



Verificação da segunda lei de Newton usando molas

Verification of Newton's second law using springs

UBALDO MARTINS DAS NEVES*

Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) - Campus Lagoa do Sino
Rodovia Lauri Simões de Barros, km 12 - SP-189 - Aracaçu, Buri - SP, 18290-000

Resumo

Nesse artigo, propõe-se um experimento didático e de baixo custo visando a verificação prática da segunda lei de Newton. Para isso, foram medidas as constantes elásticas de duas molas utilizando dois métodos distintos: estático e dinâmico. A concordância entre os resultados assegura a verificação desta importante lei da Física.

Palavras-chave: Segunda lei de Newton. Movimento harmônico simples. Ensino de física.

*E-mail: ubaldo@ufscar.br

Abstract

In this article, a low cost didactic experiment aiming to verify Newton's second law is proposed. The experiment involves static and dynamical measures of a spring's elasticity constant. The agreement between the results represents the verification of this important law of physics.

Keywords: *Newton's second law. Simple harmonic movement. Teaching of physics.*

I. INTRODUÇÃO

Aristóteles pensava que, para um corpo manter movimento com determinada velocidade, seria necessário a atuação contínua de uma força sobre o mesmo. Isso concorda com nossa experiência diária. Por exemplo, para manter uma cadeira em movimento, deve-se aplicar continuamente uma força sobre a mesma. Ao cessar a força, observa-se que a cadeira atinge rapidamente o repouso. Galileu conseguiu perceber que a natureza não opera desse modo e percebeu que um corpo pode mover-se com velocidade fixa, mesmo se não houver força atuando sobre o mesmo. Descobriu que os corpos apresentam uma inércia frente às variações de sua velocidade. Faltou pouco para Galileu descobrir a forma matemática da lei do movimento, equação 1, que coube a Newton.

Através de sua segunda lei, Newton definiu precisamente a relação entre massa e força em física. A forma matemática dessa lei é a seguinte:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}, \quad (1)$$

onde \vec{F}_R é a força resultante que atua sobre o corpo de massa m e aceleração \vec{a} . As setas são usadas para dizer que as grandezas força e aceleração são vetores. Notar que a massa representa uma medida da inércia que um corpo apresenta à variação do seu estado de movimento. Quanto maior a massa, menor será a aceleração de um corpo sujeito a uma dada força.

No Ensino Médio, os estudantes são introduzidos às ciências naturais pela mecânica de Newton. Os mesmos são levados a desenvolver habilidades como analisar um problema: separar forças e corpos onde as forças atuam, fazer simplificações, abstrações, aplicações de leis da física, etc.. No entanto, as mesmas variáveis intervenientes que esconderam da humanidade, durante muito tempo, a forma da segunda lei, dificultam que a mesma seja verificada na prática pelos estudantes. Tais dificuldades são as forças resistivas ao movimento, como o atrito. Alguns laboratórios de ensino de física possuem equipamentos, como os trilhos de ar, onde o atrito é minimizado através de um fluxo contínuo de ar que impede o contato direto do corpo que se desloca através de um trilho. Nesse tipo de equipamento, as leis do movimento podem ser vistas funcionar precisamente. Infelizmente, o alto custo e complexidade de manufatura de tais equipamentos inviabiliza a execução de tais experimentos em muitas escolas. No entanto, existem outras possibilidades para se observar a segunda lei de Newton na prática e que são bem conhecidas. Uma delas é descrita nesse artigo.

O experimento proposto aqui que tem como base o movimento de um corpo preso a uma mola. Esse sistema apresenta uma baixa taxa temporal de dissipação da energia mecânica e assim não apresenta perda de energia significativa ao longo do tempo em que são tomadas as medidas. Além disso, essas as perdas de energia mecânica não alteram significativamente o parâmetro mais importante do experimento que é o período de oscilação do sistema (ALONSO, 1996). O experimento envolve apenas arruelas de ferro, molas e um cronômetro. A Figura 1 ilustra o aparato.

Um ponto importante da presente proposta é a lei de Hooke para a força elástica da mola (TIPLER, 2000). Essa lei diz que a força exercida por uma mola é função da elongação da mesma. Matematicamente:

$$F_M = -kx, \quad (2)$$

em que x é a elongação, k é a constante elástica da mola e F_M é a força produzida pela deformação da mola. O sinal negativo serve para considerar a mudança de sentido da força de acordo com a posição do corpo.

