Revista do Professor de Física, v. 6, n. 1, p. 69-77, Brasília, 2022.
Instituto de Física - Universidade de Brasília

Artigo original

Revista do Professor de Física

Ensino de Física

Discutindo órbitas circulares perturbadas: uma abordagem didática do teorema de Bertrand para o ensino médio

Discussing disturbed circular orbits: a didactic approach to Bertrand's theorem for high school

T. A. Silva[1], V. L. A. Silva[1], R. S. Dutra[1]

[1]LISComp-IFRJ, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Rua Sebastião de Lacerda, Paracambi, RJ 26600-000, Brasil

Resumo

Este trabalho propõe trazer para as aulas de física do ensino médio a discussão da estabilidade das órbitas planetárias durante as aulas de gravitação newtoniana. Para isto apresentamos uma proposta didática de discussão do teorema de Bertrand, utilizando elementos básicos de física e de matemática do ensino médio, bem como simulações computacionais, utilizando o software gratuito Modellus, para ilustrar as conclusões obtidas durante as discussões.

Palavras-chave: *Gravitação newtoniana. Teorema de Bertrand. TICs.*

Abstract

This work proposes to bring to high school physics classes the discussion of the stability of planetary orbits during Newtonian gravitation classes. For this, we present a didactic proposal for discussing Bertrand's theorem, using basic elements of physics and mathematics from high school, as well as computer simulations, using the free Modellus software, to illustrate the conclusions obtained during the discussions.

Keywords: *Newtonian gravitation. Bertrand's theorem. TICs.*

I. Introdução

O estudo da estabilidade das órbitas planetárias sempre atraiu a curiosidade dos cientistas. Isaac Newton em sua famosa obra, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (NEWTON, 1962), apresenta as duas únicas leis de forças capazes de produzir órbitas planetárias estáveis,

sendo elas a lei do inverso do quadrado da distância e um campo central do tipo lei de Hooke. Por meio de argumentos geométricos e observacionais, Newton conclui que a lei do inverso do quadrado da distância será a que a natureza obedecerá, dando origem à famosa lei da gravitação universal de Newton. Um argumento forte para não se considerar uma lei de força tipo lei de Hooke, para descrever a interação gravitacional, é o fato dela se estender para grandes distâncias, permeando todo o espaço.

Newton apresentou este resultado sem no entanto justificá-lo por meio de uma demonstração acerca da unicidade do mesmo, que só veio em 1873 (BERTRAND, 1873; ZARMI, 2002; SANTOS, 2011), com Joseph Bertrand, que publicou uma memória na qual demonstrava a existência de apenas dois campos centrais para os quais todas as órbitas radialmente limitadas eram estáveis e fechadas, quando perturbadas, sendo eles a lei newtoniana da gravitação universal, que Bertrand designava como a lei da natureza, e o oscilador harmônico isotrópico (associado a uma lei de força do tipo lei de Hooke). Uma demonstração do teorema de Bertrand tentando conciliar uma maior acessibilidade e rigor, para um aluno de graduação, utilizando cálculo diferencial e integral, é discutida em (RICARDO & HO, 2019).

O teorema de Bertrand é comumente mencionado em livros-textos relacionados à mecânica clássica, sendo discutido de maneira qualitativa (GOLDSTEIN, POOPE, SAFKO, 2002). Uma discussão quantitativa introdutória é ensejada por meio de um exemplo muito particular, quando se considera o problema de um movimento circular de uma partícula sujeita a um campo de força central polinomial atrativo do tipo $F(r) = -kr^n$, com n pertencendo aos reais, sendo k uma constante de proporcionalidade e r a distância da partícula ao centro do campo de forças. O teorema de Bertrand por discutir a estabilidade das órbitas, o que se faz é considerar uma perturbação radial do movimento circular, para logo em seguida obter os possíveis valores de n que resultarão em órbitas circulares estáveis, dentre os quais estão os previstos pelo teorema de Bertrand n=1 (oscilador harmônico isotrópico) e n = -2 (lei do inverso do quadrado da distância), e uma infinidade de outros valores. Esses outros valores obtidos decorrem da particularização do problema de órbitas e condições iniciais genéricas, para a situação de uma órbita inicialmente circular sendo perturbada radialmente. Desta forma podemos dizer que o resultado do estudo da estabilidade de órbitas circulares radialmente perturbadas contém o resultado mais geral previsto pelo teorema de Bertrand, representando este um caso particular do referido teorema.

