ISSN 2447-6102

Artigo

Resolução de Problemas de Controle Ótimo usando a Abordagem Indireta

Lobato, F. S.[1,*] e Libotte, G. B.[2]

[1] Universidade Federal de Uberlândia - Uberlândia, MG, Brasil
[2] Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Nova Friburgo, RJ, Brasil
***** Email para correspondência: fslobato@ufu.br

Received: 18/01/2024; Accepted: 25/01/2024; Published: 31/01/2024

Resumo: O Problema de Controle Ótimo (PCO) consiste na determinação do perfil da variável de controle para fins da otimização de uma função objetivo. Do ponto de vista matemático, o PCO pode ser resolvido considerando, basicamente duas abordagens, a saber, a Direta e a Indireta. Na primeira, o PCO é convertido em um problema de programação não linear a partir da aproximação da variável de controle e das variáveis de estado. Já na Indireta, o problema de otimização original é convertido em um equivalente algébrico-diferencial de valor no contorno, obtido a partir da aplicação da condição de otimalidade. Neste contexto, a presente contribuição tem por objetivo resolver PCOs resultantes da aplicação da condição de otimalidade usando o Método da Colocação Normal. Para essa finalidade, estudos de caso com diferentes níveis de complexidade são considerados. Os resultados obtidos demonstram a qualidade da metodologia proposta em comparação com outras estratégias numéricas.

Palavras-chave: Problema de Controle Ótimo; Abordagem Indireta; Equações Algébrico-Diferenciais de Valor no Contorno.

Abstract: The Optimal Control Problem (OCP) consists of determining the control variable profile for the purpose of optimizing an objective function. From a mathematical perspective, the OCP can be essentially solved using two approaches, namely, the Direct and the Indirect methods. In the Direct approach, the OCP is transformed into a nonlinear programming problem by approximating the control variable and state variables. On the other hand, in the Indirect approach, the original optimization problem is converted into an algebraic-differential boundary value problem, obtained by applying the optimality condition. In this context, the present contribution aims to solve OCPs resulting from the application of the optimality condition using the Normalized Collocation Method. For this purpose, case studies with different levels of complexity are considered. The obtained results demonstrate the quality of the proposed methodology in comparison to other numerical strategies.

Keywords: Optimal Control Problem; Indirect Approach; Differential-Algebraic Boundary-Value Problems.

1. Introdução

O Problema de Controle Ótimo (PCO) consiste na determinação do perfil do vetor de variáveis de controle que minimizam (ou maximizam) uma função objetivo, sujeito às restrições algébrico-diferenciais (Bryson e Ho, 1975). Em linhas gerais, as abordagens para o tratamento deste tipo de problema podem ser classificadas em dois grandes grupos, a saber, a Indireta e a Direta. A primeira classe é baseada no Princípio Mínimo de Pontryagin (Bryson e Ho, 1975), e gera o conjunto de equações denominados de Euler-Lagrange formado por variáveis de estado, adjuntas (co-estado) e controle, resultando num problema de valor no contorno algébrico-diferencial. Por outro lado, a Abordagem Direta faz uso da parametrização das variáveis de controle (Método Sequencial) ou da parametrização das variáveis de estado e de controle (Método Simultâneo), transformando o problema original em um equivalente de programação não linear (Feehery, 1998).

As principais dificuldades encontradas durante a resolução de um PCO são: *i*) flutuação do Índice Diferencial (ID) (Bryson e Ho, 1975); *ii*) presença de restrições de desigualdade (von Stryk e Bulirsch, 1992); e *iii*) a variável de controle é linear no PCO (Lobato, 2004). O ID é o número mínimo de vezes que o sistema de equações algébrico-diferenciais (EADs) ou parte dele deve ser diferenciado com relação ao tempo para que seja obtido um sistema de equações puramente diferencial (Brenan et al., 1996). Este representa uma medida da dificuldade de solução de EADs, decorrente de mau condicionamento, instabilidade, singularidade e má convergência (Bryson e Ho, 1975). Já a dificuldade associada a presença de restrições de desigualdade é a localização das sequências de ativações e desativações destas ao longo da trajetória (Lobato et al., 2006). Durante a ativação de restrições de desigualdade, podem ocorrer saltos ou descontinuidades nas variáveis adjuntas, relacionadas a ativação dessas restrições (Bryson e Ho, 1975). Todas estas características fazem com que os PCOs representem grandes desafios, sendo cada estudo de caso único e com características bem particulares.

