, como por exemplo, o experimento dos relógios atômicos (CHOU D. B. HUME; WINELAND, 2010), que valida os efeitos cinemáticos previstos por *Einstein* na TRR (HAWKING; HAWKING, 2010).

V. Agradecimentos

Os autores agradecem à Uuniversidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri pelo apoio. Os autores agradecem ao professor Antônio Paulo Baêta Scarpelli pelas frutíferas discussões.

Referências

Referências

ARAúJO, V. E. C. *O princípio da relatividade e a invariância das equações de Maxwell, 49 f.* Tese (Doutorado) — Curso de Licenciatura em Física, UEPB - Patos, 2017. 115

CHOU D. B. HUME, T. R. C. W.; WINELAND, D. J. Optical clocks and relativity. *Science*, v. 329, 2010. 116

COHEN, I. B. *O nascimento de uma nova Física*. [S.l.]: EDART, 1967. 102, 103

EINSTEIN, A. Verão(?). *CPAE 1*, Doc. 5, n. 1, p. 6–9, 1895. 104

EINSTEIN, A. *Notas Autobiográficas.* [S.l.]: Nova Fronteira, 1982. 104

FRANCISCO, W. C. *Geocentrismo e Heliocentrismo*. 2020. Upload de Vanessa.Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/geocentrismo-heliocentrismo.htm> – acesso em 18 nov. 2022. 102

GRIFFITHS, D. J. *Eletrodinâmica*. [S.l.]: Pearson Education, 2011. 110

HALLIDAY, R. R. D.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna*. [S.l.]: LTC, 2012. v. 4. 108

HAWKING, S.; HAWKING, L. *George's Secret Key to the Universe*. [S.l.]: Simon & Schuster Books for Young Readers, 2010. 116

JANSSEN, M.; STACHEL, J. The optics and electrodynamics of moving bodies em: John stachel going critical, kluwer, dordrecht (no prelo). 1995. 104, 105

JESUS, H. M. *Análise sobre a equivalência entre as eletrodinâmicas de Lorentz e de Einstein, 80 f.* Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, UFBA, 2010. 115

KEPLER, J. *Harmonices mundi: Libri V.* Forni Editore, 1969. (Bibliotheca musica bononiensis: Sezione II). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=VVNbAAAAcAAJ>. 103

M. C. Baldiotti. *File:* LaTeX logo.svg. 2019. Upload de Vanessa. Disponível em: <http://www.uel.br/pessoal/baldiotti/2FIS026A.pdf> – acesso em 12 nov. 2019. 105, 108

MEDEIROS, A. J. G. de. Conversando com einstein: As origens da relatividade geral e a constante cosmológica. *A Física na Escola*, v. 6, n. 1, 2005. 103

MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. On the relative motion of the earth and the luminiferous ether. *Amer. Journ. of Science*, v. 34, n. 1, 1887. 104, 116

NETO, J. B. *Matemática para Físicos com Aplicações: Veotres, Tensores e Espinores*. [S.l.]: Livraria da Física, 2010. 103, 109, 110

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Mecânica*. [S.l.]: Livraria da Física, 2006. v. 1. 102, 104

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade e Física Quântica*. [S.l.]: Eigard Blücher, 2006. v. 2. 104, 108, 114

PIATELLA, O. F. O artigo fundador da teoria da relatividade restrita - sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento. *Cadernos de Astronomia*, v. 1, n. 1, 2020. 104

REITZ, F. J. M. J. R.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. [S.l.]: Campus, 1988. 115

RENN, J. A física clássica de cabeça para baixo: como einstein descobriu a teoria da relatividade especial. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 27, n. 1, 2004. 104, 105

RIOGA, L. *Geocentrismo e Heliocentrismo*. 2021. Upload de Vanessa.Disponível em: <https://www.ufmg.br/espacodoconhecimento/geocentrismo-e-heliocentrismo/> – acesso em 18 nov. 2022. 102

ROCHA, B. F. R. A. N.; MOTA, D. S. Transformações de galileu e de lorentz: um estudo via teoria de grupos. *Rev. Bras. Ens. Física*, v. 35, n. 4, 2013. 105, 115

STACHEL, J. 1905 e tudo mais. *Rev. Bras. Ens. Física*, v. 27, n. 1, 2004. 115

TIPLER, P. A. *Física Moderna*. [S.l.]: LTC, 2014. v. 3. 105

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Physics for scientists and engineers: with modern physics*. [S.l.]: WH Freeman & Co, 2008. 108

VELOSO, V. S. *A (Não) Invariância da Equação da Onda Eletromagnética sob as Transformações de (Galileu) Lorentz*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Engenharia, Ciência e Tecnologia, Iniversidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri - campus Janaúba, 2019. 105, 115