Neste trabalho apresentamos uma discussão para abordar o problema de órbitas circulares perturbadas em uma aula de gravitação do ensino médio, aproveitando o ensejo para fazer um paralelo com o resultado previsto pelo teorema de Bertrand para órbitas perturbadas mais gerais. Mostraremos que é possível realizar essa discussão apenas utilizando conhecimentos de física e de matemática básica, aprendidos no ensino médio, sem precisar apelar para o cálculo diferencial e integral. Além disso apresentamos algumas simulações das órbitas circulares perturbadas utilizando o *software* gratuito Modellus, com o intuito de ilustrar e de enriquecer a discussão durante uma aula de física.

II. Perturbando órbitas circulares

Durante uma aula de gravitação no ensino médio, é muito comum utilizar o simples exemplo de órbitas circulares para se discutir e aplicar as leis de Kepler, bem como a lei

da gravitação universal de Newton. Em uma dessas aulas podemos propor uma discussão sobre o motivo pelo qual o expoente da lei de força que rege a gravitação universal deve ser exatamente 2, como também uma discussão acerca da estabilidade do nosso sistema solar. Podemos começar essa discussão com uma partícula de massa m que se movimenta com velocidade tangencial v_t em um movimento circular uniforme MCU, de raio inicial R, decorrente da ação de uma lei de força do tipo polinomial $F(r) = -kr^n$, atuando na direção radial, podendo ser exemplificada pela Lua orbitando em torno da Terra. Logo em seguida consideramos uma pequena perturbação impulsiva na direção radial, que atua durante um intervalo de tempo muito curto, de tal modo que $r \approx R + u$, e então a força atuante na partícula passa a ser dada por $F(R+u) = -k(R+u)^n$, sendo $u << R$ a perturbação radial adicional à órbita inicialmente circular. Como veremos mais adiante, o movimento resultante, logo após a perturbação, será dado pelo MCU inicial combinado com o movimento radial perturbado.

Para discutirmos o movimento na direção radial, é conveniente fazê-lo em um referencial girante que acompanhe o MCU inicial da partícula, como representado na figura 1. Para isso imaginemos um observador nesse referencial, cuja segunda lei de Newton aplicada à partícula, sujeita a uma aceleração radial a_r, é dada por

$$-k(R+u)^n + \frac{L^2}{m(R+u)^3} = m\ a_r. \tag{1}$$

O segundo termo, do lado esquerdo da equação acima, refere-se à componente radial da força de inércia atuante no referencial girante, que é escrita em termos da componente tangencial da velocidade da partícula v_t, de sua massa m e da distância radial r, denominada de força centrífuga $F_{CF} = mv_t{}^2/r$. Por conveniência a escrevemos em termos da grandeza física, análoga ao momento linear para o movimento de rotação, conhecido por momento angular L, em que é definido por $L = rmv_t$ (NUSSENSZVEIG, 1981). Para pequenas perturbações radiais $u << R$ podemos desprezar o efeito da força inercial de Coriolis, que atua na direção tangencial, de tal modo que o movimento da partícula, no referencial girante, restringir-se-á ao longo da direção radial.

A conveniência de se expressar a segunda lei de Newton em termos do momento angular está associada ao fato de que essa grandeza permanece constante em sistemas sujeitos apenas a forças que atuam na direção radial, como acontece no exemplo apresentado, devido à atuação do campo de força atrativo e da perturbação, ambos na direção radial, levando à conhecida lei de conservação do momento angular. Caso o professor ainda não tenha discutido a conservação do momento angular com seus alunos, um ótimo momento oportuno para tal seria ao se discutir a lei das áreas de Kepler, para justificar o aumento da velocidade no periélio e a sua diminuição no afélio.

