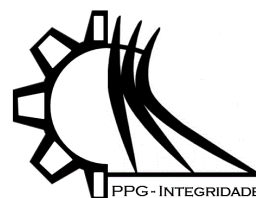




ISSN 2447-6102



Article

## Comparação dos casos de coeficientes contínuo e constante por partes com contato perfeito para a equação elíptica via método de homogeneização assintótica

Luz, L.N.M.<sup>1,a</sup>, Pérez-Fernández, L.D.<sup>1,b</sup> and Bravo-Castillero, J.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal de Pelotas

<sup>2</sup> Universidad Nacional Autónoma de México; [julian@mym.iimas.unam.mx](mailto:julian@mym.iimas.unam.mx)

<sup>a</sup> [larissa.meirelles@hotmail.com](mailto:larissa.meirelles@hotmail.com); <sup>b</sup> [leslie.fernandez@ufpel.edu.br](mailto:leslie.fernandez@ufpel.edu.br)

Received: 05/11/2020; Accepted:01/02/2022; Published: 07/02/2022

### Comparison of the cases of continuous coefficient and piecewise-constant coefficient with perfect contact for the elliptical equation via asymptotic homogenization method

**Abstract:** The methods of mathematical homogenization allow the effective properties of heterogeneous media to be found with great precision and rigor based on the physical and geometric properties of their components. In particular, the asymptotic homogenization method is used to find the coefficients that represent the effective properties of a medium with a periodic structure. The present work aims to study this mathematical homogenization technique to obtain the effective behavior of micro-heterogeneous media, and to apply mathematical formalism to build an asymptotic expansion of the exact solution of a one-dimensional linear problem considering continuous and piecewise-constant coefficients, respectively. Still, the proximity between the solutions of the original and homogenized problems will be mathematically justified. In order to illustrate the theoretical results, an example is presented considering both types of heterogeneity in a case that presents the same effective behavior.

**Keywords:** Heterogeneous media. Continuous and piecewise constant microperiodic heterogeneity. Effective behavior. Asymptotic homogenization. Maximum principle.

**Resumo:** Os métodos de homogeneização matemática permitem encontrar com grande precisão e rigor as propriedades efetivas de meios heterogêneos a partir das propriedades físicas e geométricas de seus componentes. Em particular, o método de homogeneização assintótica, é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. O presente trabalho tem como objetivo o estudo desta técnica matemática de homogeneização para obtenção do comportamento efetivo de meios micro-heterogêneos, e aplicar o formalismo matemático para construir uma expansão assintótica da solução exata de um problema unidimensional linear considerando coeficientes contínuos e contínuos por partes, respectivamente. Ainda, justificar-se-á matematicamente a proximidade entre as soluções dos problemas original e homogeneizado. A fim de ilustrar os resultados teóricos, apresenta-se um exemplo considerando ambos os tipos de heterogeneidade em um caso que apresenta o mesmo comportamento efetivo.

**Palavras-chave:** Meios heterogêneos. Heterogeneidade microperiódica contínua e constante por partes. Comportamento efetivo. Homogeneização assintótica. Princípio do máximo.

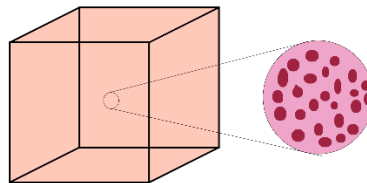


## 1 Introdução

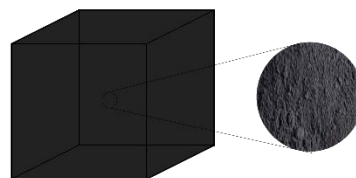
Materiais heterogêneos podem ser encontrados na natureza (por exemplo: osso, madeira, rocha, solo) ou fabricados para uma determinada aplicação. Por exemplo, compósitos com reforços fibrosos são muito utilizados em diversos setores industriais, como o automobilístico, aeronáutico, de construção civil, desportivo, eletroeletrônico, de construção de máquinas e de equipamentos médicos.