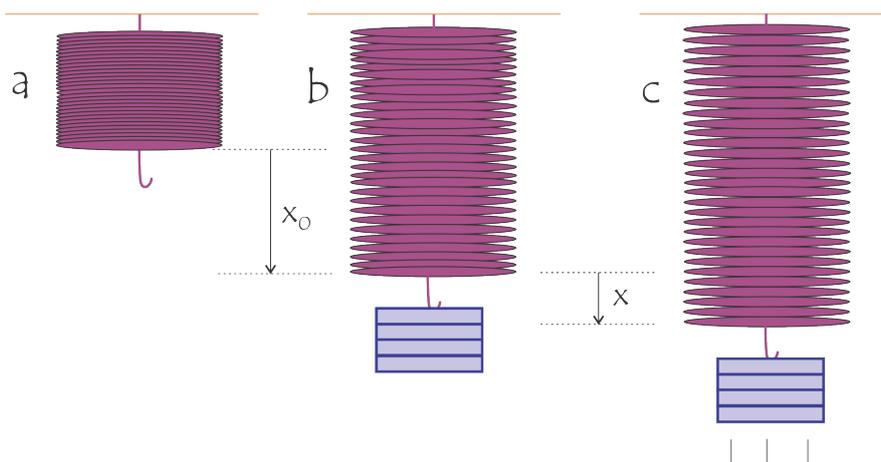


Figura 1: Figura (a) representa uma mola relaxada, enquanto que a figura (b) representa a mola e o corpo em repouso, na posição de equilíbrio estático em uma posição x_0 abaixo da posição da mola relaxada. A figura (c) representa a massa oscilando em uma posição x que varia em função do tempo em torno da posição x_0 . A variável posição x é positiva para posições abaixo de x_0 e negativa acima desse ponto.

Cabe, nesse ponto, dizer que, para compreender completamente o resultado mais importante desse artigo, equação 7, que fornece o período de oscilação do sistema, deve-se ter conhecimento básico sobre cálculo, especificamente, como resolver uma equação diferencial simples, no caso, equação 3. Apesar do assunto não ser de conhecimento dos estudantes do Ensino Médio, o estudante vai notar que a fórmula indicada funciona. Isso pode ser estimulante para mostrar a importância da matemática para se compreender a física e incentivar o estudante a avançar em seus estudos. A integração entre matemática, física e medidas práticas, que estão envolvidas na presente atividade, também pode ser aproveitada pelo professor de física de escolas de ensino superior.

II. METODOLOGIA

A Figura 1a representa uma mola de comprimento presa verticalmente a um suporte. A figuras 1b representa massa e mola em repouso, enquanto que 1c ilustra o sistema oscilando.

A equação matemática válida para o sistema tanto em repouso como em movimento é dada pela segunda lei de Newton, equação 1. Nela, a força da mola é dada pela lei de Hooke, equação 2, e

$$mg - kx = ma. \quad (3)$$

Nessa equação, foi utilizado um sistema de referência com origem em $x = 0$ e que cresce verticalmente para baixo. Sendo assim, o peso do corpo, mg , é positivo e a força elástica da mola $-kx$ muda periodicamente de sentido. De acordo com a referência escolhida, quando x é positivo, com o corpo abaixo da posição de equilíbrio, a força elástica tem direção vertical e aponta para cima. Quando x é negativo, corpo acima da posição de equilíbrio, a força elástica tem sentido vertical para baixo.

II.1. Sistema em repouso

Para o corpo em repouso, Figura 1a, a equação 3 torna-se

$$mg - kx = 0. \quad (4)$$

A equação 4 mostra que, quanto maior a massa m da carga sustentada pela mola, maior é a elongação x da mesma, já que g e k são constantes. Assim, o método mais simples para determinar a constante elástica de uma mola é prender a mesma verticalmente a um suporte e medir a distensão que diferentes massas produzem. Deve-se ressaltar que durante essas medidas, as massas e as molas devem permanecer em repouso.

Pode-se escrever o peso do objeto, mg , em função da distensão da mola, da seguinte forma:

$$P(x) = kx + q. \quad (5)$$

Assim, o coeficiente angular dessa função linear revela o valor da constante elástica da mola. O parâmetro q , que teoricamente deveria ser zero, na prática não é. Esse fato deve-se ao comportamento real de uma mola, que exige uma força externa mínima aplicada para iniciar sua elongação linear com a força. No caso, essa força mínima é dada pelo valor de q .

