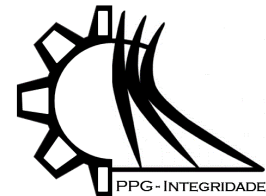




ISSN 2447-6102



Article

Aspectos computacionais da inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada a um problema de transporte

Ferreira, J.A. ^{1*}, Calixto, G.R.L. ², Konflaz, E. ³, Rodriguez, B. D. A. ⁴, Prolo Filho, J.F. ⁵

¹ Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande-FURG;

juciarappgmc@gmail.com

² Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande-FURG;

libardicalixto@hotmail.com

³ Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande-FURG;

elisandrakonflanz@gmail.com

⁴ Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal do Rio Grande-FURG;

barbararodriguez@furg.br

⁵ Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Universidade Federal do Rio Grande-FURG;

joaoprolo@furg.br

* Correspondente: juciarappgmc@gmail.com

Received: 06/11/2020; Accepted: 05/12/2020; Published: 31/12/2020.

Resumo: Abordagens numéricas de inversão são necessárias quando a Transformada de Laplace não pode ser invertida analiticamente por técnicas usuais. Baseados normalmente em problemas mal postos, não há um método que seja universal no sentido de fornecer soluções precisas para todas as classes de problemas. Nesse trabalho, explorou-se o uso de quatro métodos para a inversão numérica da Transformada de Laplace, com o objetivo de avaliar seu desempenho na resolução de problemas de condução de calor unidimensional em regime transiente: Stehfest, Talbot-Fixo, Séries de Fourier e Zakian. Primeiramente foram investigados os parâmetros livres ideais de cada método e a sua eficiência no tratamento de funções elementares. Nesse processo, o método de Talbot-Fixo mostrou-se eficiente na inversão tanto de funções com comportamento oscilatório quanto envolvendo exponenciais decrescentes. Especificamente para esta última classe de funções, os métodos de Stehfest e Zakian forneceram resultados satisfatórios. No tratamento do problema de condução de calor, os quatro métodos demonstraram um bom desempenho, sendo que o Talbot-Fixo apresentou melhores resultados (menor erro absoluto) quando comparado aos demais.

Palavras-chave: Transformada de Laplace; Métodos Numéricos; Problema de Condução de Calor.

Computational aspects on numerical inversion of the Laplace Transform applied to transport problem

Abstract: The use of numerical inversion approaches becomes necessary when the Laplace Transform cannot be inverted analytically by usual techniques. However, the numerical inverse Laplace transform is generally an ill posed problem, and there is no universal method which works well for all problems. In this study, we selected four commonly used numerical inverse Laplace transform methods to evaluate their performance in dealing with heat conduction problems. This work explored the use of four methods for the numerical inversion of Laplace transform, in order to evaluate its performance in solving transient one-dimensional heat conduction problems: the Stehfest, the Fixed-Talbot, the Fourier Series and the Zakian methods. We specifically investigated, in this process, each method's optimal free parameters and its efficiency in elementary functions treatment. In this process, the Talbot-Fixed method proved to be efficient for the inversion of both functions with oscillatory behavior and involving decreasing expo-



nentials. Specifically, for the latter class of functions, the methods of Stehfest and Zakian provided satisfactory results. In the study of the heat conduction problem, the four methods presented good performance, and the Talbot-Fixo presented better results (less absolute error) when compared to the others.

Keywords: *Laplace Transform; Numerical Methods; Heat Conduction Problem.*

1. Introdução

Na análise de um problema de condução de calor, busca-se determinar a distribuição da temperatura no interior de um sólido, a partir da equação de transporte de energia e dos valores do fluxo de calor ou da temperatura na superfície. O conhecimento da distribuição de temperatura pode ser empregado na avaliação da integridade estrutural, através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. Também pode ser usada para otimização da espessura de um material isolante ou para determinar a compatibilidade ou eficiência no uso de revestimentos. Para investigar a distribuição de temperatura em um meio, o método da Transformada de Laplace pode ser considerada uma poderosa ferramenta na obtenção de soluções. Entre as vantagens que se atribui à referida técnica está a capacidade de reduzir os problemas em casos mais simples, uma vez que suas condições iniciais são “incorporadas” ao próprio equacionamento, não sendo preciso determinar as soluções gerais através de problemas de valor inicial (PVI’s). Porém, pode-se encontrar dificuldades na etapa de inversão da transformada pois, dependendo do formato dessas expressões, a inversão pode não é possível através das técnicas usuais (Pilatti et al., 2019). Uma vez que a inversão das soluções do domínio de Laplace para o domínio real (domínio do tempo) é geralmente de difícil execução analítica, o desenvolvimento e aplicação de métodos para o cálculo da transformada inversa numérica de Laplace tem ganho destaque. Valkó e Abate (2004) estimam que exista mais de cem métodos dedicados à inversão numérica da transformada de Laplace, podendo ser eles baseados na aproximação da integral complexa de inversão (Dubner e Abate, 1968; Durbin, 1974; Crump, 1976; D’Amore et al., 2012), na fórmula de Post-Widder (Zakian, 1969; Stehfest, 1979; Valkó e Abate, 2004); ou na deformação do contorno de integração de Bromwich (Talbot, 1979; Valkó e Abate, 2004).

A não existência de uma técnica “universal” tem justificado a intensa pesquisa nessa área. Entre os critérios, tem sido avaliada a precisão numérica e o tempo de processamento, confirmando que nenhum método é superior em todos os aspectos, para todas as classes de funções (Pilatti, 2019). A metodologia padrão de teste que tem sido empregada é a de explorar o uso dessas técnicas numéricas na avaliação de funções transformadas, com características distintas, cuja transformada inversa analítica é conhecida (Duffy, 1993). Com isso, é possível fazer uma escolha mais racional do método a ser utilizado, por exemplo, pela observação da forma como se apresenta a versão transformada das soluções obtidas.

Diante disso, este trabalho busca realizar testes e fazer a avaliação dos aspectos computacionais de quatro métodos dedicados à inversão numérica da Transformada de Laplace: Stehfest, Séries de Fourier (SF), Talbot-Fixo (TF) e Zakian. O problema-alvo é modelado pela equação de condução de calor em geometria cartesiana unidimensional (Junqueira, 1990). No processo, testou-se primeiro os quatro métodos citados a um conjunto de funções elementares, com a finalidade de avaliar o seu desempenho para a inversão de diferentes classes de funções e validar os algoritmos implementados. Escolheu-se o método de Stehfest por sua eficiência e volume de material disponível na literatura (Zhang et al., 2019; Zongxiao et al., 2017; Segatto et al., 2017; Wang e Zhan, 2015; Pilatti et al., 2019). O método de Talbot-Fixo, além de ser de fácil implementação, é uma técnica robusta de inversão (Moreira et al., 2014) que tem mostrado estabilidade numérica na resolução de problemas de dispersão de poluentes (Costa et al., 2018). O método de Zakian é uma aproximação da família das quadraturas numéricas, técnica bastante difundida na inversão da integral de Bromwich (Abate e Valkó, 2004). E o método de Séries de Fourier, foi escolhido com objetivo de investigar sua performance na inversão de problemas não-oscilatórios.

Vale lembrar que o trabalho de Junqueira (1990) utilizou o método de Stehfest, Crump (inspirado nas Séries de Fourier Seno e Cosseno) e Piessens (inspirado no método de Talbot) para resolução do problema de condução de calor na forma dimensional, e que seus resultados foram utilizados para validação do código computacional implementado neste artigo.