Diante do que foi apresentado, este trabalho tem como objetivo resolver PCOs considerando a Abordagem Indireta. Para essa finalidade, o problema de valor de contorno resultante da aplicação das condições de otimalidade é integrado considerando o Método da Colocação Normal. Este trabalho está estruturado conforme segue. A seção 2 apresenta a formulação matemática do PCO, bem como as condições de otimalidade para o problema de interesse. A seção 3 apresenta uma breve descrição do Método da Colocação Normal. A metodologia proposta para a resolução de PCOs é apresentada na seção 4. Para avaliar a metodologia proposta, dois estudos de caso são apresentados na seção 5. As conclusões são apresentadas na última seção.

2. Problema de Controle Ótimo

Matematicamente, o PCO pode ser formulado como segue (Bryson e Ho, 1975):

$$\min\ F=\psi(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}L(t,x,u)dt \quad (1)$$

$$f(t,x,\dot{x},u)=0 \quad (2)$$

$$s(t,x,u)\le 0 \quad (3)$$

$$\varphi(x(t_f))=0 \quad (4)$$

$$x^L\le x\le x^U \quad (5)$$

$$u^L\le u\le u^U \quad (6)$$

em que t é a variável independente, x é o vetor das variáveis de estado, u é o vetor das variáveis de controle, $\psi(x(t_f),t_f)$ é o primeiro termo da função objetivo F avaliado em $t=t_f$ e $L(t,x,u)$ é o segundo termo do funcional F, $s(t,x,u)$ é o vetor de restrições de desigualdade, $f(t,x,\dot{x},u)$ é o vetor de restrições algébrico-diferenciais e $\varphi(x(t_f))$ é o vetor de variáveis definidas no limite superior para a variável t, isto é; t_f. Os sobrescritos L e U identificam, respectivamente, os limites inferior e superior das variáveis de estado e controle.

É importante destacar que uma das principais dificuldades encontradas durante a resolução de PCOs é a determinação dos instantes em que ocorrem a ativação e desativação das restrições de desigualdade, denominados aqui de eventos (Bryson e Ho, 1975). Esta característica é agravada quando a restrição é função apenas de variáveis de estado, conforme mostrado na Eq. (7):

$$s(x,t)\le 0 \quad (7)$$

2.1. Condições de Otimalidade

Como apresentado anteriormente, a resolução de um PCO pode ser obtida a partir de duas abordagens, a Direta e a Indireta. No caso desta segunda, a base matemática para a determinação das condições de otimalidade é fundamentada na Teoria de Controle Ótimo (Bryson e Ho, 1975). Nesta teoria, define-se a função Hamiltoniano (H) para o sistema descrito pelas equações Eq. (1), Eq. (2), Eq. (4)-Eq. (7) como:

$$H=L(t,x,u)+\lambda^T f(t,x,\dot{x},u)+\mu s \quad (8)$$

em que λ e μ são variáveis adjuntas (também chamadas de variáveis de co-estado) associadas às variáveis de estado e às restrições de desigualdade, respectivamente.

Neste caso, μ é maior do que zero se s=0 ou μ é igual a zero se s<0. Assim, as condições de otimalidade, denominadas de Equações de Euler-Lagrange para o sistema descrito acima, são definidas como:

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x}\begin{cases} -L_x - \lambda^T f_x - \mu s_x, & se\ s = 0 \\ -L_x - \lambda^T f_x, & se\ s < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Neste caso, a condição relacionada ao vetor λ e necessária para que o modelo diferencial possa ser integrado é dado como:

$$\lambda^T(t_f) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10}$$

A condição (denominada de estacionária) que determina $u(t)$ é dada por:

$$H_u \equiv L_u + \lambda^T f_u + \mu s_u = 0 \tag{11}$$

O modelo representado por Eq. (2), Eq. (9) e Eq. (11) forma um sistema de equações algébrico-diferenciais de valor no contorno. Assim, a solução deste sistema de equações equivale à otimização do PCO original. Em resumo, aplicar a abordagem Indireta consiste na resolução de um problema de simulação de valor no contorno, o que na prática não é uma tarefa trivial (Lobato, 2004).