Estes materiais são caracterizados pela variação de suas propriedades físicas com relação à posição na sua estrutura interna. A forma em que tal variação é modelada permite identificar três tipos de material heterogêneo, a saber (TORQUATO, 2002; SADD, 2020):

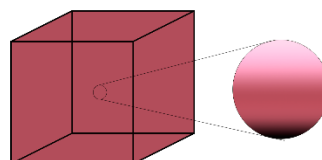
- Compósito: distribuição de domínios ocupados por diferentes materiais homogêneos chamados de fases (propriedades constantes por partes)



- Policristal: distribuição de domínios ocupados pelo mesmo material homogêneo com diferentes orientações (propriedades localmente iguais e globalmente diferentes)



- Meio funcionalmente graduado: um domínio ocupado por um único material heterogêneo (propriedades de variação contínua)



Em muitos casos, a heterogeneidade destes materiais é microperiódica, ou seja, são formados pela replicação periódica de um elemento recorrente na microescala. Tal elemento recorrente é chamado de célula básica e é representativo, pois reúne todas as propriedades físicas e geométricas do material heterogêneo de interesse e

possibilita o emprego de modelos matemáticos com maior eficiência. O estudo numérico direto dos problemas correspondentes, cujas equações têm coeficientes rapidamente oscilantes, não fornece expressões fechadas para as soluções destes sistemas e requer malhas extremamente refinadas que dificultam a sua aplicação devido ao alto custo computacional e ao possível comprometimento da convergência. Além disso, a determinação das propriedades efetivas de materiais heterogêneos por meio de métodos matemáticos serve de orientação na busca experimental de novos materiais com as propriedades ótimas desejadas. A determinação de propriedades efetivas remonta-se a trabalhos de grandes nomes da ciência como MAXWELL (1873), RAYLEIGH (1892), e EINSTEIN (1906).

Neste trabalho, como alternativa às abordagens diretas de resolução, emprega-se o método de homogeneização assintótica (MHA - BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), o qual permite obter uma aproximação da solução exata do problema em estudo. Este método baseia-se no desenvolvimento em série assintótica em duas escalas da solução do problema de valores de contorno e iniciais com coeficientes rapidamente oscilantes que modela o fenômeno estudado. Tal desenvolvimento assintótico é realizado em termos de potências do parâmetro geométrico pequeno que caracteriza a microescala, e cujos coeficientes são funções incógnitas. Assim, o problema se desacopla em uma sequência recorrente de problemas para obter cada uma das funções incógnitas que formam a assintótica da solução procurada. Na prática, é comum considerar somente os dois primeiros termos da assintótica, obtendo-se o problema homogeneizado ou macroscópico para o primeiro termo, e o problema local ou microscópico para o segundo. Além disso, o MHA permite obter propriedades efetivas que descrevem o comportamento macroscópico do meio e são os coeficientes constantes das equações do problema homogeneizado.

De fato, salvo melhor conhecimento, a maioria das aplicações do MHA são dirigidas precisamente à obtenção de propriedades efetivas de materiais compósitos. Por exemplo, algumas publicações recentes são as seguintes: em CABALLERO-PÉREZ et al. (2020a) propõe-se um esquema baseado na aplicação recursiva de fórmulas analíticas para propriedades efetivas a uma classe de cerâmicas porosas para calcular suas figuras de mérito de captação de energia; em CABALLERO-PÉREZ et al. (2020b) o MHA é aplicado a um problema de valor de contorno ponderado por tensor elíptico na formulação Tensão-Carga-Entropia das relações constitutivas com coeficientes de oscilação rápida e condições de contorno livre nas superfícies dos poros; em SABINA et al. (2020) o MHA em duas escalas é usado para encontrar fórmulas de forma fechada para propriedades efetivas de compósitos reforçados com fibra multifásicos periódicos onde os constituintes têm propriedades de transporte de valor complexo e células unitárias de paralelogramo; em BRAVO-CASTILLERO et al. (2020) o MHA é aplicado a compósitos periódicos dielétricos complexos, uma equivalência para problemas dielétricos acoplados com coeficientes reais é mostrada. Cálculos numéricos são realizados e os resultados são comparados com outras abordagens mostrando a utilidade das fórmulas obtidas; em YAÑEZ-OLMOS et al. (2019) com base no MHA, os problemas locais relacionados a compósitos dielétricos fibrosos periódicos bifásicos com constituintes isotrópicos e complexos são resolvidos; em CABALLERO-PÉREZ et al. (2019) o MHA é aplicado a uma família de problemas de valor de contorno para materiais heterogêneos termo-magneto-eleto-elásticos lineares com coeficientes oscilantes rápidos e contato imperfeito magneto-eleto-elástico entre as fases; em ÁLVAREZ-BORGES et al. (2018) uma família de problemas de valores de contorno elípticos unidimensionais com coeficientes suaves por partes periódicos e oscilantes rapidamente é considerada. O MHA é usado para construir uma expansão assintótica; em GUINOVART-SANJUÁN et al. (2018) o MHA é utilizado para resolver problemas considerando materiais compósitos com periodicidade generalizada e contato de mola imperfeito na interface; em MATTOS et al. (2018) integra-se a teoria do MHA com o método dos elementos finitos, levando a um algoritmo de cálculo renovado; em RODRÍGUEZ-RAMOS et al. (2020) um compósito