Como contribuição deste trabalho, dá-se destaque ao emprego dos quatro métodos numéricos para o tratamento de funções elementares com características bem distintas; a proposta de um critério de escolha dos métodos a partir do uso de funções elementares; o uso do algoritmo de Zakian e de outras variações dos métodos de Talbot e de Séries de Fourier para o tratamento do problema de condução de calor unidimensional em regime transiente; o fornecimento de uma solução geral e de mais resultados de referência para o referido problema escrito na forma dimensional. Por fim, entende-se que apresentar métodos para inversão numérica da Transformada de Laplace como uma alternativa à inversão analítica, acaba favorecendo também a aplicabilidade da Transformada como ferramenta para resolução de Equações Diferenciais.

2. Materiais e Métodos

Neste trabalho são avaliados quatro métodos de inversão numérica da transformada de Laplace. Cada método apresenta características próprias e adequadas à inversão de uma determinada classe de função.

2.1 Método de Stehfest

O dispositivo de Gaver-Stehfest é um algoritmo simples e de boa performance capaz de computar a transformada de Laplace inversa com pouca computação. Em seu trabalho, Davies e Martin (1979) desenvolveram um algoritmo aproximado para a transformada de Laplace inversa a fim de obter uma amostra computacional. Em seu estudo, consideram “métodos que calculam uma amostra”, apresentando a fórmula,

$$I_n(t) = \int_0^{\infty} \delta_n(t, u) f(u) du, \quad (1)$$

onde as funções $\delta_n(t, u)$ formam uma sequência convergente, de modo que $I_n(t)$ tende a $f(t)$ a medida que n aumenta. A fórmula de Post-Widder para inversão pode ser pensada como sendo obtida das funções

$$\delta_n(t, u) = \frac{\left(\frac{nu}{t}\right)^n e^{\left(\frac{-nu}{t}\right)}}{(n-1)!}. \quad (2)$$

Gaver (1966) propôs o uso da seguinte função

$$\delta_n(t, u) = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} a(1 - e^{-au})^n e^{-nau}, \quad (3)$$

onde $a = \ln(2)/t$. Porém a convergência de $I_n(t)$ para $f(t)$ é lenta. A fim de acelerar a aproximação do algoritmo, Stehfest (1970) desenvolveu uma fórmula de extrapolação para $f(t)$ dada por:

$$f(t) \approx a \sum_{k=1}^N V_k F\left(k \frac{\ln(2)}{t}\right), \quad (4)$$

onde

$$V_n = (-1)^{\left(n+\frac{N}{2}\right)} \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{\min\left(n, \frac{N}{2}\right)} \frac{k^{\frac{N}{2}} (2k)!}{\left(\frac{N}{2} - k\right)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)}. \quad (5)$$

O parâmetro N é o número de termos utilizado na equação (4) e seu valor é um número inteiro escolhido pelo método de tentativa e erro. A transformada inversa numérica tornar-se-ia mais precisa com um aumento no valor de N . No entanto, erros de arredondamento limitam o valor de N que pode ser usado (Moench e Ogata, 1981).

2.2 Método Séries de Fourier

Existem por volta de 40 métodos baseados nas séries de Fourier. Dubner e Abate foram os primeiros a utilizar este método em 1968. A Série de Fourier é uma técnica para inversão da Transformada de Laplace baseada no contorno de integração da integral de Bromwich. O método baseado em séries de Fourier desenvolvido por Dubner e Abate (1968) para a inversão numérica da Transformada de Laplace, relaciona a integral de Fourier com a Transformada Cosseno Finita de Fourier (Cohen, 2007). O dispositivo de Fourier proposto por Dubner e Abate (1968) inicia a partir da definição

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (6)$$

Assume-se $f(t)$ contínua e de ordem exponencial a , ou seja, $|f(t)| < Me^{at}$, para a constante e $M > 0$, resultando que a transformada $F(s)$ é então definida para $Re(s) > a$. A transformada inversa é dada pela fórmula da inversão

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} F(s) ds. \quad (7)$$

ou ainda

$$f(t) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\Re(F(s))\cos(\omega t) - \Im(F(s))\sen(\omega t)] + i[\Re(F(s))\sen(\omega t) + \Im(F(s))\cos(\omega t)]d\omega, \quad (8)$$

onde $s = a+i\omega$, $\Re(F(s))$ e $\Im(F(s))$ correspondem, respectivamente a parte real e imaginária da função $F(s)$ e definidas por

$$\Re(F(s)) = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad (9)$$

$$\Im(F(s)) = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sen(\omega t) dt. \quad (10)$$

Partindo da restrição usual de que $f(t)$ precisa ser uma função real (Durbin, 1974) e de que $f(t) = 0$ para $t < 0$, a equação (8) pode ser reescrita de modo que $f(t)$ passa a ser calculada por

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} [\Re(F(s))\cos(\omega t) - \Im(F(s))\sen(\omega t)]d\omega. \quad (11)$$

A técnica utilizada por Dubner e Abate (1968) para inverter numericamente $F(s)$ é uma aproximação da regra trapezoidal (Wang e Zhan, 2015) e envolve apenas a parte real de $F(s)$

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \Re(F(a)) + \sum_{k=1}^N \Re \left[F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right] \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right\}, \quad (12)$$

onde $T = 4t$ é o período de tempo, $\Re(F(s))$ é a parte real da função transformada e a é a constante livre.

2.3 Método de Talbot-Fixo

O método de Talbot-Fixo (TF) é um algoritmo com uma abordagem de simples implementação. O método de Talbot (Talbot, 1979) faz a integral de contorno de Bromwich convergir rapidamente, uma vez que η torna-se grande e negativo, tornando o termo e^{st} na integral muito pequeno. Abate e Valkó (2004) fixaram um dos parâmetros de Talbot; o contorno de Bromwich é parametrizado tal que

$$\eta(\theta) = r\theta \text{ onde } -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (13)$$

e como regra

$$r = \frac{2N}{t_{max}}. \quad (14)$$

Assim, o método de Talbot-Fixo é dado por:

$$f(t) = \frac{r}{N} \left\{ \frac{F(r)e^{rt}}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \Re \left[e^{t\eta(\theta_j)} F(\eta(\theta_j)) (1 + i\phi(\theta_j)) \right] \right\}, \quad (15)$$

onde $\phi(\theta_j) = \theta_j + (\theta_j \cot(\theta_j) - 1) \cot(\theta_j)$ e $\theta_j = j\pi/N$. Apesar de $F(r)$ não ser dependente de t , o parâmetro livre r depende de t_{max} .

2.4 Método de Zakian

O método de Zakian (Zakian, 1969) realiza a inversão numérica da transformada de Laplace derivando uma fórmula explícita utilizando uma série infinita de avaliações ponderadas para aproximar a função no domínio do tempo:

$$f(t) = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^N \Re \left[a_k F \left(\frac{b_k}{t} \right) \right]. \quad (16)$$

Tem-se a_k e b_k constantes, que podem tanto ser números reais, quanto pares conjugados complexos, e N o número de termos na soma do truncamento da série infinita. A Tabela 1 mostra os valores de a_k e b_k para $N = 5$ termos.

3. Resultados e Discussões

3.1 Funções Testes

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados numéricos obtidos através da inversão numérica da transformada de Laplace utilizando os métodos de Stehfest, Séries de Fourier, Talbot-Fixo e Zakian. Para a realização

dos testes e análise dos métodos de inversão foram empregadas três funções elementares apresentadas na Tabela 2. Estes testes têm como finalidade a avaliação do desempenho dos métodos para a inversão de diferentes classes de funções e validação dos algoritmos implementados.