3. Método da Colocação Normal

O Método da Colocação Normal (MCN) é baseado na definição de uma função de aproximação (geralmente uma expressão polinomial), na qual a solução numérica é avaliada considerando um determinado número de pontos dentro do domínio de interesse, isto é; o Número de Pontos de Colocação ou *NPC* (Villadsen e Michelsen, 1978). É importante ressaltar que a aproximação considerada deve satisfazer as condições inicial e de contorno do problema original (caso o problema seja de valor no contorno), bem como nos pontos internos do domínio analisado.

A função de aproximação e os pontos de colocação podem ser escolhidos usando diferentes estratégias. Tradicionalmente, uma das mais comuns é empregar o polinômio de Lagrange (PL) como a função de aproximação. Essa escolha se deve à redução do custo computacional associado à aproximação numérica em comparação com outras aproximações (Laranjeira e Pinto, 2001).

Assim, substituindo a função de aproximação no modelo original, é possível obter expressões (residuais) para cada ponto de colocação. Estes resíduos devem ser minimizados para cada raiz do polinômio, isto é; devem ser zerados em cada ponto de colocação, bem como devem satisfazer as condições iniciais e de contorno (caso o problema seja de valor no contorno). Neste caso, para determinar os coeficientes do polinômio considerado, gera-se um sistema de equações, geralmente, não lineares que deve ser resolvido.

A seguir é apresentado um consolidado dos passos necessários para a aplicação do MCN para a resolução de equações algébrico-diferenciais ordinárias (Laranjeira e Pinto, 2001):

- Definir os parâmetros de entrada: características do problema a ser integrado, domínio do problema, grau da aproximação e número de pontos de colocação;
- Avaliar a aproximação considerada nas condições de contorno;
- Determinar as equações (resíduo nos pontos de colocação);
- Resolver o sistema de equações resultantes;
- Verificar se a solução obtida não é modificada com o aumento do grau da aproximação.

Cabe ressaltar que a qualidade do resultado obtido, geralmente, é função da aproximação considerada, sendo que um aumento excessivo do grau da mesma não, necessariamente, implica na melhora da qualidade da solução obtida. Além disso, esse aumento pode ocasionar um comportamento oscilatório nas proximidades de regiões onde a solução não experimenta variações pronunciadas (Villadsen e Michelsen, 1978). Assim, para cada estudo de caso, deve-se avaliar a sensibilidade da solução obtida em relação às características da aproximação considerada.

4. Metodologia

A metodologia proposta neste trabalho para resolver um PCO consiste das seguintes etapas:

- Obter as condições de otimalidade (Equações de Euler-Lagrange) para a aplicação de interesse;
- Aplicar o Método da Colocação Normal para a resolução do modelo algébrico-diferencial de valor no contorno resultante. Para essa finalidade, em cada estudo de caso, o número de pontos de colocação foram avaliados;
- Comparar os resultados obtidos com aqueles reportados pela literatura especializada.

5. Resultados e Discussão

Para avaliar a qualidade dos resultados obtidos pela metodologia proposta, serão analisados problemas clássicos da literatura. Além disso, para integrar o sistema de equações algébrico-diferenciais considera-se o Método da Colocação Normal via emprego de uma aproximação cúbica para as variáveis de estado e controle. Para fins de comparação, consideram-se os resultados obtidos considerando a DIRCOL (*Direct Collocation*), que resolve PCOs usando a Abordagem Direta (von Stryk, 1999) e a COLDAE (*Collocation Differential Algebraic Equation*), que resolve PCOs resultantes da aplicação da Abordagem Indireta, isto é; é um *solver* para a integração de problemas de valor no contorno algébrico-diferenciais (Ascher e Spiteri, 1994).

5.1. Isaac Newton

Como primeira aplicação considere a minimização do arraste na extremidade de um cone num escoamento hipersônico, cujo modelo adimensional, é dado como (Bryson e Ho, 1975):

$$\min_{u(x)} f = \frac{1}{2}\left(r(l)\right)^2 + \int_0^l \frac{ru^3}{1+u^2}dx \quad (12)$$

sujeito à:

$$\frac{dr}{dx} + u = 0, \quad r(0) = 1 \quad (13)$$

onde f é a função objetivo, x é a distância axial do ponto de raio máximo, r é o raio do cone, l (l=1) é o comprimento do cone, e u é a variável de controle.

