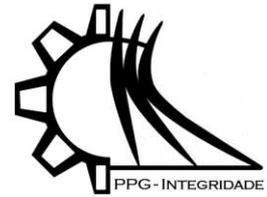




ISSN 2447-6102



Artigo

Simulação da Equação de Burgers Invíscida e Estocástica

Vianna Jr., A.S. ^{1,*}, Gomes, R.G. ² and Reis, M.C. ³

¹ Docente/ Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Química, Brasil; ardson@usp.br

² Discente/ Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Química, Brasil; rafaelgiglio@usp.br

³ Docente/ Universidade de São Paulo, Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Química, Brasil; mreis@usp.br

* Correspondence: ardson@usp.br; Tel.: +55-11-3091-2279

Received: 18/01/2024; Accepted: 25/01/2024; Published: 31/01/2024

Resumo: A equação de Burgers é o primeiro passo para resolver a equação de Navier-Stokes, equação fundamental no estudo de fluidodinâmica computacional. Mesmo a versão invíscida da equação de Burgers resulta em uma equação diferencial parcial não linear, que deve ser resolvida com a devida abordagem. Neste trabalho, a equação de Burgers invíscida e estocástica é resolvida. O método de Euler explícito foi usado para integrar o tempo, gerando um algoritmo em marcha. Para o espaço, foi utilizada a fórmula de diferenças finitas *backward*. A aleatoriedade foi inserida através de um processo de Wiener no tempo. Os parâmetros avaliados aqui são parte do trabalho de Aksan e Özdeş (2004), que foi usado para verificar o modelo determinístico. Através deste trabalho, a não linearidade e a aleatoriedade da equação de Burgers foram resolvidas, possibilitando a progressão para a solução de modelos mais complexos. Os resultados da simulação são trajetórias amostrais que representam os perfis de velocidades com oscilações estocásticas, fenômeno físico que ocorre na natureza.

Palavras-chave: EDP estocástica; Python; Trajetória amostral

Simulation of The Stochastic Inviscid Burgers Equation

Abstract: The Burgers equation is the first step in solving the Navier–Stokes equation, which is fundamental one in the study of computational fluid dynamics. Even the inviscid version of the Burgers equation results in a nonlinear partial differential equation, which should be solved with the proper approach. In this work, the inviscid and stochastic Burgers equation is solved. Euler's explicit method was used to integrate time, generating a march algorithm. For the space, the backward finite difference formula was used. Randomness was inserted through a Wiener process in time. The parameters evaluated here are part of the Aksan and Özdeş article (2004), that was used to verify the deterministic model. By using the approach here described, the nonlinearity and randomness were resolved, allowing the progression to the solution of more complex models. The simulation result are sample paths that represent the velocity profiles with stochastic oscillations, a physical phenomenon that occurs in nature.

Keywords: stochastic PDE; Python; sample paths

1. Introdução

A equação de Burgers já foi avaliada significativamente na literatura (Aksan e Özdeş, 2004; Babu et al., 2021). É uma simplificação da equação da Navier-Stokes, mas continua contendo o termo advectivo, um termo não linear que acrescenta complexidade a sua solução. Portanto, é um passo interessante na solução de uma equação diferencial

parcial (EDP), que possui uma metodologia usada na solução da equação de Burgers, que pode ser relevante para o estudo numérico de equações diferenciais parciais cujas soluções variam rapidamente.

Existem diversos caminhos para a solução numérica da Equação de Burgers. O caminho mais simples é utilizar integração por diferenças finitas, tanto no tempo como no espaço (Aksan e Özdeş, 2004). Porém, outros métodos de integração podem ser utilizados, como o método das linhas (Mukundan e Awasthi, 2015), onde o espaço é discretizado por diferenças finitas e o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é resolvido com um método de regressões sucessivas (BDF - *Backward differentiation Formula*).

Outro ponto que aparece naturalmente em problemas de fluidodinâmica é a aleatoriedade. A modelagem do fenômeno da turbulência tem como ponto de partida o tensor de Reynolds, que representa a correlação das flutuações de componentes da velocidade. Por isso, existe uma linha de pesquisa que avalia a equação de Navier-Stokes estocástica (Bianchi e Flandoli, 2020) e sua versão simplificada, a equação de Burgers estocástica (Bertini et al., 1994).