Ao se escrever o termo centrífugo em (1) em termos do momento angular, a aceleração da partícula fica expressa em termos do parâmetro u, com todas as outras grandezas permanecendo constantes após a pequena perturbação considerada. Objetivando obter uma compreensão mais clara do movimento resultante, aplica-se a expansão binomial $(1+\epsilon)^n = \approx 1 + n\epsilon$, com $\epsilon = u/R << 1$, aos termos $(R+u)^n$, na equação (1), para obter

$$a_r = -Cu\ , \tag{2}$$

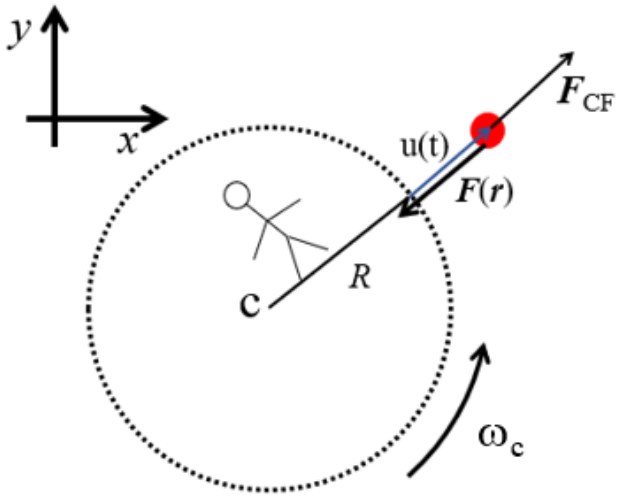

Figura 1: *Partícula perturbada radialmente e observada em um referencial girante com velocidade angular w_c.*

sendo $C = \frac{(n+3)kR^{n-1}}{m}$. Uma inspeção em (2), deduzida com maiores detalhes no apêndice A, permite-nos obter algumas conclusões acerca da estabilidade do movimento, dependendo do tipo da lei de força considerada.

1. Para $n <$ -3, temos que $C < 0$, de tal modo que deslocamentos positivos $u > 0$ serão favorecidos por acelerações positivas $a_r > 0$ e consequentemente a partícula se afasta da origem quando perturbada, indefinidamente, na direção radial, o que caracteriza uma situação de órbita instável.

2. Para n = -3 resulta em $C = 0$ e, portanto, $a_r = 0$, obtendo uma órbita circular, independente da perturbação, caracterizando uma órbita circular indiferente. Para qualquer pequena perturbação que ocorra a partícula manterá o seu movimento circular inicial de raio R.

3. E por fim a situação em que $n >$ -3, o que leva a acelerações que desfavorecem os deslocamentos, o análogo do que temos em um sistema massa-mola, de forma a termos órbitas estáveis. De fato, a equação (2) com $C > 0$ representa a equação de um corpo sujeito à força restauradora de uma mola, que resulta em um movimento harmônico simples MHS (RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO, 2015). Nesse caso a constante C passa a ser associada à frequência das oscilações na direção radial, dada por $\omega_r = \sqrt{\frac{(n+3)kR^{n-1}}{m}}$.

Durante a discussão em sala de aula, sobre a estabilidade das órbitas planetárias, pode ser feito um paralelo com o conhecido exemplo, sobre os possíveis movimentos de uma partícula perturbada, incialmente em repouso: no alto de uma montanha (equilíbrio instável), numa superfície horizontal (equilíbrio indiferente) ou no fundo de uma rampa de skate (equilíbrio estável). Um outro ponto importante a ser destacado é a conexão desse resultado com o teorema de Bertrand, sendo a discussão para órbitas circulares um caso particular, uma vez que a lei da gravitação universal (n = -2) e o oscilador harmônico (n = 1) estão

dentre as possibilidades de órbitas circulares estáveis ($n >$ -3). Para esta última condição de órbitas estáveis, o movimento da partícula é dado em termos de um MCU de frequência ω_c com raio modulado por um MHS, na direção radial, de frequência ω_r. Sendo assim as coordenadas da partícula no sistema de coordenadas xy, com origem fixa no centro C da órbita inicialmente circular, são dadas por