Tabela 1. Parâmetros para o método de Zakian.

k	a_k	b_k
1	-36902.0821 +196990.4257i	12.83767675 +1.666063445i
2	61277.02524 -95408.62551i	12.22613209 +5.012718792i
3	-28916.56288 +18169.18531i	10.93430308 +8.409673116i
4	4655.361138 -1.9015286421i	8.776434715 +11.92185389i
5	-118.7414011 -141.3036911i	5.225453361 +15.72952905i

Tabela 2. Funções e suas respectivas transformadas inversas.

$F(s)$	$f(t)$
$F_1(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$	$f(t) = t \cos(t)$
$F_2(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$f(t) = \frac{e^{\left(\frac{-1}{4t}\right)}}{\sqrt{\pi t}}$
$F_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$	$f(t) = e^{-2t}(e^t - 1)$

As Tabelas 3-5 apresentam o erro absoluto e os valores dos parâmetros utilizados. As Figuras 1-3 mostram um comparativo entre a transformada inversa analítica e a transformada inversa numérica, para cada método. A avaliação dos aspectos computacionais foi realizada considerando-se 18 termos na soma do truncamento da série infinita. Exceto para o método de Zakian, que segundo a literatura, recomenda-se $N = 5$ (Halsted e Brown, 1972). Para os testes de validação dos algoritmos usou-se o software livre Fortran 95 em um sistema operacional Linux Ubuntu 18.04 memória (RAM) de 4.0GB e processador Intel inside.

3.1.1 Inversão para $F_1(s)$

Como pode-se observar nas Figuras 1(a)-1(d) e Tabela 3, os métodos, de uma forma geral, quando comparados à inversão das funções $F_2(s)$ e $F_3(s)$, não apresentam um bom desempenho na inversão de funções com comportamento oscilatório. A inversão numérica de Talbot-Fixo gera os menores erros nos primeiros instantes, de ordens 10^{-19} , 10^{-14} e 10^{-13} , mas à medida que t aumenta, eles tornam-se maiores, atingindo a ordem de 10^{-01} para $t = 10$. O algoritmo de Zakian obtém erros absolutos menores para $t = 10^{-04}$ s até $t = 5$ s. Já para os instantes finais, $t = 8$ s, 9 s e 10 s, são da ordem de 10^{-05} , 10^{-04} e 10^{-03} . Os erros absolutos para o método de Stehfest são da ordem de 10^{-12} e 10^{-05} para $t = 10^{-04}$ s e $t = 1$ s, entretanto, no final do intervalo de t , são da ordem de 10^{00} . A técnica baseada nas Séries de Fourier produz erros na ordem de 10^{-01} para todos os instantes.

Tabela 3. Erro absoluto para inversão de $F_1(s)$.

Método	Stehfest	Séries de Fourier	Talbot-Fixo	Zakian
Parâmetro	$N = 18$	$N = 18$	$N = 18$	$N = 5$
t	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
10^{-04}	1.290×10^{-12}	6.868×10^{-01}	5.370×10^{-19}	3.318×10^{-13}
1	5.288×10^{-05}	2.498×10^{-01}	5.029×10^{-14}	3.079×10^{-08}
2	8.662×10^{-03}	3.521×10^{-01}	1.018×10^{-13}	4.778×10^{-08}
3	7.845×10^{-02}	2.749×10^{-01}	9.636×10^{-14}	3.948×10^{-08}
4	4.461×10^{-01}	3.529×10^{-01}	6.719×10^{-11}	3.168×10^{-10}
5	9.599×10^{-01}	2.773×10^{-01}	2.172×10^{-08}	5.888×10^{-08}
6	6.925×10^{-01}	4.338×10^{-01}	2.470×10^{-06}	2.005×10^{-07}
7	3.159×10^{00}	2.671×10^{-01}	1.189×10^{-04}	3.970×10^{-06}
8	2.034×10^{00}	5.789×10^{-01}	2.398×10^{-03}	2.503×10^{-05}
9	4.322×10^{00}	2.261×10^{-01}	2.427×10^{-03}	1.945×10^{-04}
10	6.729×10^{00}	7.942×10^{-01}	8.723×10^{-01}	2.428×10^{-03}

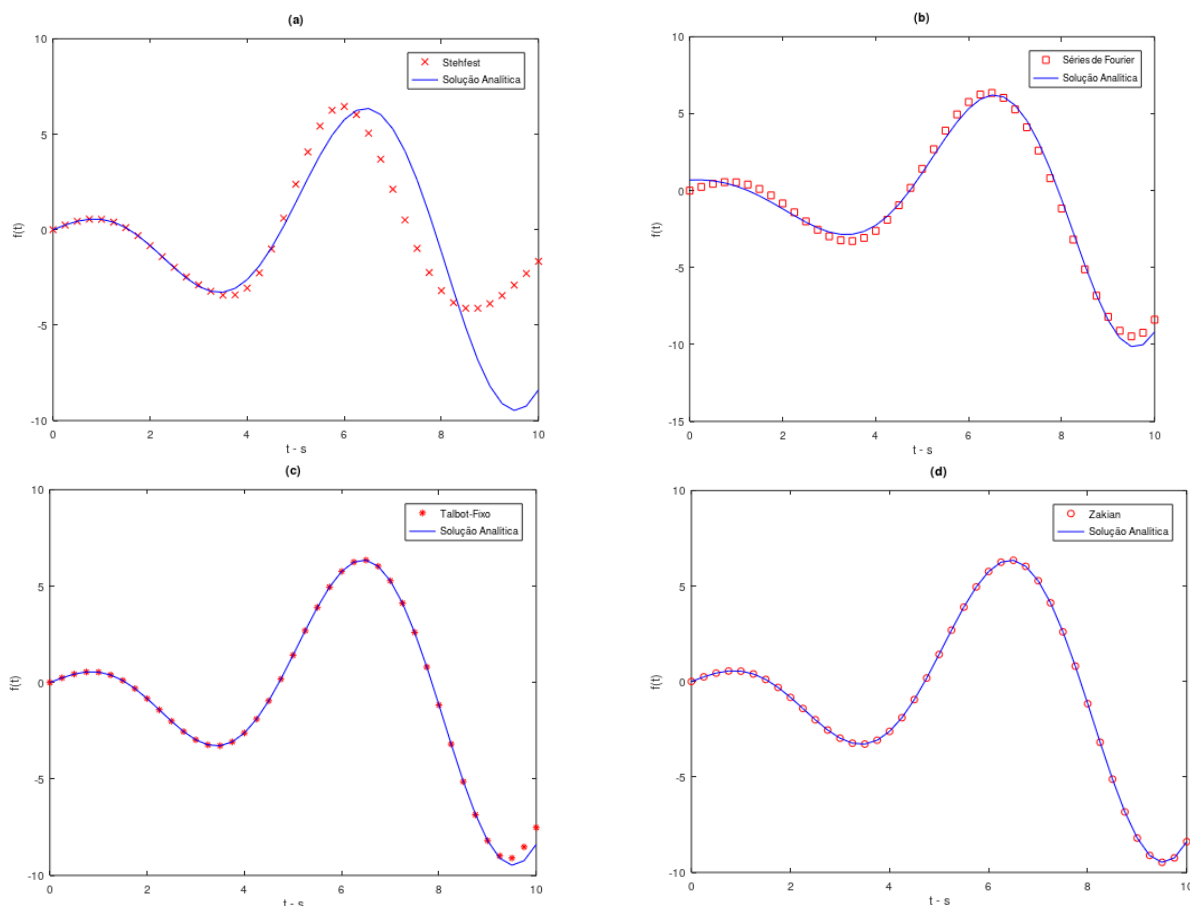


Figura 1. Transformada de Laplace numérica inversa para $F_2(s)$ para os métodos de (a) Stehfest, (b) Séries de Fourier, (c) Talbot-Fixo e (d) Zakian.