No presente trabalho, a equação de Burgers invíscida e estocástica é resolvida numericamente. O modelo é uma equação diferencial parcial (EDP) estocástica de primeira ordem, tanto no tempo quanto no espaço. O tempo foi discretizado por uma fórmula de diferença de primeira ordem, o método de Euler explícito. O espaço foi discretizado com uma fórmula diferença retroativa (*backward*). A aleatoriedade foi inserida com um processo de Wiener no tempo (movimento browniano). A integração é feita com a fórmula de Itô. O algoritmo pode ser desenvolvido através de uma discretização por diferenças finitas, utilizando a abordagem de Euler-Maruyama. Este algoritmo já foi implementado e testado em trabalhos anteriores (Vianna Jr. e Nichele, 2010; Nakama et al., 2017). O resultado são trajetórias amostrais para a velocidade, que podem vir a representar o perfil de uma velocidade instantânea na saída de um tubo. Esta é a discussão trazida pelo presente trabalho, que é representar o fenômeno físico por trajetórias amostrais.

2. Fundamentos

2.1. Equação de Burgers

A equação de Burgers é uma equação diferencial parcial que modela a velocidade que varia no espaço e no tempo. É, na verdade, a simplificação da equação de Navier-Stokes que não considera a contribuição da pressão, mas que mantém o termo advectivo não linear. Considerando somente uma direção, a equação de Burgers pode ser escrita como (Eq. 1):

$$\frac{\partial v}{\partial t'} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade, z é a direção, t' é o tempo, ν é o coeficiente de difusão de quantidade de movimento.

A EDP fica totalmente definida ao se considerar a condição inicial (C.I.) e as condições de contorno (C.C.), ver Eq. 2:

$$\begin{cases} C.I. v(z, 0) = v_0(z) \\ 1^a C.C. v(0, t') = g_1(t') \\ 2^a C.C. v(L, t') = g_2(t') \end{cases} \quad (2)$$

onde L é o comprimento característico.

Há uma forma mais simples da equação de Burgers que é sua forma invíscida, onde o termo de difusivo não é considerado (Eq. 3):

$$\frac{\partial v}{\partial t'} + v \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

2.2. Processos estocásticos

Um processo estocástico pode ser definido como um conjunto de variáveis aleatórias indexadas a uma variável (geralmente a variável tempo), sendo representado por $\{X(t), t \in T\}$ (Vianna Jr., 2021).

Um processo estocástico amplamente conhecido é um movimento aleatório que uma folha desenha na superfície de um rio. É o conhecido movimento browniano. Uma forma de representar este fenômeno é a equação diferencial estocástica proposta por Langevin (Eq. 4):

$$m \frac{dv_s}{dt'} = -6 \pi \mu D_p v_s + \xi \quad (4)$$

sendo o lado esquerdo da equação a força resultante no plano da superfície do rio, μ é a viscosidade do fluido, D_p é o diâmetro da partícula (considerada esférica), v_s é a velocidade da partícula no plano da superfície e ξ representa um ruído, que é relacionado com o processo de Wiener, dW .

A solução desta equação diferencial ordinária (EDO) estocástica permite traçar trajetórias amostrais, que são os diversos caminhos possíveis que a folha desenvolverá na superfície de um rio. Esta abordagem permite o estudo de diversos fenômenos, como o preço de um derivativo no mercado financeiro. Alguns exemplos estão apresentados em Vianna Jr. e Oliveira (2020).

O processo de Wiener é uma forma de inserir comportamento estocástico à modelagem de um fenômeno físico. O processo de Wiener unidimensional W é contínuo, com $W(0)=0$. Os incrementos $W(t_n) - W(t_{n-1}), \dots, W(t_1) - W(t_0)$ são independentes. Estes incrementos seguem uma distribuição normal e com expectativa $E[W(t)-W(s)]=0$ e variância $E\{[W(t)-W(s)]^2} = t-s$ (Vianna Jr., 2021).

As EDOs estocásticas seguem uma teoria específica, já que devem integrar uma componente estocástica (dW). A integral que representa isso é a seguinte (Eq. 5):

$$X(t) \cong \vec{X}_0 + \int_0^t \vec{b}(\vec{X}(s)) ds + \int_0^t \vec{B}(\vec{X}, t) d\vec{W} \quad (5)$$

Uma forma de tratar dW é fazer:

$$dW \cong \sqrt{dt} \quad (6)$$

O processo de integração da Eq. 5 pode ser feita pela fórmula de Itô ou Stratonovich (Eq. 7):

$$Y_{n+1} - Y_n \cong b_n \Delta t + Y_n \Delta W_n \quad (7)$$

Para mais detalhes, ver Vianna Jr. (2021).