Aplicando as condições de otimalidade para este problema obtêm-se:

$$\frac{dr}{dx} + u = 0, \quad r(0) = 1 \quad (14)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \frac{u^3}{1+u^2} = 0, \quad \lambda(l) = -r(l) \quad (15)$$

$$\lambda - \frac{ru^2(3+u^2)}{\left(1+u^2\right)^2} = 0 \quad (16)$$

O modelo apresentado é um problema de valor no contorno algébrico-diferencial. Este será resolvido considerando o MCN com 3 pontos de colocação igualmente espaçados no domínio $0 \le x \le 1$.

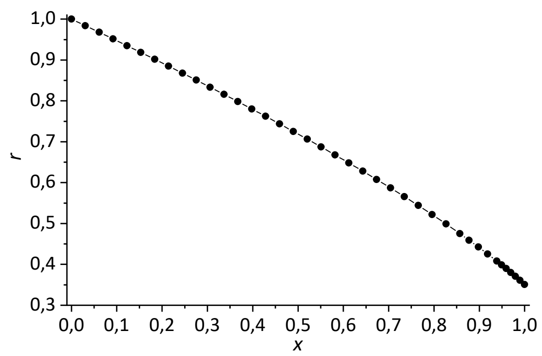
Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos considerando a DIRCOL, a COLDAE e a metodologia proposta (MCN). Nesta tabela são apresentadas as estimativas iniciais consideradas em cada estratégias, bem como as tolerâncias (ε_{OPT} - associada à otimização do problema e ε_{NFT} - associada ao sistema discretizado), os números de pontos de discretização considerados na DIRCOL (NPC_{DIRCOL}) e na COLDAE (NPC_{COLDAE}) e o número de elementos utilizados na COLDAE (N_{Elem}). De forma geral, é possível observar que, independentemente da técnica utilizada (Direta ou Indireta), a solução ótima foi obtida a mesma, sendo a diferença observada na sexta casa decimal. Isto indica que, apesar da não linearidade observada para este estudo de caso, a solução ótima foi obtida sem maiores dificuldades por cada uma das abordagens consideradas.

Tabela 1. Resultados obtidos para o problema de Isaac Newton.

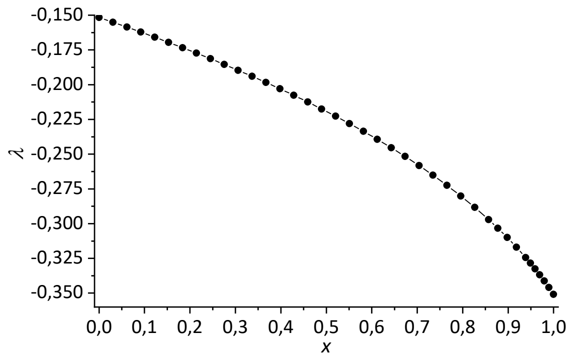
	DIRCOL	**COLDAE**	**MCN**
Estimativas Iniciais	x=2,5; u=0,1	x=2,5; u=0,1; λ=0,5	x=2,5; u=0,1; λ=0,5
$\varepsilon_{OPT}/\varepsilon_{NFT}$	$10^{-6}/10^{-6}$	-	-
ε_{NFT}	-	10^{-6}	10^{-6}
NPC_{DIRCOL}	10	-	-
NPC_{COLDAE}/N_{Elem}	-	2/1	3/1
f	0,187408	0,187403	0,187407

Ao se realizar a mudança no número de pontos de colocação, não foram observadas mudanças significativas no que tange a precisão. Todavia, ao se aumentar o número de pontos de colocação, a dimensão do problema a ser resolvido, naturalmente, é aumentada. Assim, o número de pontos de colocação considerados nesta aplicação foram suficientes para a obtenção de uma solução precisa, em relação as reportadas na literatura, mas sem onerar o custo computacional total.