3.1.2 Inversão para $F_2(s)$.

As Figuras 2(a)-2(d) e Tabela 4 mostram os testes de inversão numérica da transformada de Laplace através dos métodos de Stehfest, Séries de Fourier, Talbot-Fixo (TF) e Zakian para a função $F_2(s)$. O algoritmo de Zakian produz erros absolutos na ordem de 10^{-03} para todos os instantes, exceto para $t= 10^{-04}$.s. TF é o que apresenta os melhores resultados, com erro absoluto inicial na ordem de 10^{-183} e para os demais instantes, a partir de $t=2$ s, ordem de 10^{-13} . O método de Stehfest mantém um erro absoluto na ordem de 10^{-07} , exceto para $t = 3$ s. A técnica baseada nas Séries de Fourier, assim como Zakian, não demonstrou um bom desempenho, quando comparado aos demais métodos citados, apresentando erros absolutos com a ordem variando entre 10^{-04} e 10^{-01} .

Tabela 4. Erro absoluto para inversão de $F_2(s)$.

Método	Stehfest	Séries de Fourier	Talbot-Fixo	Zakian
Parâmetro	$N = 18$	$N = 18$	$N = 18$	$N = 5$
t	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
10^{-04}	5.973×10^{-07}	3.587×10^{-01}	1.679×10^{-183}	0.000
1	8.056×10^{-07}	3.476×10^{-02}	2.386×10^{-14}	1.757×10^{-03}
2	6.585×10^{-07}	2.043×10^{-02}	4.046×10^{-13}	1.090×10^{-03}
3	9.439×10^{-06}	2.042×10^{-03}	6.263×10^{-13}	5.380×10^{-03}
4	1.122×10^{-07}	1.277×10^{-02}	6.771×10^{-13}	6.758×10^{-03}
5	1.709×10^{-07}	5.283×10^{-04}	6.194×10^{-13}	6.145×10^{-03}
6	7.499×10^{-07}	1.203×10^{-02}	5.304×10^{-13}	4.555×10^{-03}
7	7.733×10^{-07}	5.644×10^{-04}	4.494×10^{-13}	2.589×10^{-03}
8	7.583×10^{-07}	1.368×10^{-02}	3.524×10^{-13}	5.597×10^{-03}
9	4.262×10^{-07}	6.190×10^{-04}	2.689×10^{-13}	1.379×10^{-03}
10	5.469×10^{-07}	1.694×10^{-02}	1.814×10^{-13}	3.161×10^{-03}

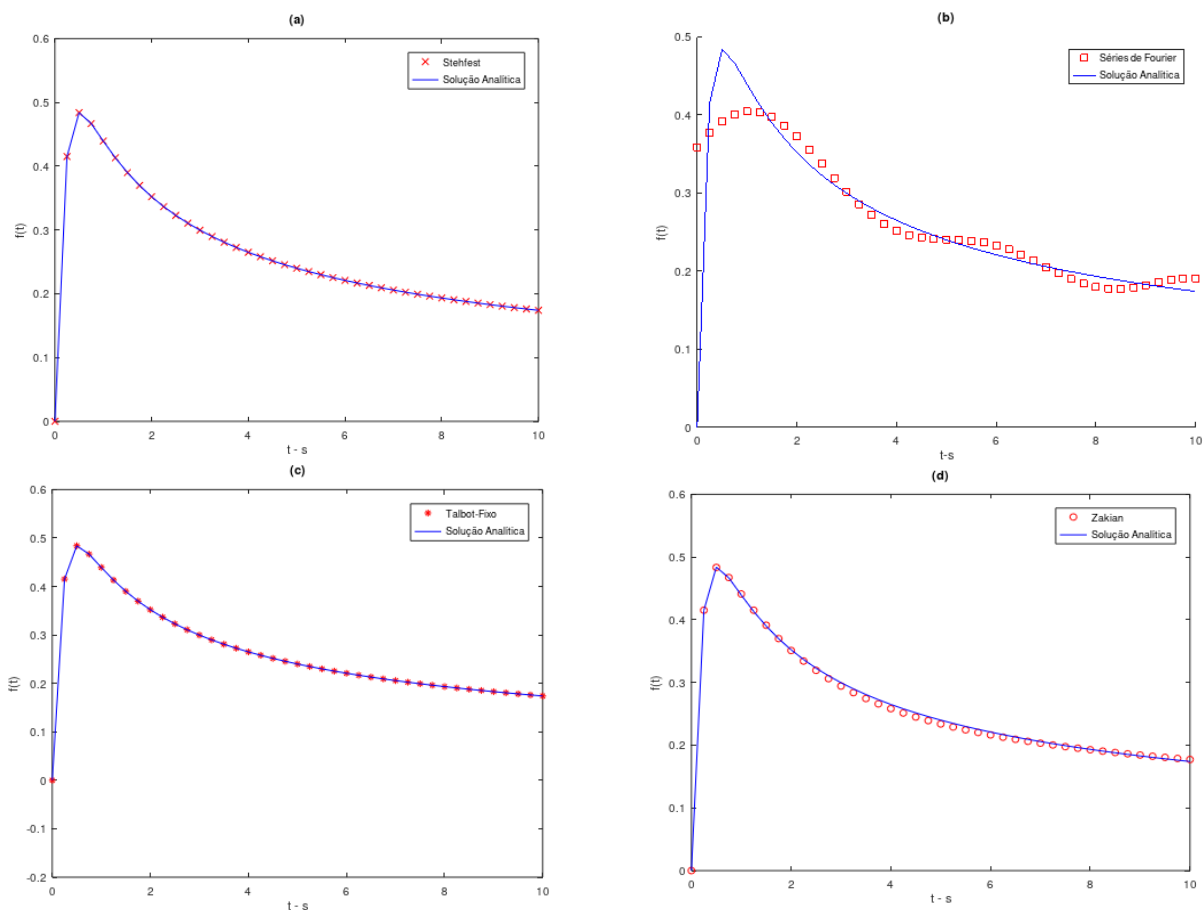


Figura 2. Transformada de Laplace numérica inversa para $F_2(s)$ para os métodos de (a) Stehfest, (b) Séries de Fourier, (c) Talbot-Fixo e (d) Zakian.

3.1.3 Inversão para $F_3(s)$

Nas Figuras 3(a)-3(d) apresenta-se um comparativo entre a solução exata e a inversão da Transformada de Laplace através dos métodos citados. A Tabela 5 mostra o erro absoluto para a inversão numérica de $F_3(s)$. Para $t = 10^{-04}$ s, o método de Stehfest apresenta o menor erro, na ordem de 10^{-12} . Para os demais instantes, erros da ordem de 10^{-07} , 10^{-06} , 10^{-05} . De forma semelhante a Stehfest, o método de inversão de Zakian produz o menor erro absoluto, na ordem de 10^{-13} para o instante inicial. Erros na ordem de 10^{-08} , 10^{-07} , 10^{-06} , 10^{-05} são apresentados para os demais instantes. Para a técnica de inversão baseada nas Séries de Fourier, o erro absoluto é da ordem de 10^{-06} nos instantes $t = 9$ s e 10 s. O método de TF segue apresentando os melhores resultados com erro absoluto oscilando entre 10^{-17} e 10^{-13} .

Tabela 5. Erro absoluto para inversão de $F_3(s)$.