$$x(t) = [R + A\cos(\omega_r t)\,]\cos(\omega_c t) \tag{3}$$

e

$$y(t) = [R + A\cos(\omega_r t)\,]\sin(\omega_c t)\ . \tag{4}$$

Como exercício, pode ser proposto para os alunos calcularem a frequência angular de rotação de um MCU de raio R, de uma partícula sujeita à uma lei de força do tipo polinomial, cujo valor é dado por $\omega_c = \sqrt{\frac{kR^{n-1}}{m}}$, em que do ponto de vista didático escolhemos o MCU e as oscilações radiais inicialmente em fase. O parâmetro A presente nas equações (3) e (4) está associado à magnitude da perturbação, e as frequências das oscilações radiais e do MCU obedecem à seguinte relação

$$\frac{\omega_r}{\omega_c} = \sqrt{n+3}. \tag{5}$$

Como veremos nas simulações apresentadas, essa relação nos permite obter para quais valores de n temos órbitas circulares estáveis abertas ou fechadas, sendo as últimas contempladas pelo teorema Bertrand para n = 1 e n = -2. Para que as órbitas sejam fechadas, ambas as frequências, radial e do MCU, devem ser dadas por números comensuráveis, ou seja, a razão entre ambos deve fornecer um número racional. Dessa forma percebemos que para órbitas circulares, existem uma infinidade de leis de forças, ou seja, além dos valores n = 1 e n = -2, que nos dá órbitas circulares estáveis e fechadas. Essa degenerescência é uma consequência da particularização da análise da estabilidade para o caso de órbitas circulares, uma vez que o teorema de Bertrand versa sobre órbitas radialmente limitadas genéricas. E, por fim, quando a razão entre as frequências for um número irracional, teremos órbitas abertas, como veremos nas simulações.

III. Simulando órbitas circulares perturbadas com o Modellus

Nesta seção apresentamos um roteiro para simular órbitas circulares perturbadas utilizando o *software* Modellus. Para que o leitor possa se habituar ao uso do referido software e ter contato com suas diversas aplicações, sugerimos consultar as referências (ANDRADE, 2016; IFB, 2019; CUNHA, 2017). Este roteiro tem o objetivo de ilustrar as conclusões obtidas nas discussões da seção 2. Em todas as simulações os vetores verde, vermelho e azul representarão, respectivamente, a posição, a velocidade e a aceleração da partícula.

1. Inicie o Modellus e escreva as equações (3) e (4) e, também, as equações para as componentes cartesianas da velocidade e da aceleração, dadas por:

   (a) Velocidade

$$v_x = -\omega_r A\sin(\omega_r t)\,\cos(\omega_c t)\ - \omega_c\{R + A\cos(\omega_r t)\,\}\sin(\omega_c t)\ \ , \tag{6}$$

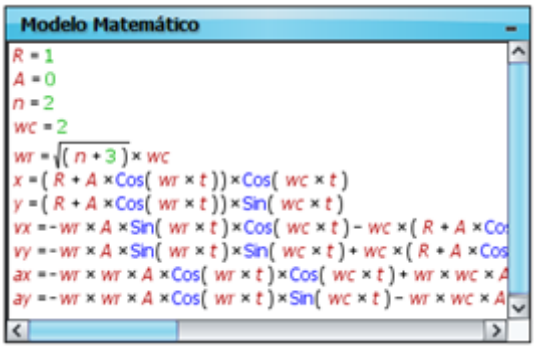

Figura 2: *Entrada do modelo matemático.*

$$v_y = -\omega_r A \text{sin}(\omega_r t)\ \text{sin}(\omega_c t) + \omega_c \{R + A\text{cos}(\omega_r t)\}\cos(\omega_c t)\ , \tag{7}$$

(b) Aceleração

$$\begin{aligned} a_x = -\omega_r^2 A\text{cos}(\omega_r t)\ \cos(\omega_c t) + 2\,\omega_r\omega_c A\text{sin}(\omega_r t)\ \sin(\omega_c t) \\ -\omega_c^2\{R + A\text{cos}(\omega_r t)\}\cos(\omega_c t) \end{aligned} \tag{8}$$

e

$$\begin{aligned} a_y = -\omega_r^2 A\text{cos}(\omega_r t)\ \sin(\omega_c t) - 2\,\omega_r\omega_c A\text{sin}(\omega_r t)\ \cos(\omega_c t) \\ -\omega_c^2\{R + A\text{cos}(\omega_r t)\}\sin(\omega_c t)\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Substitua as últimas equações, obtidas derivando as equações 3 e 4, no espaço reservado ao modelo matemático, e logo em seguida clique externamente à janela para confirmar o modelo, de acordo com a figura 2.