viscoelástico periódico bifásico reforçado com fibras paralelas é considerado em que os constituintes são isotrópicos. Fórmulas simples de forma fechada são obtidas para as propriedades efetivas de compósitos com células quadradas e hexagonais por meio do MHA em duas escalas. Comparação com diferentes modelos viscoelásticos que permitem transformações de Laplace inversas explícitas, como os modelos tradicionais de Maxwell e Kelvin e o modelo exponencial fracionário Rabotnov-Scott Blair. Os resultados analíticos são verificados por comparação com os computacionais.

O objetivo deste trabalho é comparar as soluções obtidas via MHA para dois casos com o mesmo comportamento efetivo, a saber, um compósito bifásico e um material funcionalmente graduado, ambos com microestrutura periódica unidimensional. Estes casos correspondem a coeficientes constante por partes e continuamente diferenciável, respectivamente.

## 2 Formulação do problema

Seja  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon \ll 1$ . A propriedade  $a^\varepsilon: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  do meio é uma função positiva, limitada,  $\varepsilon$ -periódica, e continuamente diferenciável (exceto talvez em um número finito de pontos  $x \in \Gamma^\varepsilon$  nos quais pode ter descontinuidades de primeiro tipo). Assim, sem perda de generalidade tem-se que a incógnita  $u^\varepsilon$  satisfaz o problema de valor de contorno

$$\frac{d}{dx} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \right] = f(x) \text{ em } x \in (0,1) \setminus \Gamma^\varepsilon \text{ e } u^\varepsilon(0) = u^\varepsilon(1) = 0, \quad (1)$$

onde  $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$  e  $f$  é o termo fonte. Ainda, note que  $\Gamma^\varepsilon \equiv \emptyset$  se  $a^\varepsilon$  for contínua. Caso contrário, considera-se aqui que há contato perfeito, ou seja, que o fluxo  $a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx}$  e a incógnita  $u^\varepsilon$  são contínuos. Para isto, o problema (1) é completado com as condições

$$\llbracket a^\varepsilon(x) \frac{du^\varepsilon}{dx} \rrbracket = 0 \text{ e } \llbracket u^\varepsilon \rrbracket = 0 \text{ em } x \in \Gamma^\varepsilon, \quad (2)$$

onde  $\llbracket \cdot \rrbracket$  representa o salto ao redor de cada descontinuidade  $x \in \Gamma^\varepsilon$  de  $a^\varepsilon(x)$ . Este problema de valores de contorno modela, por exemplo, a distribuição estacionária de um campo de temperatura de um meio condutivo microperiódico unidimensional em equilíbrio térmico. Ainda mais, é bem conhecido que as formulações clássicas da eletrostática, condução elétrica, magnetostática, condução térmica, difusão e elasticidade são matematicamente análogas quando não equivalentes (HASHIN, 1983).