Método	Stehfest	Série de Fourier	Talbot-Fixo	Zakian
Parâmetro	$N = 18$	$N = 18$	$N = 18$	$N = 5$
t	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
10^{-04}	2.768×10^{-12}	3.472×10^{-01}	9.649×10^{-17}	3.319×10^{-13}
1	2.939×10^{-07}	4.395×10^{-02}	4.432×10^{-14}	1.839×10^{-08}
2	2.090×10^{-06}	7.957×10^{-03}	8.792×10^{-14}	2.006×10^{-08}
3	8.030×10^{-07}	4.109×10^{-03}	1.244×10^{-13}	1.570×10^{-08}
4	7.214×10^{-06}	1.002×10^{-03}	1.551×10^{-13}	1.208×10^{-08}
5	6.978×10^{-06}	4.835×10^{-04}	1.546×10^{-13}	4.565×10^{-08}
6	1.086×10^{-06}	1.780×10^{-04}	2.226×10^{-13}	3.342×10^{-07}
7	8.104×10^{-06}	6.059×10^{-05}	2.613×10^{-13}	1.648×10^{-06}
8	1.039×10^{-05}	3.394×10^{-05}	1.956×10^{-13}	5.814×10^{-06}
9	8.893×10^{-06}	7.174×10^{-06}	1.834×10^{-13}	1.606×10^{-05}
10	5.111×10^{-06}	6.532×10^{-06}	1.959×10^{-13}	3.697×10^{-05}

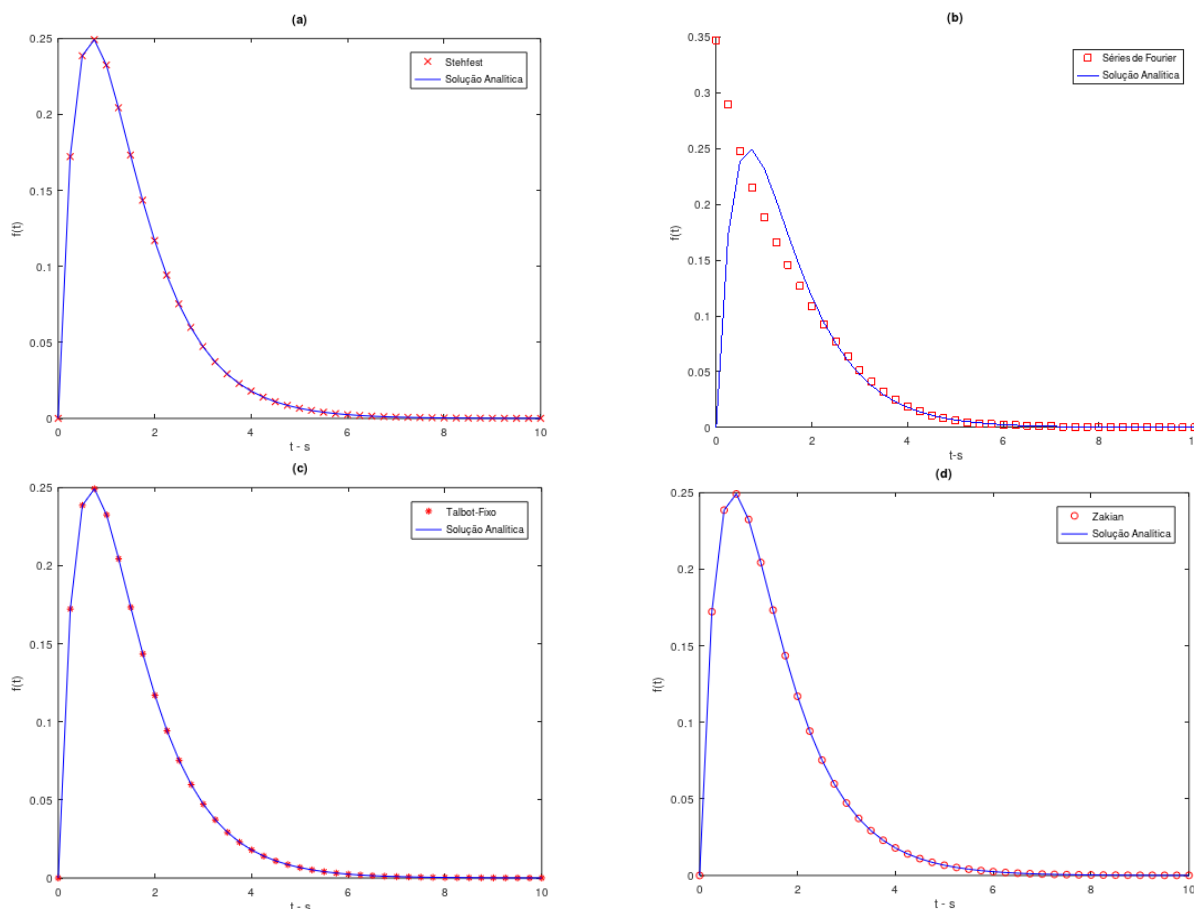


Figura 3. Transformada de Laplace numérica inversa para $F_3(s)$ para os métodos de (a) Stehfest, (b) Séries de Fourier, (c) Talbot-Fixo e (d) Zakian.

Além de serem testados para a inversão de três funções elementares, os métodos são aplicados na inversão numérica da solução transformada de Laplace de um problema de condução de calor unidimensional. Na subseção 3.2 estão a descrição do problema e sua solução empregando a Transformada de Laplace, bem como os resultados da inversão numérica através dos métodos de Stehfest, Séries de Fourier, Talbot-Fixo e Zakian.

3.2 A inversão numérica da Transformada de Laplace aplicada na solução de um problema de transporte

3.2.1 Equação da Condução do Calor: descrição e solução analítica do problema

Considera-se um problema de condução de calor em geometria cartesiana unidimensional, com coeficiente de difusão uniforme e constante (Junqueira, 1990), representado por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{17}$$

$$T(x, 0) = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, x = 0, \tag{19}$$

$$T(L, t) = t, \tag{20}$$

onde D é o coeficiente de difusão.

A notação da transformada de Laplace que representa a temperatura que se quer determinar, pode ser definida por:

$$\bar{T}(x, s) = L\{T(x, t)\} = \int_0^{\infty} T(x, t)e^{-st} dt, \quad (21)$$

sempre que a integral imprópria, representada em (21) convergir, sendo T a temperatura, s e x as variáveis da equação, t o tempo, L , o operador de Laplace e \bar{T} a transformada de Laplace. A transformada de Laplace pode ser invertida no domínio do tempo e determinada diretamente da fórmula integral de Bromwich:

$$T(x, t) = L^{-1}\{\bar{T}(x, s)\} = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{T}(x, s)e^{st} ds, \quad (22)$$

onde L^{-1} é o operador inverso de Laplace e $\sigma > 0$ uma constante real. No entanto, a principal dificuldade do emprego de (22) está em determinar a inversa, que em geral, é de difícil execução analítica, pois envolve a Teoria de Variáveis Complexas. Uma das propriedades da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais, é a redução da equação de difusão diferencial parcial à uma equação diferencial ordinária.