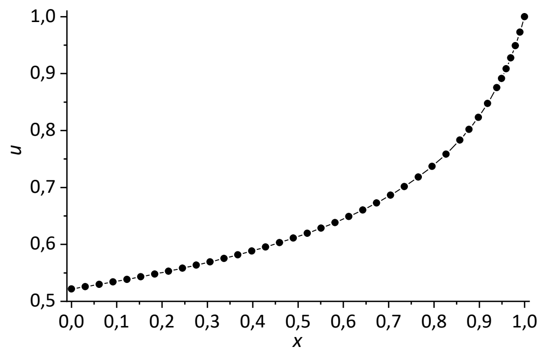
Na Figura 1 são apresentados os perfis das variáveis de estado, co-estado, controle e função objetivo para o problema de Isaac Newton. Nestas figuras pode-se observar que o atendimento da condição de fim para a variável de co-estado λ, isto é; o seu valor é de sinal contrário ao observado para a variável de estado r no final do domínio (x=1). Também pode-se observar o perfil para a variável de controle ao longo do domínio em x, bem como a evolução da função objetivo.



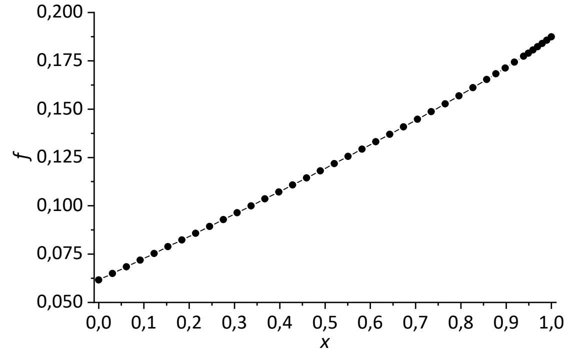
(a) Estado.



(b) Co-Estado.



(c) Controle.



(d) Função Objetivo.

Figura 1. Perfis das variáveis de estado, co-estado, controle e função objetivo para o problema de Isaac Newton.

Finalmente, é importante destacar que, neste estudo de caso, o ID é igual a 1, isto é; para a transformação do modelo algébrico diferencial em um equivalente puramente diferencial, é necessário derivar a Eq. (16), com relação a

x, uma única vez. Esta também é uma das justificativas pela qual este estudo de caso foi resolvido sem maiores problemas, isto é; problemas com ID iguais a 1 podem ser resolvidos, sem maiores dificuldades por *solvers* desenvolvidos para equações puramente diferenciais (Ascher e Spiteri, 1994).

5.2. Reator CSTR

A última aplicação considera um reator CSTR (*Continuous Stirred Tank Reactor*) em que ocorrem as reações consecutivas $A \rightarrow B$ (k_1), $B \rightarrow C$ (k_2) e $2A \rightarrow D$ (k_3). Matematicamente, o modelo que representa este processo é dado como (Henson e Seborg, 1992):

$$\min_u f = \int_0^{t_f} \left(\gamma_1 (x_1 - 2{,}5)^2 + \gamma_2 (x_2 - 1{,}0)^2 + \gamma_3 (u - 25{,}0)^2 \right) dt \quad (17)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 - k_3 x_1^2 + (10 - x_2) u, \quad x_1(0) = 2{,}997 \quad (18)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2 + u x_2, \quad x_2(0) = 1{,}1169 \quad (19)$$

em que x_1 e x_2 representam as concentrações das espécies A e B respectivamente, x_F é a concentração de A na alimentação e u é a taxa de diluição. Os parâmetros k_1, k_2, k_3, x_F tem valores nominais iguais à 50 h^{-1}, 100 h^{-1}, 10 L/(mol h), 10 mol/L, respectivamente. Já os pesos associados a cada parcela da função objetivo f são dados como $\gamma_1 = \gamma_2 = 1000$ e $\gamma_3 = 1$ (mol h/L)^2.

As condições necessárias para o ótimo são dadas a seguir:

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 - k_3 x_1^2 + (10 - x_2) u, \quad x_1(0) = 2{,}997 \quad (20)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2 + u x_2, \quad x_2(0) = 1{,}1169 \quad (21)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 2\gamma_1 (x_1 - 2{,}5) + (k_1 + 2k_1 x_1 + u)\lambda_1 - k_2 \lambda_2, \quad \lambda_1(t_f) = 0 \quad (22)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 2\gamma_2 (x_2 - 1{,}0) + (k_2 - u)\lambda_2, \quad \lambda_2(t_f) = 0 \quad (23)$$

$$2\gamma_3 (u - 25{,}0) - (k_1 - x_1)\lambda_1 \text{-} x_2 \lambda_2 = 0 \quad (24)$$

