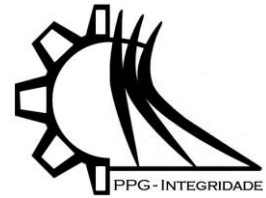




ISSN 2447-6102



Artigo/Article

# Valores de parâmetros para a convergência do algoritmo Talbot Fixo de inversão numérica da transformada de Laplace aplicado a um problema de valores iniciais e de contorno

Marcolino, I. H. T.<sup>1</sup>, Pérez-Fernández, L. D.<sup>2,\*</sup> e/and Costa, C. P.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Licenciatura em Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas; iago.mat@hotmail.com

<sup>2</sup> Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas; leslie.fernandez@ufpel.edu.br

<sup>3</sup> Departamento de Matemática e Estatística, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas; camila.costa@ufpel.edu.br

\* Correspondência/Correspondence: leslie.fernandez@ufpel.edu.br

Received: 18/01/2024; Accepted: 25/01/2024; Published: 31/01/2024

**Resumo:** Para a inversão numérica da transformada de Laplace pelo algoritmo Talbot Fixo é necessário escolher adequadamente valores para os parâmetros  $M$  (número de somandos) e  $N$  (relacionado ao parâmetro de fixação  $r$ ) para que haja convergência. Existe uma conjectura de que é condição suficiente para convergir que a razão seja  $5 < M/N < 19$ , utilizando  $N = 5$ . Porém, esse intervalo sugerido foi obtido a partir de experimentos apenas em funções teste. Neste trabalho, foram realizados experimentos computacionais com a inversão numérica da transformada de Laplace pelo algoritmo Talbot Fixo na resolução de um problema de valores inicial e de contorno para a equação do calor, comparando as superfícies das inversões analítica e numérica, obtendo-se que o intervalo sugerido foi suficiente para manter a convergência, reforçando assim o critério de escolha dos valores dos parâmetros.

**Palavras chave:** transformada de Laplace; transformada inversa; inversão numérica; algoritmo Talbot Fixo; parâmetros de convergência

## Values of parameters for the convergence of Fixed Talbot algorithm of numerical inversion of Laplace transform applied to an initial and boundary value problem

**Abstract:** The numerical inversion of the Laplace transform via Fixed Talbot algorithm requires to adequately choose the values of parameters  $M$  (number of summands) and  $N$  (related to the fixing parameter  $r$ ) in order to achieve convergence. There is a conjecture for a sufficient condition for convergence which proposes  $5 < M/N < 19$ , with  $N = 5$ . However, the suggested interval was obtained from experiments with test functions. In this work, computational experiments of the numerical inversion of the Laplace transform via Fixed Talbot for the solution of an initial and boundary value problem for the heat equation are carried out and the results are compared to those of the analytical inversion, and resulting that the suggested interval is sufficient to maintain convergence and so reinforcing the selection criterion of parameters values.

**Keywords:** Laplace transform; inverse transform; numerical inversion; Fixed Talbot algorithm; convergence parameters



### 1. Introdução

O último passo para resolver equações diferenciais via transformada de Laplace é aplicar a transformada inversa (Schiff, 1999). Porém, dependendo da função a ser invertida, isso pode ser muito difícil (quando não impossível) de conseguir analiticamente, como acontece comumente na prática. Esse é o principal motivo da utilização de algum método numérico de inversão da transformada de Laplace. Há muitos métodos de inversão numérica da transformada de Laplace como Durbin, Dubner-Abate, Euler, Graver-Stehfest e Talbot Fixo (Lemos *et al.*, 2021). Após experimentar os métodos citados acima, o método de Talbot Fixo (Abate e Valkó, 2004) é o que tem melhor desempenho em relação à precisão e ao tempo computacional (Lemos *et al.*, 2021). O algoritmo de Talbot Fixo necessita da escolha adequada dos valores de dois parâmetros para ter-se a convergência, porém essa tarefa pode se tornar difícil para algumas funções. Entretanto, Marcolino *et al.* (2023) apresenta uma conjectura sugerindo que a escolha adequada para os valores desses parâmetros, a fim de garantir a convergência, deve ser tal que sua razão esteja no intervalo (5,19).