3. Método

A equação de Burgers invíscida e estocástica a ser simulada neste trabalho é (Eq. 8):

$$\frac{\partial v}{\partial t'} + v \frac{\partial v}{\partial z} = \sigma dW \quad (8)$$

sendo σ o parâmetro associado às oscilações estocásticas e dW associado ao processo de Wiener.

A abordagem utilizada aqui já foi aplicada em trabalhos anteriores (Vianna Jr. e Nichele, 2010; Nakama et al., 2017). A ideia é integrar as componentes determinísticas por diferenças finitas e a aleatoriedade é resolvida pela fórmula de Itô (Eq. 9):

$$u_i^{j+1} - u_i^j = -\frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^j [u_i^j - u_{i-1}^j] + b \sqrt{\Delta t} \Delta W \quad (9)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. 9 encerra o termo não linear que traz dificuldades na sua integração. Por isso, primeiro é resolvido o sistema determinístico, para depois ser inserido o processo estocástico. As etapas são:

1. Determinístico: aplicar o algoritmo explícito (Euler) no tempo e *backward* no espaço. Validar com dados da literatura.
2. Estocástico:
 - a. resolver o processo de Wiener numericamente (ΔW): por algoritmo de Marsaglia, apresentado por Kloeden et al. (2002).
 - b. aplicar um algoritmo *backward* no espaço e integração de Itô no tempo, proposto por Gaines (1995)
 - c. traçar trajetórias amostrais de velocidade

A discussão trazida neste trabalho é justamente avaliar o perfil de velocidades com base nas trajetórias amostrais geradas por modelagem estocástica. Existem diversos trabalhos na literatura que visam a formalidade matemática, procurando provar a existência e a unicidade das soluções (Gubinelli e Perkowski, 2020). Aqui é apresentada uma visão simples, representar uma possibilidade do fenômeno físico por uma trajetória amostral.

4. Resultados e discussão

As simulações foram desenvolvidas em Python. O navegador empregado foi o Anaconda, especificamente o ambiente Spyder como IDE (*Integrated Development Environment*). Os tempos computacionais foram sempre menores que um minuto, mesmo em um notebook HP ENVYx360.

4.1. Equação de Burgers invíscida

A equação aqui resolvida é a Eq. 3, com as condições inicial, de contorno e parâmetros, $t=0,1$, 100 pontos no espaço ($\Delta x=1,0/100 = 0,01$), $t=0,00005$ e $\Delta t=0,00001$, como os de Aksan e Özdeş (2004), representada por variáveis adimensionais u , t e x :

$$\begin{cases} C.I. u(x, 0) = \text{sen}(\pi x) \\ 1^a C.C. u(0, t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

O esquema numérico é:

$$u_i^{j+1} - u_i^j = -\frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^j [u_i^j - u_{i-1}^j] \quad (11)$$

O perfil de velocidade para passos subsequentes é visualmente coincidente (Figura 1), podendo ser considerada a convergência numérica para a abordagem adotada.

Também é possível observar que o perfil obtido aqui é similar ao obtido por Aksan e Özdeş (2004), com 5 pontos no espaço, $\Delta t=0,00001$ e dispersão de 0,1 ($\varepsilon=0,1$). Desta forma, considerou-se que o perfil foi verificado

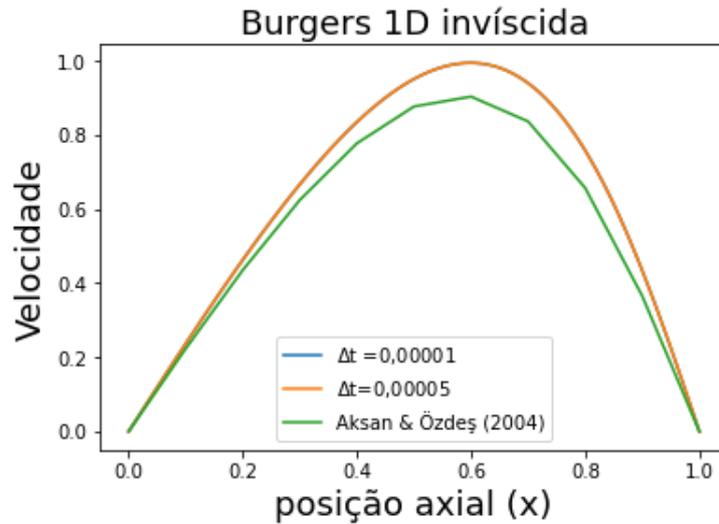


Figura 1. Velocidade adimensional simulada pela equação de Burgers invíscida.