2. Utilizando a ferramenta "objetos", adicione a Terra e a Lua em sua tela, bem como os vetores: posição (da Lua em relação à Terra), velocidade e aceleração. Inicialmente escolha R = 1 (raio da órbita circular), A = 0 (perturbação inicial nula), n = -2 (lei da gravitação universal) e $\omega_c = 2$. Como estamos interessados em uma discussão qualitativa, utilizaremos unidades arbitrárias para todas as quantidades. Finalmente clique em "Play" e observe a órbita circular gerada, como exposta na figura 3.

3. Agora escolha n = -3 e repita o 2° passo para diferentes perturbações iniciais A = 0,1, 0,2 e 0,3. Explique o resultado observado. Aqui o estudante poderá verificar o resultado de órbita circular indiferente, ou seja, a órbita circular inicial fica inalterada para quaisquer pequenas perturbações adicionais.

4. Agora escolha A = 0,2 (perturbação igual a 20% do valor inicial do raio R =1) e n = 6. Também calcule a frequência radial e compare com a frequência para o MCU $\omega_c = 2$. Repita esse processo para n = 13 e n = 14.

   O 4° passo é para que o aluno perceba que as órbitas são fechadas, desde que a razão entre as frequências ω_r/ω_c seja um número racional, como já comentado na seção

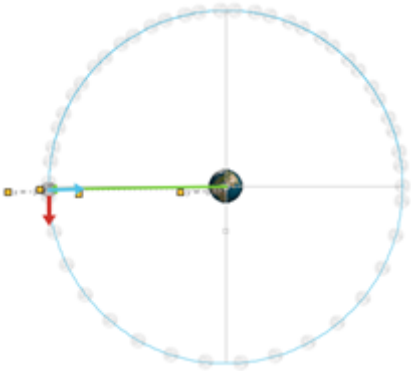

Figura 3: *Órbita circular com expoente n = -2 (lei da gravitação universal).*

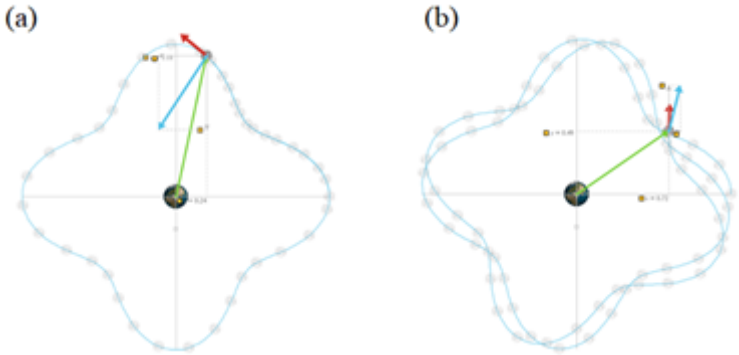

Figura 4: *Órbitas circulares perturbadas. (a) n=13 (órbita fechada). (b) n=14 (órbita aberta).*

2. E que neste caso o número de lobos das órbitas é proporcional a essa razão. Por exemplo, para $n = 13$, aparecem 4 lobos, já que $\omega_r/\omega_c = 4$, como exposto na figura 4-(a). Uma vez que a frequência radial é 4 vezes maior que a frequência do MCU, isso significa que a partícula executa 4 oscilações radiais durante uma revolução completa, o que justifica a órbita fechada com 4 lobos. Por outro lado, quando $n = 14$, a razão entre as frequências $\omega_r/\omega_c = \sqrt{17}$ é um número irracional e, portanto, a partícula não executa mais um número inteiro de oscilações radiais completas ao longo de uma volta, resultando na órbita aberta exposta na figura 4-(b).