Neste trabalho será comparada a aplicação da transformada de Laplace inversa analítica com a inversão numérica por Talbot Fixo, dentro do escopo da resolução de um problema de valores iniciais e de contorno para a equação do calor para testar a condição suficiente conjecturada por Marcolino *et al.* (2023).

### 2. Materiais e Métodos

Segundo Abate e Valkó (2004), foi Talbot (1979) quem começou a utilizar métodos numéricos para inverter a transformada de Laplace baseados na deformação do contorno da integral de Bromwich

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_B e^{ts} \hat{f}(s) ds, \tag{1}$$

em que  $\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  é a transformada de Laplace da função  $f(t)$  e  $B$  é a reta vertical definida no plano complexo como  $s = r + iy$ ,  $-\infty < y < \infty$ , em que  $r$  tem valor fixo escolhido de maneira que toda singularidade de  $\hat{f}(s)$  esteja à esquerda de  $B$ .

Deste modo Talbot apresenta a seguinte fórmula para a inversão numérica da transformada de Laplace:

$$f(t) \approx \frac{r}{M} \left\{ \frac{1}{2} \hat{f}(r) e^{rt} + \sum_{k=1}^{M-1} \operatorname{Re} [e^{ts(\theta_k)} \hat{f}(s(\theta_k)) (1 + \sigma(\theta_k))] \right\} \equiv f_{TF}(t), \tag{2}$$

em que  $\theta_k = k\pi/M$ ,  $\sigma(\theta) = \theta + (\theta \cot \theta - 1) \cot \theta$ ,  $r = 2M/Nt$  com  $N = 5$ .

Após testes realizados por Marcolino *et al.* (2023) chegou-se à conjectura de que é condição suficiente para convergência que os valores de  $M$  e  $N$  do parâmetro  $r$  são tais que  $5 < M/N < 19$ . Incluindo utilizar pelo menos  $N = 5$  tal como definido por Abate e Valkó (2004), ou seja  $N \geq 5$  no intervalo sugerido.

### 3. Resultados

#### 3.1. Formulação do problema e resolução analítica

Considerando a equação do calor para representar a distribuição da temperatura  $u(x, t)$  em uma barra de metal homogêneo de comprimento unitário e condutividade térmica  $\kappa$ , com distribuição inicial senoidal e extremidades de temperatura nula, tem-se o seguinte problema (Ferreira, 2019):

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, & x \in (0,1) \end{cases} . \tag{3}$$

Seja  $\hat{u}(x, s) = \mathcal{L}[u(x, t)]$ . Logo, considerando  $s$  como um parâmetro, de aplicar a transformada de Laplace na equação diferencial do problema (3) tem-se

$$s\hat{u}(x, s) - u(x, 0) - \kappa \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} = 0, \quad x \in (0,1), \tag{4}$$

que, empregando a condição inicial do problema (3), resulta na seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem linear não homogênea

$$\frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - \frac{s}{\kappa}\hat{u}(x, s) = -\frac{1}{\kappa}\text{sen } \pi x, \quad x \in (0,1), \tag{5}$$

Aplicando a transformada nas condições de contorno do problema (3), tem-se

$$\hat{u}(\bar{x}, s) = \mathcal{L}[u(\bar{x}, t)] = \mathcal{L}[0] = 0, \quad \bar{x} \in \{0,1\}. \tag{6}$$

Dessa forma, obtém-se o seguinte problema de valores de contorno

$$\begin{cases} \frac{d^2\hat{u}}{dx^2} - \frac{s}{\kappa}\hat{u}(x, s) = -\frac{1}{\kappa}\text{sen } \pi x, & x \in (0,1) \\ \hat{u}(0, s) = \hat{u}(1, s) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

A solução geral  $\hat{u}_0(x, s; C_1, C_2)$  da equação homogênea associada à equação diferencial do problema (7) é

$$\hat{u}_0(x, s; C_1, C_2) = C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{\kappa}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{\kappa}x}, \tag{8}$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias.