4.2. Equação de Burgers invíscida e estocástica

Aqui estão os resultados para a simulação da equação de Burgers 1D, invíscida e estocástica (Eq. 8). As trajetórias amostrais, que representam os perfis de velocidade, dependem da semente que dá partida ao módulo de geração de números aleatórios (ferramenta random do Python) e do parâmetro b , chamado de relevância estocástica (Vianna Jr. e Nichele, 2010; Nakama et al., 2017).

A Figura 2 apresenta duas trajetórias amostrais para a velocidade ao longo da direção axial, x , para uma mesma semente, $b=0,1$ e $b=0,9$. Para $b=0,1$, não são observadas oscilações, ficando o perfil próximo do determinístico, Figura 1. Contudo, para $b=0,9$, são observadas oscilações. Estas oscilações são informações do comportamento físico original, que devem ser consideradas na sua compreensão.



Figura 2. Velocidade adimensional simulada pela equação de Burgers invíscida e estocástica.

5. Conclusões

A equação de Burgers 1D invíscida e estocástica foi resolvida com discretização no espaço e no tempo por diferenças finitas, sendo acrescentado aleatoriedade através de um processo de Wiener no tempo. Primeiro, foi resolvida a equação 1D invíscida e depois foi inserida a aleatoriedade.

As condições inicial, de contorno e parâmetros, $t=0,1$, $\Delta t=0,00005$ e $\Delta t=0,00001$, do trabalho de Aksan e Özdeş (2004) foram utilizadas. Foi observada convergência numérica com os passos subsequentes para o tempo, mostrando que a abordagem foi adequada.

A aleatoriedade foi inserida com um processo de Wiener. Sua integração foi feita com fórmula de Itô. A discretização da fórmula de Itô foi desenvolvida com números aleatórios normalmente distribuídos, através de um algoritmo de Marsaglia.

Foram traçadas trajetórias amostrais a partir da solução da equação de Burgers 1D invíscida e estocástica. O parâmetro b , relevância estocástica, foi variado, e as oscilações foram maiores para valores maiores de b .

Conclui-se que a estratégia utilizada poderá ser aplicada na solução de uma equação de Navier-Stokes estocástica.

Funding: Os autores agradecem ao suporte financeiro da FAPESP (PROCESSO FAPESP: 2023/03984-3).

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Referências

1. Aksan, E.N., and Özdeş A. A numerical solution of Burgers' equation. *Appl. Math. Comput.* **2004**, 156.2, 395-402. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.07.027>
2. Babu, A., Han, B., and Asharaf, N. Numerical solution of the viscous burgers' equation using localized differential quadrature method. *Partial Differ. Equ. Appl. Math.* **2021**, 4, 100044 <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100044>
3. Mukundan, V., and Awasthi, A. Efficient numerical techniques for Burgers' equation. *Appl. Math. Comput* **2015**, 262, 282-297. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.122>
4. Bianchi, L. A., and Flandoli, F. Stochastic Navier-Stokes equations and related models. *Milan J. Math.* **2020**, 88, 225-246. <https://doi.org/10.1007/s00032-020-00312-9>
5. Bertini, L., Cancrini, N., and Jona-Lasinio, G. The stochastic Burgers equation. *Commun. Math. Phys.* **1994**, 165, 211-232. <https://doi.org/10.1007/BF02099769>
6. Vianna Jr., A. S., and Nichele, J. Modeling an annular flow tubular reactor. *Chem. Eng. Sci.* **2010**, 65.14, 4261-4270. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2010.04.016>
7. Nakama, C. S. M., Siqueira, A. F., and Vianna Jr., A. S. Stochastic axial dispersion model for tubular equipment. *Chem. Eng. Sci.* **2017**, 171, 131-138. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2017.05.024>
8. Vianna Jr., A.S. *Euações Diferenciais Uma visão intuitiva usando exemplos*. Editora Blucher, São Paulo, 2021.
9. Vianna Jr., A.S., Oliveira, C. J. Equações Diferenciais Estocásticas na Engenharia Química. *VETOR* **2020**, 30(2), 14-21. <https://doi.org/10.14295/vetor.v30i2.12971>
10. Kloeden, P. E., Platen, E., Schurz, H. *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Springer Science & Business Media, 2002.
11. Gaines, J. G. Numerical experiments with S(P)DE's. London Mathematical Society Lecture Note Series, 1995, 55-71.
12. Gubinelli, M., and Perkowski, N. The infinitesimal generator of the stochastic Burgers equation. *Probability Theory and Related Fields* **2020**, 178(3-4), 1067-1124. <https://doi.org/10.1007/s00440-020-00996-5>