O problema é, então, resolvido pela aplicação da Transformada de Laplace na variável t , em cada termo da equação (17) e nas condições de contorno (19) e (20). Dessa forma, obtém-se a solução transformada dada por,

$$\bar{T}(x, s) = c_1 \sinh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}x\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}x\right), \quad (23)$$

onde

$$c_1 = \frac{1}{2s^2 \cosh\left(L\sqrt{\frac{s}{D}}\right)}. \quad (24)$$

Logo, a solução da equação transformada, é dada por

$$\bar{T}(x, s) = \frac{1}{s^2} \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}x\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{s}{D}}L\right)}. \quad (25)$$

A transformada de Laplace inversa para a equação (25) pode ser escrita como (Schaum, 2004),

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D} - \frac{L^2}{D} \right) + t - \frac{16}{\pi^3} \left(\frac{L^2}{D} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{\left(\frac{-(2n-1)^2 \pi^2 t}{4L^2 D} \right)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{\sqrt{D}} \right), \quad (26)$$

simplificando-se a equação (26), obtém-se a distribuição da temperatura,

$$T(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{D} - \frac{L^2}{D} \right) + t - \frac{16}{\pi^3} \left(\frac{L^2}{D} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{\left(\frac{-(2n-1)^2 \pi^2 D t}{4L^2} \right)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \right). \quad (27)$$

3.2.2 Solução do problema unidimensional de condução do calor: resultados da inversão numérica da Transformada de Laplace

Para a inversão numérica da solução transformada do problema, equação (27), testam-se os métodos de Stehfest, Séries de Fourier, Talbot-Fixo e Zakian. O número de termos utilizados neste trabalho, a fim de obter a convergência para os métodos de inversão numérica da Transformada de Laplace na obtenção da solução do problema unidimensional de condução de calor, foram escolhidos de acordo com os parâmetros ideais sugeridos em estudos anteriores, como em Wang e Zhan (2015), que utilizou $18 \leq N \leq 24$. O algoritmo de Zakian é o único deste estudo que possui uma recomendação distinta: de acordo com Halsted e Brown (1972), para que se obtenha uma acurácia satisfatória, é suficiente que se tenha $N = 5$ e as constantes listadas na Tabela 2. O erro absoluto da inversão em cada x e para cada instante t e o gráfico das soluções analítica e numérica, obtidos a partir de cada método, são apresentados Tabelas 6-9 e nas Figuras 4-7, respectivamente.

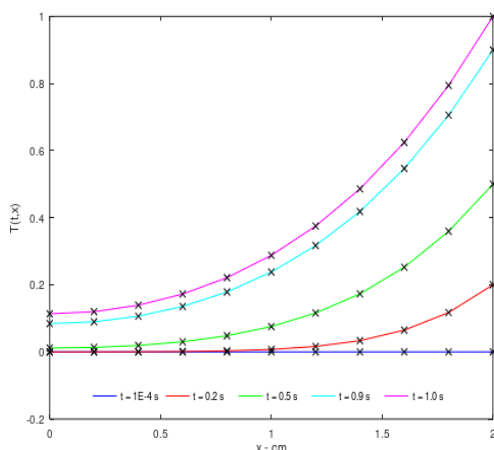


Figura 4. Perfil de Difusão de Temperatura para Stehfest.

Tabela 6. Inversão pelo método de Stehfest para N = 18.

t[s]	10 ⁻⁰⁴	0.2	0.5	0.9	1.0
x[cm]	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
0	2.454 x 10 ⁻⁰⁷	2.204 x 10 ⁻⁰⁸	8.699 x 10 ⁻⁰⁸	1.210 x 10 ⁻⁰⁷	3.980 x 10 ⁻⁰⁸
0.2	2.485 x 10 ⁻⁰⁷	4.696 x 10 ⁻⁰⁹	4.780 x 10 ⁻⁰⁸	1.251 x 10 ⁻⁰⁷	5.379 x 10 ⁻⁰⁸
0.4	2.580 x 10 ⁻⁰⁷	1.689 x 10 ⁻⁰⁸	3.630 x 10 ⁻⁰⁸	1.248 x 10 ⁻⁰⁷	8.129 x 10 ⁻⁰⁸
0.6	2.753 x 10 ⁻⁰⁷	5.123 x 10 ⁻⁰⁹	9.437 x 10 ⁻⁰⁸	9.030 x 10 ⁻⁰⁸	8.210 x 10 ⁻⁰⁸
0.8	3.031 x 10 ⁻⁰⁷	1.435 x 10 ⁻⁰⁸	8.065 x 10 ⁻⁰⁸	1.030 x 10 ⁻⁰⁸	2.660 x 10 ⁻⁰⁸
1.0	3.465 x 10 ⁻⁰⁷	2.441 x 10 ⁻⁰⁹	1.416 x 10 ⁻⁰⁸	1.230 x 10 ⁻⁰⁷	7.000 x 10 ⁻⁰⁸
1.2	4.163 x 10 ⁻⁰⁷	1.121 x 10 ⁻⁰⁹	5.559 x 10 ⁻⁰⁸	2.459 x 10 ⁻⁰⁷	1.727 x 10 ⁻⁰⁷
1.4	5.372 x 10 ⁻⁰⁷	3.030 x 10 ⁻⁰⁹	8.090 x 10 ⁻⁰⁸	3.402 x 10 ⁻⁰⁷	2.119 x 10 ⁻⁰⁷
1.6	7.821 x 10 ⁻⁰⁷	1.899 x 10 ⁻¹⁰	2.420 x 10 ⁻⁰⁸	1.297 x 10 ⁻⁰⁷	3.289 x 10 ⁻⁰⁷
1.8	1.473 x 10 ⁻⁰⁶	5.539 x 10 ⁻⁰⁸	4.249 x 10 ⁻⁰⁸	1.867 x 10 ⁻⁰⁷	5.409 x 10 ⁻⁰⁷
2.0	1.039 x 10 ⁻¹¹	5.699 x 10 ⁻⁰⁹	1.821 x 10 ⁻⁰⁷	1.304 x 10 ⁻⁰⁷	3.642 x 10 ⁻⁰⁷

Analisando-se a Tabela 6 e a Figura 4, conclui-se que o método de Stehfest gera bons resultados com erros absolutos da ordem de 10⁻⁰⁷, para x = 0 cm até x = 1.6 cm e t = 10⁻⁰⁴ s. Ainda para este instante, produz erros na ordem de 10⁻⁰⁶ e 10⁻¹¹, para x = 1.8 cm e x = 2.0 cm, respectivamente. Por sua vez, apresenta erros absolutos variando de 10⁻⁰⁹ à 10⁻⁰⁷ para o instante t = 0.2s até t = 1.0s, para todos os valores de x avaliados, exceto quando t = 0.2 s e x = 1.6 cm, onde tem-se um erro na ordem de 10⁻¹⁰.

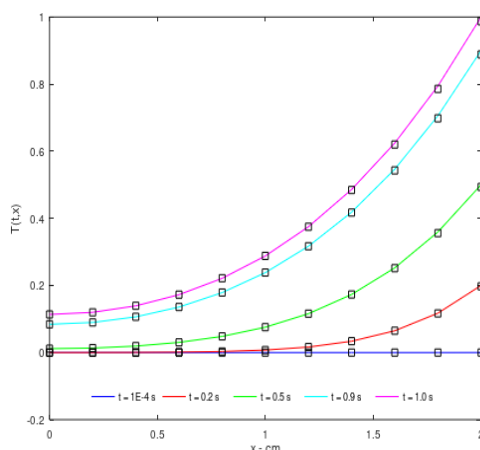


Figura 5. Perfil de Difusão de Temperatura para Séries Fourier.

Tabela 7. Inversão pelo método de Séries de Fourier para $N = 18$.