Ainda, uma solução particular da equação diferencial não homogênea no problema (7) é

$$\hat{u}_p(x, s) = \frac{\text{sen } \pi x}{\kappa\pi^2 + s}. \tag{9}$$

Logo, somando a solução particular (9) da equação não homogênea com a solução (8) da equação homogênea associada, consegue-se a solução geral  $\hat{u}(x, s; C_1, C_2)$  da equação do problema (7):

$$\hat{u}(x, s; C_1, C_2) = \hat{u}_p(x, s) + \hat{u}_0(x, s) = \frac{\text{sen } \pi x}{\kappa\pi^2 + s} + C_1 e^{\frac{\sqrt{s}}{\kappa}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{s}}{\kappa}x}. \tag{10}$$

Aplicando as condições de contorno do problema (7) a (10) chega-se em  $C_1 = C_2 = 0$ . Assim, a solução do problema (7) é

$$\hat{u}(x, s) = \frac{\text{sen } \pi x}{\kappa\pi^2 + s}. \tag{11}$$

Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa a (11),  $u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{u}(x, s)]$ , encontra-se a solução do problema (3) (ver, Figura 1):

$$u(x, t) = e^{-\kappa\pi^2 t} \text{sen } \pi x. \tag{12}$$

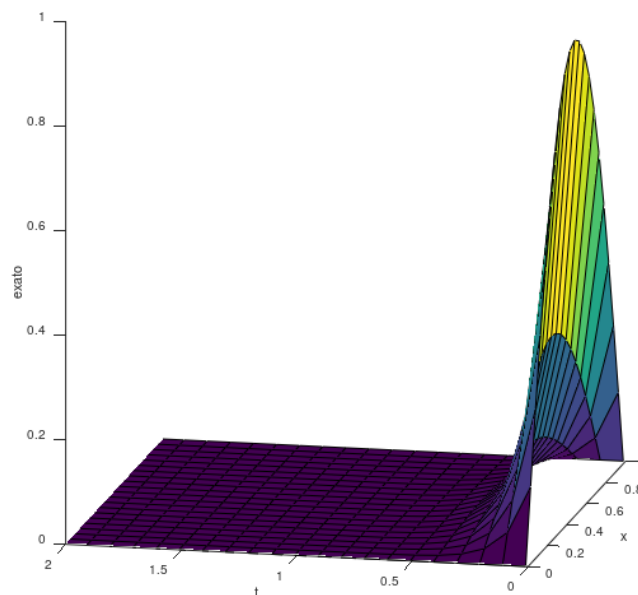
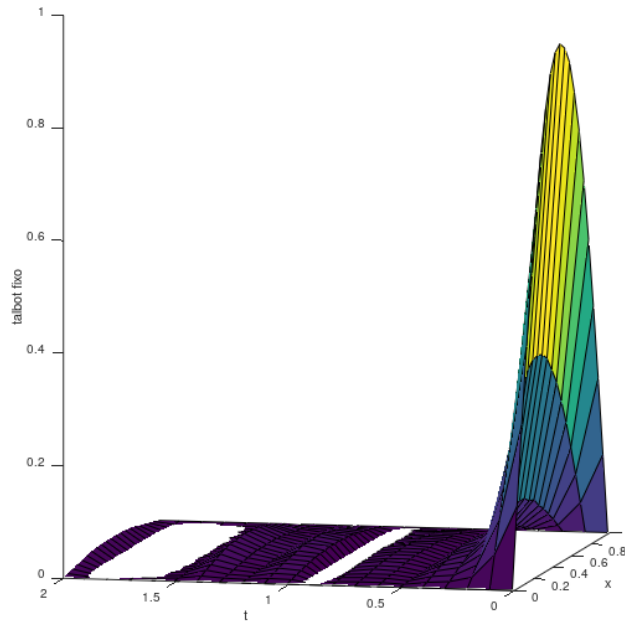


Figura 1. Solução exata (12) do problema (3).