II.2. Sistema em oscilação

Outra situação característica desse sistema é a possibilidade de oscilação. Basta retirá-lo da posição de equilíbrio para que a força restauradora elástica provoque a oscilação do mesmo, equação 3. A resolução dessa equação, para pequenas amplitudes A , leva ao seguinte comportamento matemático para a posição do corpo em função do tempo, t

(ALONSO, 1996; BOYCE, 2001):

$$x(t) = A.\text{sen}(\omega.t + \phi), \quad (6)$$

onde

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

ω é a frequência angular da oscilação e ϕ é o fator de fase, que é usado apenas para indicar a posição do corpo em determinado instante de tempo.

Como

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T},$$

onde ν é a frequência de oscilação do sistema, o período de oscilação, T , pode ser dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (7)$$

Visando eliminar a raiz para facilitar a obtenção experimental da constante elástica da mola, eleva-se ao quadrado a equação 7, que toma a forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{K}m. \quad (8)$$

Assim, medidas experimentais do período de oscilação de diferentes massas podem fornecer o valor da constante elástica da mola. A equação

$$T^2(m) = \frac{4\pi^2}{K}m + p \quad (9)$$

pode ser usada para descrever os dados experimentais.

Novamente permite-se que o coeficiente linear da reta, p , tome valores diferentes de zero. Cabe dizer também que, visando simplificar o problemas, as massas das molas foram desprezadas nos cálculos por serem muito menores que a massa de uma arruela.

II.3. Estimativa dos erros

Cabe alguns comentários sobre a forma como foram feitas as estimativas das incertezas experimentais. A maioria dos programas para ajustes de retas, como o *Graph*, fornecem apenas o coeficiente de correlação de Pearson, R , ou o quadrado deste e não o erro padrão, que é utilizado para expressar a incerteza da medida. Para obter as incertezas das inclinações dos gráficos, ou os erros padrões destas, foi utilizada a seguinte fórmula, obtida em SILVA (2019)

$$\sigma = m\sqrt{\frac{1}{N-2} \frac{1-R^2}{R^2}}. \quad (10)$$

Nessa equação, m é o coeficiente angular da reta. $N - 2$ é o número de graus de liberdade, no caso: 2, pois o grau de liberdade é dado pelo número de pontos experimentais menos

o número de parâmetros ajustados. Nos casos estudados, os seguintes parâmetros foram ajustados: coeficiente angular e coeficiente linear da reta. R é o coeficiente de correlação de Pearson, fornecido pelos programas acima citados. Por fim, para estimar erros da divisão de dois parâmetros, Δf , utilizou-se

$$\left(\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h}\right), \quad (11)$$

que vale para multiplicação e para divisão dos parâmetros g e h , cujos erros são dados, respectivamente por Δg e Δh .

Para o estudante que desejar saber mais sobre análises de erros experimentais, recomendam-se os livros indicados nas seguintes referências: (TAYLOR, 2012) e (BERENDSEN, 2011).

III. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nessa seção, são apresentados os resultados experimentais para as constantes elásticas de duas molas, medidas de duas maneiras diferentes: estaticamente e dinamicamente. As molas, feitas de aço, são ligeiramente diferentes. Possuem cerca de 0,5g de massa, 2cm de comprimento e espiras com raios de 0,5cm de diâmetro. Como massas, utilizaram-se arruelas de aproximadamente 7,3 g cada. A balança utilizada para medir as massas tem precisão de 0,1g e a régua utilizada para medir as distâncias tem precisão de 1mm. O cronômetro utilizado via aplicativo de celular tem precisão de centésimo de segundo. No entanto, utilizou-se 0,5 s como estimativa da incerteza na medida do tempo devido aos tempos de reação do ser humano ao manipular o cronômetro (FABIAN, 2016).

Os gráficos e os ajustes das retas aqui mostrados foram feitos de forma automática utilizando do programa *Origin®*(ORIGIN, 2019), que permite a produção de gráficos de alta qualidade. A única desvantagem desse programa é seu custo, já não é gratuito. No entanto, existem outras opções como o *Gnuplot* (GNU PLOT 5.0.7, 2019) e o *Graph* (GRAPH 4.4.2, 2019) que são livres. Este último é muito simples de ser usado e também permite a construção de gráficos com pontos experimentais e ajuste de funções aos pontos com grande facilidade.