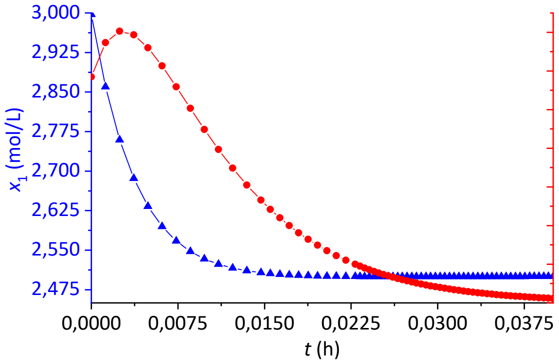
Na Tabela 2 são apresentados os parâmetros utilizados na solução do problema considerando diferentes abordagens (ε_{OPT}, ε_{NFT}, NPC_{DIRCOL}, NPC_{COLDAE}, N_{Elem}) para t_f = 0,040 h e cinco pontos de colocação na metodologia proposta. Nesta tabela observa-se que a metodologia proposta foi capaz de obter uma boa estimativa para a solução ótima em comparação com os resultados encontrados considerando a DIRCOL e a COLDAE.

Tabela 2. Resultados obtidos para o problema do reator CSTR.

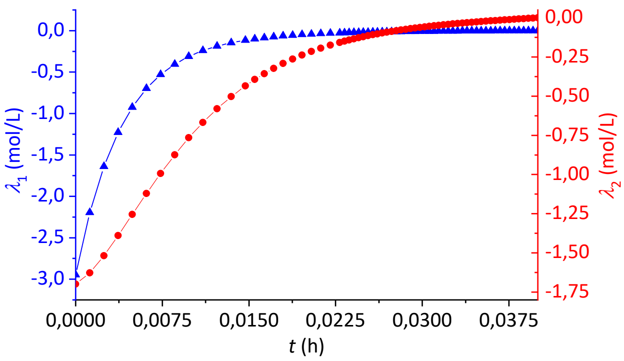
	DIRCOL	**COLDAE**	**MCN**
Estimativas Iniciais	x_1=2,5; x_2=1,0; u=25	x_1=2,5; x_2=1,0; λ_1=0; λ_2=0,5; u=25	x_1=2,5; x_2=1,0; λ_1=0; λ_2=0,5; u=25
$\varepsilon_{OPT}/\varepsilon_{NFT}$	$10^{-6}/10^{-6}$	-	-
ε_{NFT}	-	10^{-6}	10^{-6}
NPC_{DIRCOL}	20	-	-
NPC_{COLDAE}/N_{Elem}	-	3/3	5/3
f (mol^{2}h/L^2)	0,823863	0,823754	0,823988

Assim como na primeira aplicação, observa-se na Eq. (24) que o ID é igual a 1. Assim, apesar da não linearidade desta aplicação, a solução ótima foi obtida sem maiores problemas. Para esta aplicação, ao se aumentar o número de pontos de colocação não foram observadas mudanças significativas em relação à precisão.

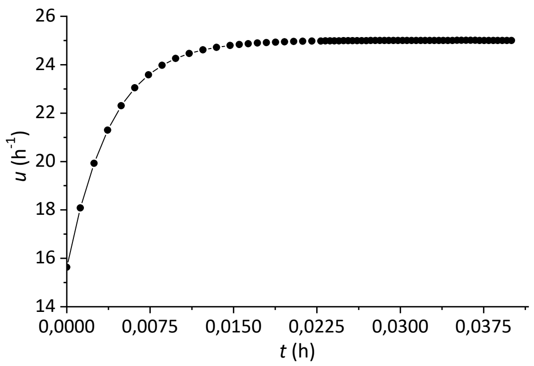
Na Figura 2 são apresentados os perfis para as variáveis de estado, para a variável de controle e as variáveis adjuntas para o problema do reator CSTR. Assim como na primeira aplicação, nestas figuras é possível observar o atendimento das condições de contorno para as variáveis de estado e de co-estado. Fisicamente, por se tratar de uma reação química em que o componente *A* é reagente e *B* é reagente e produto (simultaneamente), observa-se que a concentração de *A* sempre reduz ao longo do tempo e a concentração de *B*, inicialmente aumenta (este componente está sendo produzido na primeira reação) e depois diminuem (este componente está sendo consumido na segunda reação). Tal comportamento é o esperado via análise dos balanços de massa. Também é importante destacar que, por se tratar da minimização do funcional *f*, as concentrações de *A* e *B* e da variável de controle tendem aos respectivos valores limites, definidos na Eq. (17). Assim, o valor do funcional tende, ao final do processo, ao valor mínimo.