3.2. Resultados computacionais

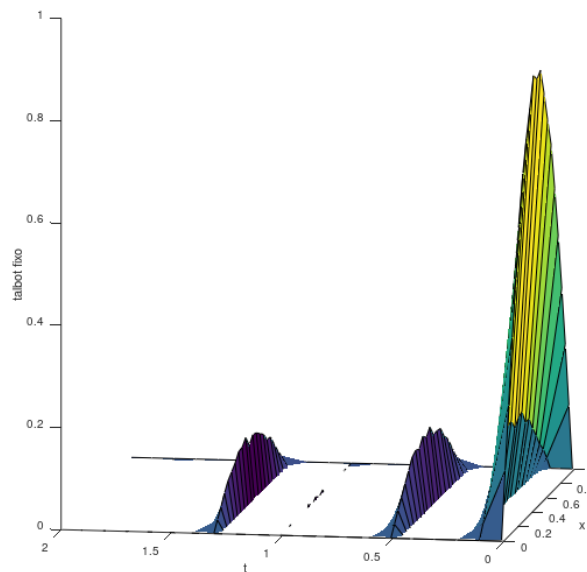
Tendo a superfície da solução analítica (12) do problema original (3) como referência (Figura 1), será aplicado a transformada de Laplace inversa numérica em (11) variando os parâmetros  $M$  e  $N$  para fora das extremidades do intervalo (5,19) sugerido para convergência da inversão numérica via algoritmo Talbot Fixo (2) aplicada à solução (11) do problema (7) no espaço de Laplace, afim de encontrar quando passa a apresentar distorções visíveis em comparação com a superfície da solução analítica (Figura 1).

Utilizando os valores dos parâmetros  $M = 119$  e  $N = 7$  ( $M/N = 17$ ) os erros já começam a ser visíveis; veja a Figura 2 a seguir:



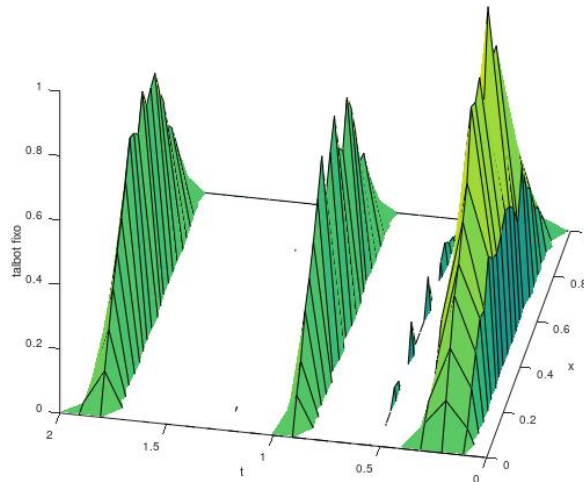
**Figura 2.** Solução aproximada do problema original (3) inversão numérica via algoritmo Talbot Fixo (2) aplicada à solução (11) do problema (7) no espaço de Laplace com  $M = 119$  e  $N = 7$ .

Aplicando os valores dos parâmetros  $M = 126$  e  $N = 7$  ( $M/N = 18$ ) os erros se amplificam; veja a Figura 3 a seguir:



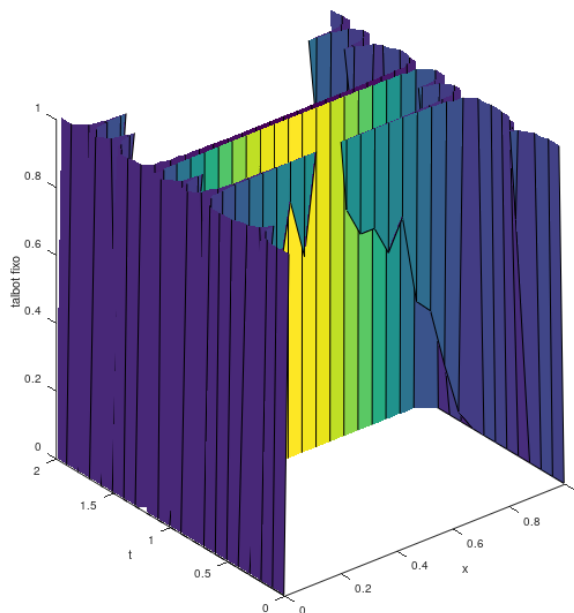
**Figura 3.** Solução aproximada do problema original (3) inversão numérica via algoritmo Talbot Fixo (2) aplicada à solução (11) do problema (7) no espaço de Laplace com  $M = 126$  e  $N = 7$ .