III.1. Medidas Estáticas

Antes de descrever as medidas, cabe uma nota sobre os erros de paralaxe que são comumente cometidos por observadores iniciantes. Esses erros, que devem-se a desvios angulares, ocorrem quando o observador não olha diretamente para a região onde a medida está sendo realizada. Assim, para evitar tais erros, o olho do observador deverá estar no mesmo plano horizontal da posição onde a medida é realizada.

O gráfico da Figura 2 mostra as deformações em centímetros devidas aos pesos de 2, 3, 4 e 5 arruelas presas as molas. Cada reta no gráfico foi obtida através de ajustes da equação 5 aos pontos experimentais. Os coeficientes angulares das retas indicam os seguintes valores para as constantes elásticas das molas: Mola 1: $(40,9 \pm 0,4)N/m$; Mola 2: $(30,9 \pm 0,2)N/m$. No final do texto, será mostrado como foram obtidas as estimativas para as incertezas das medidas.

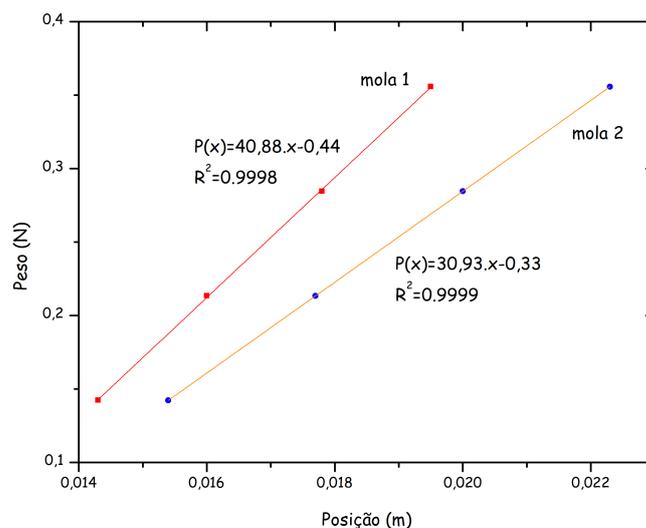


Figura 2: Pode-se observar que as inclinações das retas são diferentes, ou seja, as constantes elásticas das molas são diferentes. Nota-se ainda a perfeita linearidade dos pontos experimentais. Isso indica que o modelo de Hooke descreve corretamente a força exercida pelas molas.

III.2. Medidas Dinâmicas

Para as medidas dinâmicas do período de oscilação do sistema, deve-se deslocar levemente a massa abaixo da sua posição de equilíbrio e soltá-la. Em nossos experimentos, a massa foi deslocada por aproximadamente 1 cm da sua posição de equilíbrio. Para uma boa precisão na medida do período, deve-se medir o intervalo de tempo decorrido para várias oscilações da massa. Assim, o período de oscilação do sistema é dado pela divisão do tempo total medido pelo número de oscilações. Nas medidas aqui mostradas, foram medidos intervalos de tempo para a realização de 40 oscilações.

O gráfico mostrado na Figura 3 mostram os valores de T^2 em função das massas dos corpos que oscilam. As medidas foram realizadas para as duas molas com quatro massas diferentes. Os valores encontrados para os coeficientes angulares dessas retas foram de $(1,25 \pm 0,02)s^2/Kg$ para a Mola 1 e $(0,99 \pm 0,03)s^2/Kg$ para a Mola 2. De acordo com a equação 9, esses valores correspondem aos coeficientes angulares das retas, ou seja, iguais a $4\pi^2/K$. Desse modo, os valores para as constantes elásticas das molas são: $K_1 = (39,56 \pm 0,03)N/m$ e $K_2 = (31,61 \pm 0,02)N/m$.

O alinhamento dos pontos experimentais mostrados na Figura 3 mostram que o quadrado do período de oscilação do sistema realmente é função linear da massa da carga oscilante, conforme previsto pelas equações 8 ou 9, ou ainda que o período da oscilação é proporcional à raiz quadrada da massa, conforme previsto pela equação 7. Esses fatos, por si só, já servem como verificação das teorias de Newton e Hooke para o experimento dinâmico.