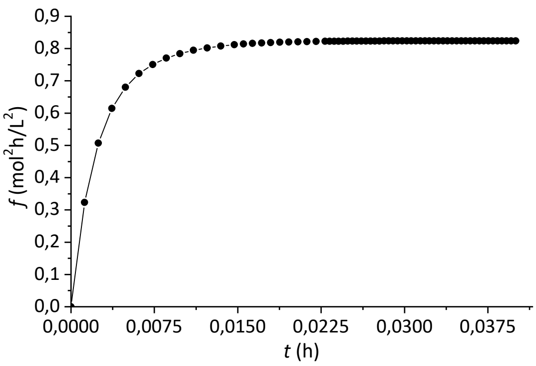
(a) Estado.



(b) Co-Estado.



(c) Controle.



(d) Função Objetivo.

Figura 2. Perfis das variáveis de estado, co-estado, controle e função objetivo para o problema do reator CSTR.

6. Conclusões

Este trabalho teve por objetivo resolver PCOs considerando a Abordagem Indireta. Para esta finalidade, o PCO original foi transformado em um equivalente algébrico-diferencial de valor no contorno, cuja solução foi obtida via aplicação do Método da Colocação Normal.

A partir dos resultados obtidos foi possível observar uma boa concordância entre os valores ótimos encontrados em comparação com aqueles reportados pela literatura especializada. Isto demonstra que a Abordagem Indireta configura como uma estratégia interessante para o tratamento do PCO. Todavia, apesar da qualidade dos resultados encontrados, é importante destacar que a metodologia proposta apresentará dificuldades para lidar com aplicações que apresentem índice diferencial superior (maior que a unidade) (Ascher e Spiteri, 1994). Além disso, a definição de uma estimativa inicial para os perfis das variáveis de co-estado também pode representar uma dificuldade para o uso da Abordagem Indireta (Lobato, 2004). De forma geral, esta definição prévia é dependente do problema analisado.

Como linhas de trabalhos futuros pode-se citar: *i*) aplicar a metodologia a problemas com flutuação do índice diferencial e que apresentam outros tipos de restrições; e *ii*) avaliar a presença de incertezas aos PCOs considerados.

Referências

1. ASCHER, U., SPITERI, R. Collocation Software for Boundary-Value Differential-Algebraic Equations. SIAM J. Scient. Comput., 15, 938-952, 1994.
2. BRENAN, K. E., CAMPBELL, S. L., PETZOLD, L. R. Numerical Solution of Initial Value Problems in Differential Algebraic Equations. Classics in Applied Mathematics, SIAM Philadelphia, 1996.
3. BRYSON, A. E., HO, Y. C. Applied Optimal Control. Hemisphere Publishing, Washington, 1975.
4. FEEHERY, W. F. Dynamic Optimization with Path Constraints. Massachusetts Institute of Technology, 1998.
5. HENSON, M. A., SEBORG, D. A. Nonlinear Control Strategies for Continuous Fermenters. Chemical Engineering Science, 47(4), 821-835, 1992.
6. LARANJEIRA, P., PINTO, J.C. Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química, Editora E-Papers, 316, ISBN 85-87922-11-4, 1º ed., 2001.
7. LOBATO, F. S. Abordagem Mista para Problemas de Otimização Dinâmica. Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, 2004.
8. LOBATO, F. S., OLIVEIRA-LOPES, L. C., MURATA, V. V. Optimal Feed Policy for Fed-Batch Fermentation with Events Identification based on Switching Structures. Proceedings of the XXII IACChE (CIIQ) 2006 and V CAIQ, Buenos Aires - Argentina, 2006.
9. VILLADSEN, J., MICHELSEN, M.L. Solution of Differential Equation Models by Polynomial Approximation. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1978.
10. VON STRYK, O. User's Guide for DIRCOL - A Direct Collocation Method for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Technische Universitat Darmstadt, Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung (SIM), 1999.
11. VON STRYK, O., BULIRSCH, R. Direct and Indirect Methods for Trajectory Optimization. Annals of Operations Research, 37, 357-373, 1992.