Agora, utilizando os valores  $M = 133$  e  $N = 7$  ( $M/N = 19$ ) o gráfico mostra erros ainda mais evidentes; veja a Figura 4:



**Figura 4.** Solução aproximada do problema original (3) inversão numérica via algoritmo Talbot Fixo (2) aplicada à solução (11) do problema (7) no espaço de Laplace com  $M = 133$  e  $N = 7$ .

Utilizando  $M = 140$  e  $N = 7$  ( $M/N = 20$ ) o erro de cálculo da inversão numérica fica ainda maior do que o cálculo anterior; observe a Figura 5:



**Figura 5.** Solução aproximada do problema original (3) inversão numérica via algoritmo Talbot Fixo (2) aplicada à solução (11) do problema (7) no espaço de Laplace com  $M = 140$  e  $N = 7$ .

#### 4. Discussão

Ao aumentar a razão  $M/N$  para valores maiores que 20 o erro só aumenta, mostrando gráficos cada vez mais distorcidos, e isso reforça a conjectura para convergência numérica por Talbot Fixo do extremo superior  $M/N = 19$  do intervalo sugerido (5,19). Para o ínfimo  $M/N = 5$  do intervalo sugerido, a inversão numérica de (11) não mostra erros evidentes para  $1 \leq M/N < 5$  resultando em gráficos semelhantes ao da superfície exata na Figura 1.

A Tabela 1 mostra o máximo erro absoluto para cada uma das superfícies geradas pela inversão numérica por Talbot Fixo de (11), na qual pode-se observar o aumento do erro ao elevar a razão  $M/N$  para fora do intervalo sugerido.

**Tabela 1.** Máximo erro absoluto das inversões numéricas.

$M$	$N$	$M/N$	Erro
119	7	17	0,0344
126	7	18	0,3487
133	7	19	2,8153
140	7	20	32,304

## 5. Conclusions

Neste trabalho foi apresentado de forma resumida um estudo sobre a conjectura que sugere uma condição suficiente para a convergência da inversão numérica da transformada de Laplace por Talbot Fixo. O método numérico converge dentro do intervalo sugerido  $5 < M/N < 19$ . Ainda, houve convergência fora do intervalo, ou seja, quando  $1 \leq M/N < 5$  como esperado, pois a conjectura sugere uma condição suficiente e não necessária. Para valores de  $M/N > 19$  não houve convergência, cumprindo bem a sugestão. Isso reforça um critério de escolha dos parâmetros.

**Financiamento:** Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) mediante bolsa de iniciação científica do primeiro autor.

**Reconhecimentos:** Os autores reconhecem os organizadores do XI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional do Rio Grande do Sul (ERMAR-RS) ocorrido de 28 a 30 de junho de 2023 em Pelotas-RS, em que uma versão prévia deste trabalho foi apresentada.

**Conflitos de Interesse:** Os autores declaram a inexistência de conflitos de interesse. A agência de fomento supracitada não teve qualquer papel no projeto do estudo; na coleta, análises ou interpretação dos dados; na escrita do manuscrito, ou na decisão de publicar os resultados.

## Referências

- Schiff, J.L. *The Laplace Transform: Theory and Applications*, 1st ed.; Springer: New York, 1999. DOI: 10.1007/978-0-387-22757-3
- Lemos, C. H.; Costa, C. P.; Pérez-Fernández, L. D.; Ferreira, A. M.; Silva, E. C. Análise do Desempenho de Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace. *Intermaths* **2021**, *2*, 75-90. DOI: 10.22481/intermaths.v2i2.9716.
- Abate, J.; Valkó, P.P. Multi-Precision Laplace Transform Inversion. *Journal for Numerical Methods in Engineering* **2004**, *60*, 979-993. DOI: 10.1002/nme.995.
- Marcolino, I.H.T.; Pérez-Fernández, L.D.; Costa, C.P. Valores dos Parâmetros Relevantes para Convergência da Inversão Numérica da Transformada De Laplace pelo Algoritmo Talbot Fixo. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão* **2023**, *8*, 527939. DOI: 10.21575/25254782rmetg2023vol8n12539.
- Talbot, A. The Accurate Numerical Inversion of Laplace Transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics* **1979**, *23*, 97-120. DOI: 10.1093/imamat/23.1.97.
- Ferreira, A.M. Homogeneização Assintótica com Transformada de Laplace na Modelagem de Meios Microperiódicos. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.