$t[s]$	10^{-04}	0.2	0.5	0.9	1.0
$x[cm]$	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
0.0	2.454×10^{-07}	2.199×10^{-09}	4.104×10^{-06}	1.335×10^{-05}	8.562×10^{-06}
0.2	2.485×10^{-07}	2.876×10^{-08}	5.519×10^{-06}	8.668×10^{-06}	3.928×10^{-05}
0.4	2.580×10^{-07}	9.357×10^{-08}	6.629×10^{-06}	7.858×10^{-05}	1.311×10^{-04}
0.6	2.753×10^{-07}	9.383×10^{-08}	3.884×10^{-06}	1.982×10^{-04}	2.723×10^{-04}
0.8	3.031×10^{-07}	1.424×10^{-06}	4.665×10^{-05}	3.367×10^{-04}	4.062×10^{-04}
1.0	3.465×10^{-07}	2.646×10^{-06}	1.355×10^{-04}	3.765×10^{-04}	3.787×10^{-04}
1.2	4.163×10^{-07}	1.108×10^{-05}	2.151×10^{-04}	4.750×10^{-05}	1.160×10^{-04}
1.4	5.372×10^{-07}	6.488×10^{-05}	3.506×10^{-05}	1.101×10^{-03}	1.539×10^{-03}
1.6	7.821×10^{-07}	4.055×10^{-05}	9.570×10^{-04}	3.578×10^{-03}	4.354×10^{-03}
1.8	1.473×10^{-06}	7.101×10^{-04}	3.345×10^{-03}	7.473×10^{-03}	8.551×10^{-03}
2.0	1.266×10^{-06}	2.532×10^{-03}	6.330×10^{-03}	1.139×10^{-02}	1.266×10^{-02}

A Tabela 7 e a Figura 5 demonstram que o método baseado nas Séries de Fourier produz resultados satisfatórios para o problema de condução de calor. Ele produz erros absolutos variando da ordem de 10^{-08} até 10^{-03} , para todos os instantes t e valores de x avaliados. Particularmente, em $t = 0.2$ s e $x = 0.0$ cm, produz um erro da ordem de 10^{-09} e na ordem de 10^{-02} , para os instantes $t = 0.9$ s e $t = 1.0$ s em $x = 2.0$ cm. Este método não possui as melhores aproximações quando se trata da inversão de classes de funções envolvendo exponenciais negativas: este resultado já era esperado de acordo com os testes apresentados para a validação dos algoritmos na subseção 3.1.

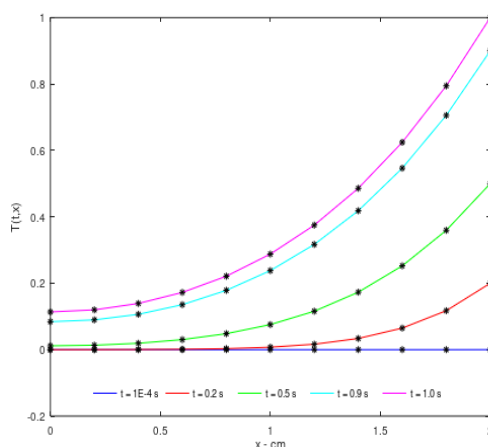


Figura 6. Perfil de Difusão de Temperatura para Talbot-Fixo.

Tabela 8. Inversão pelo método de Talbot-Fixo.

$t[s]$	10^{-04}	0.2	0.5	0.9	1.0
$x[cm]$	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
0.0	9.999×10^{-17}	1.000×10^{-14}	0	0	0
0.2	6.999×10^{-16}	0	0	0	0
0.4	1.000×10^{-15}	0	0	0	0

Observa-se pela Tabela 8 e Figura 6, que o método de Talbot-Fixo apresenta ótimos resultados para o problema de condução de calor. É possível observar a convergência do algoritmo TF para a inversão numérica da Transformada de Laplace. Observa-se ainda um erro absoluto na ordem de 10^{-17} para os valores de $x = 0.0$ cm, 0.2 cm e 0.4 cm. Para os demais valores de x , o método apresenta erro absoluto igual a zero para todo instante t analisado. Estes dados não foram disponibilizados da Tabela 8, a fim de evitar uma repetição das informações.

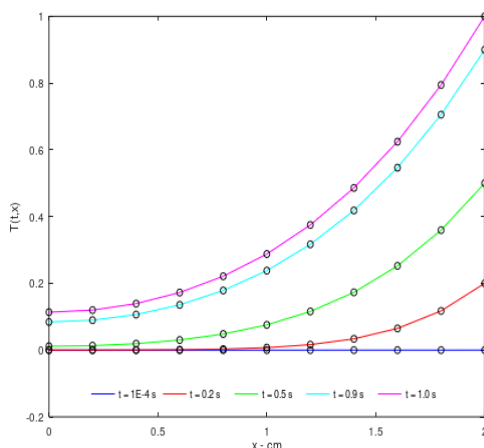


Figura 7. Perfil de Difusão de Temperatura para Zakian.

Tabela 9. Inversão pelo método de Zakian.

t[s]	10 ⁻⁰⁴	0.2	0.5	0.9	1.0
x[cm]	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto	Erro absoluto
0.0	2.454 × 10 ⁻⁰⁷	1.922 × 10 ⁻¹⁰	3.414 × 10 ⁻⁰⁸	4.301 × 10 ⁻⁰⁷	5.389 × 10 ⁻⁰⁷
0.2	2.485 × 10 ⁻⁰⁷	8.100 × 10 ⁻¹¹	1.757 × 10 ⁻⁰⁸	2.410 × 10 ⁻⁰⁷	1.505 × 10 ⁻⁰⁷
0.4	2.580 × 10 ⁻⁰⁷	1.395 × 10 ⁻⁰⁹	6.406 × 10 ⁻⁰⁸	4.507 × 10 ⁻⁰⁷	8.992 × 10 ⁻⁰⁷
0.6	2.753 × 10 ⁻⁰⁷	3.590 × 10 ⁻¹⁰	1.345 × 10 ⁻⁰⁷	1.413 × 10 ⁻⁰⁶	1.731 × 10 ⁻⁰⁶
0.8	3.031 × 10 ⁻⁰⁷	9.378 × 10 ⁻⁰⁹	2.096 × 10 ⁻⁰⁷	9.746 × 10 ⁻⁰⁷	2.316 × 10 ⁻⁰⁷
1.0	3.465 × 10 ⁻⁰⁷	2.808 × 10 ⁻⁰⁸	8.396 × 10 ⁻⁰⁷	2.696 × 10 ⁻⁰⁶	4.271 × 10 ⁻⁰⁶
1.2	4.163 × 10 ⁻⁰⁷	1.096 × 10 ⁻⁰⁸	5.717 × 10 ⁻⁰⁷	4.866 × 10 ⁻⁰⁶	4.266 × 10 ⁻⁰⁶
1.4	5.372 × 10 ⁻⁰⁷	3.188 × 10 ⁻⁰⁷	2.739 × 10 ⁻⁰⁶	7.949 × 10 ⁻⁰⁶	1.259 × 10 ⁻⁰⁵
1.6	7.821 × 10 ⁻⁰⁷	1.151 × 10 ⁻⁰⁶	8.292 × 10 ⁻⁰⁶	2.128 × 10 ⁻⁰⁵	2.180 × 10 ⁻⁰⁵
1.8	1.473 × 10 ⁻⁰⁶	4.906 × 10 ⁻⁰⁶	4.584 × 10 ⁻⁰⁶	3.793 × 10 ⁻⁰⁵	4.713 × 10 ⁻⁰⁵
2.0	1.058 × 10 ⁻⁰⁹	2.117 × 10 ⁻⁰⁶	5.292 × 10 ⁻⁰⁶	9.526 × 10 ⁻⁰⁶	1.058 × 10 ⁻⁰⁵

A técnica de Zakian também apresenta bons resultados, como é possível verificar na Tabela 9 e Figura 7, para o problema de condução de calor unidimensional. Particularmente, erros absolutos da ordem de 10⁻¹¹ são obtidos em t = 0.2 s para x = 0.0 cm e 0.6 cm e 10⁻¹⁰ em x = 0.2 cm. A técnica de inversão produz erros absolutos na ordem de 10⁻⁰⁹ até 10⁻⁰⁶. Para instantes maiores que t = 0.2 s, nota-se que o método perde precisão na medida que o instante t aumenta, chegando a produzir erros absolutos na ordem de 10⁻⁰⁵.