## 3 Método de Homogeneização Assintótica

O método de homogeneização assintótica (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) é utilizado para encontrar os coeficientes que representam as propriedades efetivas de um meio com estrutura periódica. Este consiste na busca da solução do problema original como uma expansão assintótica em duas escalas  $x$  e  $y = x/\varepsilon$  na forma de série de potências do parâmetro geométrico  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , dado pela razão entre o comprimento característico da célula básica do compósito por um comprimento característico do compósito. Assim, o problema original decompõe-se em

uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes  $u_k(x, y)$  das potências de  $\varepsilon$ , continuamente diferenciáveis  $x$  e  $y$  e 1-periódicos em  $y$ . Os problemas para os dois primeiros termos da expansão assintótica são os chamados problemas homogeneizado e local, respectivamente. O MHA garante que a solução do problema original (1) e (2) converge para a solução do chamado problema homogeneizado quando  $\varepsilon$  tende a zero.

Considera-se a seguinte expansão assintótica da solução do problema:

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \quad y = x/\varepsilon. \quad (3)$$

Na substituição de  $u^{(2)}$  no problema (1), utilizamos a regra da cadeia:

$$\frac{du^\varepsilon}{dx} \approx \frac{du^{(2)}}{dx} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y}. \quad (4)$$

A partir daqui,  $x$  e  $y$  consideram-se independentes. Agrupando por potências de  $\varepsilon$  o resultado da substituição em (1), obtém-se a igualdade assintótica

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right\} \\ & + \varepsilon^0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \right] - f \right\} \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \right\} \\ & + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \right\} + O(\varepsilon^3) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

que para ser satisfeita, os coeficientes de  $\varepsilon^{-2}$ ,  $\varepsilon^{-1}$  e  $\varepsilon^0$  devem ser nulos, de onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-2}: & \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = 0 \\ \varepsilon^{-1}: & \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \\ \varepsilon^0: & \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + f(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Estas equações são complementadas com as condições de contato e contorno que resultam de substituir  $u^{(2)}$  em (2) e nas condições de contorno em (1), respectivamente. O lema a seguir garante a existência e unicidade de soluções 1-periódicas da sequência recorrente de problemas definida pelas equações (6) e as condições de contato e contorno mencionadas acima:

Lema: Sejam  $F(y)$  diferenciável e  $a(y)$  diferenciável por partes, 1-periódica, positiva e limitada. A condição necessária e suficiente para a existência de uma solução 1-periódica da equação  $LN = F$  com o operador diferencial  $L(\cdot) = \frac{d}{dy} \left( a(y) \frac{d(\cdot)}{dy} \right)$  e sujeita às condições de continuidade  $[[N]] = 0$  e  $[[a(y) \frac{dN}{dy}]] = 0$ , é que  $\langle F(y) \rangle \equiv \int_0^1 F(y) dy = 0$  onde  $\langle \cdot \rangle$  é o operador do valor médio. Ainda, a solução 1-periódica é única salvo uma constante aditiva, ou seja,  $N(y) = \tilde{N}(y) + C$ , em que  $\tilde{N}(y)$  é a solução 1-periódica de  $LN = F$  tal que  $\tilde{N}(0) = 0$ , e  $C$  é uma constante arbitrária.

De aplicar o Lema em (6) para  $\varepsilon^{-2}$  segue que existe  $u_0$  solução 1-periódica. Integrando em ambos os lados com relação a  $y$  terá:

$$a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = k(x), \quad (7)$$

onde  $k$  deve ser somente em relação a  $x$ , pois (6) indica que  $a(y) \frac{\partial u_0}{\partial y}$  não depende de  $y$ . Aplicando o operador do valor médio  $\langle \cdot \rangle$  em ambos os lados da igualdade após dividir por  $a(y)$ , levando em conta que  $a(y) > 0$  e a 1-periodicidade de  $u_0$ , tem-se

$$0 = \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{k(x)}{a(y)} \right\rangle = k(x) \langle a^{-1}(y) \rangle, \quad (8)$$

de onde  $k(x) = 0$ . Portanto,  $\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$ , ou seja,  $u_0$  não depende de  $y$ . Assim, utilizando o resultado acima, a equação para  $\varepsilon^{-1}$  modifica-se em:

$$\varepsilon^{-1}: \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right] = - \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx} \quad (9)$$