IV. Considerações Finais

Neste artigo apresentamos uma proposta didática de introduzir a discussão da estabilidade de órbitas planetárias e do teorema de Bertrand em uma aula de gravitação do ensino médio. Partindo de órbitas circulares ligeiramente perturbadas, e utilizando elementos de física e matemática básica em sua análise, mostramos como obter as leis de forças polinomiais que resultam em órbitas estáveis, dentre as quais estão presentes as leis de Hooke e a do inverso do quadrado da distância, previstas pelo teorema de Bertrand. Por fim, utilizamos o *software* Modellus para ilustrar algumas conclusões obtidas durante a discussão, tais como as condições de órbitas circulares perturbadas abertas e fechadas.

Referências

NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London, 1687). Traduzido para o Inglês por A. Motte e revisado por F. Cajori (University of California Press, Berkeley, 1962)

ANDRADE, M. E. Simulação e modelagem computacional com o software Modellus: aplicações práticas para o ensino de física, 1ł ed. Livraria da Física, (2016).

BERTRAND, J. C. R. Acad. Sci. Paris 77, p. 849-853, (1873).

CUNHA, R. F. F. & TORT, A. C. O estudo de precessão da órbita de Mercúrio no ensino médio. Revista do Professor de Física, v. 1, n. 2, p. 13-24, (2017).

IFB. Usando software Modellus para simulações em física. Youtube, 01 jul. 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=zTbbD-lr8oU>. Acesso em: 28 mar., 2022.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. & SAFKO, J.: Classical Mechanics 3ł ed. Addison-Wesley, New York (2002).

NUSSENZVEIG, H. M. Física Básica: vol. 1. São Paulo, Edgard Blucher, (1981).

RAMALHO, NICOLAU. TOLEDO. Os fundamentos da física, v. 2, Moderna, (2015).

RICARDO, B. & HO, L. X. T. Distinct Feature of Inverse Square Force and Harmonic Force: A Simplistic Proof of Bertrand's Theorem. The Physics Educator, v. 1, n. 04, p. 1950012, (2019).

SANTOS, F. C.; SOARES, V. & TORT A. C.: *Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand*. Revista Brasileira de História da Ciência. 4 n.1 92-97 (2011).

ZARMI, Y. *The Bertrand theorem revisited*. American Journal of Physics, v. 70, n. 4, p. 446-449, (2002).

A. Perturbação radial

Neste apêndice iremos discutir em mais detalhes as aproximações envolvidas na obtenção da equação (2). Para isso aplicamos a expansão binomial $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ com $\epsilon = u/R << 1$,

aos termos $(R+u)^n$, na equação (1):

$$-kR^n\,(1+n\varepsilon)+\frac{L^2}{mR^3}\,(1-3\varepsilon)\approx m\;a_r. \tag{10}$$

Agrupando os termos proporcionais a ϵ, obtemos

$$\left(\frac{L^2}{mR^3}-kR^n\right)-\left(\frac{3L^2}{mR^3}+knR^n\right)\varepsilon\approx m\;a_r. \tag{11}$$

O primeiro termo L^2/mR^3-kR^n é identicamente nulo, uma vez que o mesmo descreve o MCU da partícula antes da perturbação, com a resultante centrípeta L^2/mR^3 sendo determinada pela força central kR^n. Igualando o referido termo a zero, usando o fato de que $L=mR^2\omega_c$, obtemos a frequência angular do MCU

$$\omega_c=\sqrt{\frac{kR^{n-1}}{m}}, \tag{12}$$

de tal modo que a equação (11) pode ser simplificada para finalmente obter a equação (2) representando o MHS na direção radial. Neste caso consideramos a situação em que $C>0$ (condição de estabilidade quando $n>$ - 3), em que usamos o fato de que $\epsilon=u/R$. Neste caso a constante C positiva representa o quadrado da frequência angular das oscilações dada por

$$\omega_r=\sqrt{\frac{(n+3)\,kR^{n-1}}{m}}. \tag{13}$$

Tomando a razão entre as equações (13) e (12), deduzimos a equação (5) representando a razão entre as frequências das oscilações radiais e do MCU. Para o campo de força central polinomial n = -3, e para uma pequena perturbação radial, a partícula se mantém no MCU que se encontrava, sem oscilar radialmente, ou seja, com $\omega_r=0$, como pode ser verificado a partir da equação (13).