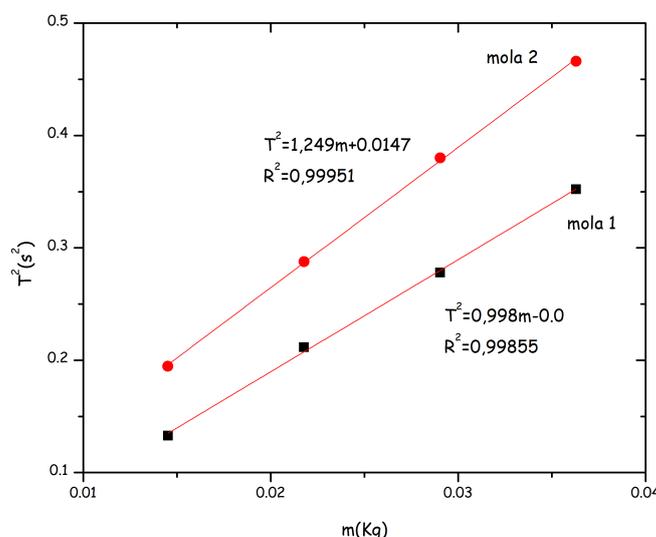


Figura 3: *Períodos ao quadrado em função das massas para as duas molas. A menor inclinação, segundo Eq.8, indica uma constante elástica maior.*

III.3. Comparação entre as medidas estáticas e dinâmicas

Pode-se notar que os resultados das constantes elásticas obtidas dinamicamente concordam com os valores obtidos de maneira estática divergindo de apenas 2% para a mola 1 e 3% para a mola 2. As estimativas dos erros de medidas mostram ainda que o método dinâmico é mais preciso e exato que o método estático. Atribuí-se esse fato à grande precisão na medida do período das oscilações. Os valores próximos obtidos para as constantes elásticas das molas, utilizando métodos diferentes, indicam sucesso na verificação da segunda lei de movimento de Newton, na qual se baseia o método dinâmico utilizado.

IV. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos para as constantes elásticas das molas de maneira dinâmica, por meio da medida dos períodos de oscilação do sistema, concordam com as medidas estáticas das constantes dessas molas obtidas através da medida das deformações estáticas das mesmas. Esses resultados indicam que a segunda lei de Newton foi verificada com sucesso. Além disso, a validade das teorias de Newton e Hooke, para a deformação da mola, pode ser confirmada pelas retas obtidas nos gráficos da Figura 3. A execução da atividade, embora simples, pode ser de grande valor ao professor e aos estudantes que têm oportunidade de trabalhar as seguintes competências: medidas de massa e intervalos de tempo, construção e interpretação de gráficos lineares, determinação de equações de reta e avaliação de modelos físicos.

Sugere-se ao professor, visando melhorar a maturidade dos alunos, a utilização de papéis milimetrados para a construção dos primeiros gráficos. As retas deverão ser construídas buscando aproximá-las o máximo possível de todos os pontos experimentais. Em um

segundo momento, seria muito interessante e instrutivo o professor indicar aos alunos a utilização de programas para a construção de gráficos, como os indicados no início da seção III.

REFERÊNCIAS

ALONSO M., FINN E. *Physics*. New York: Addison-Wesley, 1996.

BERENDSEN H. J. C. *A Student's Guide to Data and Error Analysis* Cambridge: Cambridge, 2011.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Ed. New York: John Wiley, 2001.

FABIAN H., REISER M., MUNZERT J. *Frontiers in psychology*.7, 882 (2016).

GNUPLOT. Williams, T. and Kelley, C. (2011). *Gnuplot 4.5: An interactive plotting program* <<http://gnuplot.info>>. Acesso em: jun., 2019.

GRAPH *Plotting of mathematical functions 4.4.2* GNU General Public License (GPL) <<https://www.padowan.dk/download/>>. Acesso em: jun., 2019.

ORIGIN. OriginLab Corporation. Northampton, Massachusetts, USA, 2019.

SILVA M.R.S., RAMOS,P.M., SILVA P.S.P., *Como estimar a incerteza no declive a partir do coeficiente de Pearson?* Disponível em:<<https://www.spf.pt/magazines/GFIS/121/article/1008/pdf>>. Acesso em: 04 jun., 2019)

TAYLOR J. R., *Introdução à Análise de Erros: o estudo de incertezas em medições físicas*. 2a. Ed., Porto Alegre: Bookman, 2012.

TIPLER, P. A. *Física para Cientistas e Engenheiros*. 4 Ed. vol.1. Rio de Janeiro: LTC, 2000.