### 3.1 Problema Local

De aplicar o Lema na Eq. (11) levando em conta a 1-periodicidade de  $a(y)$ , segue que existe  $u_1$  solução 1-periódica. Logo, de integrar com relação a  $y$ , e dividir por  $a(y) > 0$ , tem-se

$$\frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{k(x)}{a(y)}. \quad (10)$$

De aplicar o operador  $\langle \cdot \rangle$  levando em conta a 1-periodicidade de  $u_1$ , tem-se

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{du_0}{dx} + \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{k(x)}{a(y)} \right\rangle = k(x) \langle a^{-1}(y) \rangle, \quad (11)$$

de onde segue que

$$k(x) = \hat{a} \frac{du_0}{dx}, \quad (12)$$

onde  $\hat{a} = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1}$  é o chamado coeficiente efetivo. Ainda, de substituir (12) em (10) e isolar a derivada de  $u_1$ , tem-se que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \left( \frac{\hat{a}}{a(y)} - 1 \right) \frac{du_0}{dx}, \quad (13)$$

o qual permite propor  $u_1$  por separação de variáveis como

$$u_1(x, y) = N_1(y) \frac{du_0}{dx}. \quad (14)$$

Para obter a função local  $N_1$ , substitui-se (14) em (9), de onde segue que

$$\frac{d}{dy} \left[ a(y) \frac{dN_1}{dy} \right] \frac{du_0}{dx} = - \frac{da}{dy} \frac{du_0}{dx}. \quad (15)$$

Logo, considerando a Eq. (14) também nas condições de contato e periodicidade, tem-se o chamado problema local

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a(y) + a(y) \frac{dN_1}{dy} \right] = 0, y \in (0,1) \setminus \Gamma \\ \left[ \left[ a(y) \frac{dN_1}{dx} \right] \right] = - \llbracket a(y) \rrbracket \text{ e } \llbracket N_1(y) \rrbracket = 0 \text{ em } y \in \Gamma \\ N_1(0) = N_1(1) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

onde  $\Gamma = \varepsilon^{-1}\Gamma^\varepsilon$  é o conjunto de pontos de descontinuidade de  $a(y)$  na célula básica. Note que, no caso em que  $a(y)$  é contínuo,  $\Gamma \equiv \emptyset$  e as condições de contato se satisfazem identicamente.

### 3.2 Problema Homogeneizado

De aplicar o Lema na Eq. (6) para  $\varepsilon^0$  segue que a condição necessária e suficiente para que exista  $u_2$  solução 1-periódica é que

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \left[ a(y) \left( \frac{du_0}{dx} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] + f(x) \right) = 0, \quad (17)$$

que, após manipulações, produz a equação do problema homogeneizado:

$$\hat{a} \frac{d^2 u_0}{dx^2} = f(x), x \in (0,1), u_0(0) = u_0(1) = 0. \quad (18)$$

Em muitas situações é suficiente considerar a expansão assintótica de primeira ordem

$$u^\varepsilon(x) \approx u^{(1)}(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1 \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = u_0(x) + \varepsilon N_1 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{du_0}{dx}, \quad (19)$$

onde  $u_0(x)$  e  $N_1(y)$  são as soluções dos problemas homogeneizado (18) e local (16), respectivamente.

### 3.3 Proximidade entre as soluções

Pode-se estabelecer uma relação de proximidade entre a solução do problema original  $u^\varepsilon$  e a solução do problema homogeneizado  $u_0$  para avaliar quão boa aproximação é  $u_0$  de  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Especificamente, vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (20)$$

onde  $H^1(\Omega)$  é o espaço das funções de  $L^2(\Omega)$  (funções de quadrado integrável) cujas derivadas de primeira ordem também são de  $L^2(\Omega)$ .