4. Conclusão

Métodos como a Transformada de Laplace fazem-se úteis na resolução de equações diferenciais que modelam fenômenos nas mais diversas áreas do conhecimento. Seu potencial de “desfazer” derivadas, simplificando a equação a ser resolvida, atribui à Transformada certa importância. No entanto, a dificuldade principal ao se empregar a técnica trata-se de reverter a solução obtida ao domínio do tempo. Casos em que a inversão analítica é inviável, por conta da forma dessa solução, recorre-se a métodos de inversão numérica. Neste trabalho, quatro métodos foram apresentados, seus algoritmos validados e aplicados a um problema de condução de calor unidimensional em uma placa, a saber, Stehfest, Séries de Fourier, Zakian e Talbot-Fixo.

Primeiramente, os métodos foram testados para inverter três funções elementares, avaliando a precisão dos resultados em comparação às transformadas inversas analíticas. A análise do desempenho de um determinado método na inversão de cada função permitiu fazer recomendações sobre seu uso: o método de Stehfest não é indicado à inversão apenas de funções cuja transformada inversa envolve uma função trigonométrica, mas ele fornece uma boa aproximação para funções com exponenciais negativos. Séries de Fourier não aproxima transformadas inversas de funções oscilatórias como era esperado, a desvantagem deste método é que ele requer um número de termos no truncamento do somatório muito alto para obter a precisão desejada. O método de Talbot-Fixo é adequado para os casos em que a transformada inversa é uma função exponencial decrescente, produzindo assim bons

resultados. Entretanto, observou-se através de testes para o valor de N que quanto maior o N for, mais se perde precisão na aproximação por esse método. O algoritmo de Zakian apresentou um melhor desempenho na inversão da subtração de função exponenciais.

Os métodos de Stehfest, Séries de Fourier, Zakian e Talbot-Fixo foram, ainda, aplicados para inverter numericamente a solução da equação de difusão, com o enfoque no problema de condução de calor unidimensional transiente em geometria cartesiana. Os resultados numéricos obtidos mostram, através do erro absoluto dos quatro algoritmos, que os métodos de Stehfest, Séries de Fourier e Zakian e Talbot-Fixo são apropriados para aproximar esse tipo de solução. Talbot-Fixo destaca-se de maneira singular dentre os quatro métodos. O algoritmo TF foi o que obteve um melhor desempenho comparado aos demais, alcançando os objetivos propostos inicialmente. Sequencialmente a este trabalho, a proposta é estudar outros métodos aplicáveis à análise numérica da transformada inversa de Laplace e testá-los para problemas de transporte.

Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro na realização deste estudo.

Referências

1. Abate, J.; Valkó, P. P. Multi-precision Laplace transform inversion. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 2004, 60, 979-993. <https://doi.org/10.1002/nme.995>
2. Cohen, A. M. *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, 1st ed.; Springer Science+Business Media: LLC New York, United States, 2007; pp. 1-251.
3. Costa, C. P. da, Pérez-Fernández, L. D., Rui, K., Bravo-Castillero, J. Combinação do ADMM com Homogeneização Matemática na Modelagem da Dispersão de Poluentes na Atmosfera. *Revista Brasileira de Meteorologia* 2018, 33(2), 329-335. <https://dx.doi.org/10.1590/0102-7786332014>
4. Crump, K. S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. *Journal of the Association for Computing Machinery* . 1976, 23(1), 89-96. <https://doi.org/10.1145/321921.321931>
5. D'amore, L.; Campagna, R.; Galletti, A.; Marcellino, L.; Murli, A. A smoothing spline that approximates Laplace transform functions only known on measurements on the real axis. *Inverse Problems*, 2012, 28(2), 1-37. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/2/025007>
6. Davies, B.; Martin, B. Numerical Inversion oh the Laplace Transform: a Survey and Comparison of Methods. *Journal of Computational Physics* 1979, 33, 1-32.
7. Dubner, H.; Abate, J. Numerical Inversion of Laplace Transform by relating them to the Finite Fourier Cosine Transform. *Journal of the ACM* 1968, 15, 115–123. <https://doi.org/10.1145/321439.321446>
8. Duffy, D. G. On the numerical inversion of Laplace transforms: comparison of three new methods on characteristic problems from applications. *ACM Transactions on Mathematical Software* 1993, 19(3), 333-359. <https://doi.org/10.1145/155743.155788>
9. Durbin, F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal* 1974, 17(4), 371-376. <https://doi.org/10.1093/comjnl/17.4.371>
10. Halsted, D. J.; Brown D. E. Zakian's technique for inverting Laplace transforms. *The Chemical Engineering Journal* 1972, 3, 312-313. [https://doi.org/10.1016/0300-9467\(72\)85037-8](https://doi.org/10.1016/0300-9467(72)85037-8)
11. Junqueira, S. L. de M. Aplicação da transformada de Laplace ao problema inverso da condução do calor. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1990.
12. Pilatti, C.; Rodriguez, B. D. do A.; Prolo Filho, J. F. Performance Analysis of Stehfest and Power Series Expansion Methods for Solution to Diffusive and Advective Transport Problems. *Defect and Diffusion Forum* 2019, 396, 99-108. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/ddf.396.99>
13. Moench, A. F.; Ogata, A. A Numerical Inversion of the Laplace Transform Solution to Radial Dispersion in a Porous Medium. *Water Resources Research* 1981, 17(1), 250-252. <https://doi.org/10.1029/WR017i001p00250>
14. Moreira, D. M.; Moraes, A. C.; Goulart, A. G.; Albuquerque, T. T. A. A contribution to solve the atmospheric diffusion equation with eddy diffusivity depending on source distance. *Atmospheric Environment* 2014, 83, 254-259. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2013.10.045>
15. Spiegel, M. R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas*, 3rd ed.; Bookman, Porto Alegre, 2012.
16. Segatto, C. F.; Tomaszewski, F. K.; Barros, R. C.; Vilhena, M. T. On the solution of the S_n multigroup kinetics equations in multilayer slabs. *Annals of Nuclear Energy* 2017, 104, 229-236. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2017.02.016>

17. Stehfest, H. Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace transform[D5]. *Communications of the ACM* 1979, 13, 47-49. <https://doi.org/10.1145/361953.361969>
18. Talbot, A. The accurate numerical inversion of Laplace transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics* 1979, 23(1), 97-120. <https://doi.org/10.1093/imamat/23.1.97>
19. Valkó, P. P.; Abate, J. Comparison of sequence accelerators for the Gaver method of numerical Laplace transform inversion. *Computers and Mathematics with Applications* 2004, 48(3-4), 629-636. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2002.10.017>
20. Wang, Q.; Zhan, H. On different numerical inverse Laplace methods for solute transport problems. *Advances in Water Resources* 2015, 75, 80-92. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2014.11.001>
21. Zakian, V. Numerical inversion of Laplace transform. *Electronics Letters* 1969, 5(6), 120-121.
22. Zhang, W.; Cui, Y.; Jiang, R.; Xu, J.; Qiao, X.; Jiang, Y.; Zhang, H.; Wang, X. Production performance analysis for horizontal wells in gas condensate reservoir using three-region model. *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 2019, 61, 226-236. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2018.11.004>
23. Zongxiao, R.; Xiaodong, W.; Guoqing, H.; Lingyan, L.; Xiaojun, W.; Guanghui, Z.; Hun, L.; Jiaming, Z.; Xianwei, Z. Transient pressure behavior of multi-stage fractured horizontal wells in stress-sensitive tight oil reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 2017, 157, 1197-1208. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.073>