Na demonstração utilizaremos o princípio do máximo generalizado para equações elípticas (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

**Demonstração:**

Primeiro, utilizando a expansão assintótica (3), vamos provar que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}. \quad (21)$$

Substituindo a expansão assintótica (3) no problema original (1)-(2) tem-se, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right] = f(x) - F(x, \varepsilon), & x \in (0,1) \\ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right] = 0 \text{ e } \llbracket u^{(1)} \rrbracket = 0 \text{ em } x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

onde  $F$  é erro de tomar  $u^{(1)}$  como solução de (1)-(2).

Subtraindo (22) de (1)-(2) temos, para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right] = F(x, \varepsilon), & x \in (0,1) \\ \left[ a^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} (u^\varepsilon - u^{(1)}) \right] = 0 \text{ e } \llbracket u^\varepsilon - u^{(1)} \rrbracket = 0 \text{ em } x \in \Gamma^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(0) - u^{(1)}(0, \varepsilon) = u^\varepsilon(1) - u^{(1)}(1, \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Ao aplicarmos o princípio do máximo em (23) terá a estimativa

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} \leq c \|F\|_{L^2([0,1])} \quad (24)$$

onde  $c > 0$  é uma constante. Assim, para estimar  $\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])}$  é necessário obter uma expressão para  $F(x, \varepsilon)$  a partir da equação do problema (22), ou seja,

$$F(x, \varepsilon) = f(x) - \frac{d}{dx} \left[ a^\varepsilon(x) \frac{du^{(1)}}{dx} \right]. \quad (25)$$

Sendo assim, considerando a expansão assintótica (19) em (25), após manipulações, tem-se

$$F(x, \varepsilon) = -\varepsilon a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3}. \quad (26)$$

Lembrando  $\|u\|_{L^2([0,1])}^2 = \int_0^1 u^2 dx$ , de (26) segue que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 \int_0^1 \left( a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 dx. \quad (27)$$

Nota-se que

$$\left( a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right)^2 = \left| a(y) N_1(y) \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right|^2 = \left( |a(y) N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2. \quad (28)$$



Assumindo que  $u_0 \in C^3([0,1])$ , tem-se pelo Teorema de Weierstrass (KUDRIAVTSEV, 1983, Teorema 1, p. 140), que existe  $A_1 > 0$  tal que

$$\left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \leq A_1. \tag{29}$$

Logo, de (28) e (29), segue que

$$\left( |a(y)N_1(y)| \left| \frac{d^3 u_0}{dx^3} \right| \right)^2 \leq A_1^2 |a(y)N_1(y)|^2 = A_1^2 (a(y)N_1(y))^2, \tag{30}$$

e de (27) e (30), temos que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 A_1^2 \int_0^1 N_1^2(y) a^2(y) dx. \tag{31}$$

Assumindo que  $N_1, a \in C([0, \varepsilon^{-1}])$ , pelo teorema de Weierstrass tem-se que existem  $B_1, B_2 > 0$  tais que, para todo  $x \in [0, \varepsilon^{-1}]$ , tem-se

$$\left| N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq B_1, \quad \left| a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| \leq B_2. \tag{32}$$

Tomando  $B = \max\{B_1, B_2\}$  segue de (31) que

$$\|F\|_{L^2([0,1])}^2 = \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} dx = \varepsilon^2 A_1^2 B^4 \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon A_1^2 B^4. \tag{33}$$

Consequentemente,

$$\|F\|_{L^2([0,1])} \leq \sqrt{\varepsilon} A_1 B^2. \tag{34}$$

Portanto, de (26) com  $c = A_1 B^2$  segue que

$$\|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{35}$$

De forma análoga obtém-se que

$$\|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}). \tag{36}$$

Então, de (35) e (36), e usando desigualdade triangular, tem-se

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} &= \|u^\varepsilon - u^{(1)} + u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])} \\ &\leq \|u^\varepsilon - u^{(1)}\|_{H_0^1([0,1])} + \|u^{(1)} - u_0\|_{H_0^1([0,1])} \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}) + O(\sqrt{\varepsilon}) \\ &= O(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{37}$$

de onde conclui-se que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H_0^1([0,1])} = O(\sqrt{\varepsilon}), \tag{38}$$

ou seja,  $u_0$  é uma boa aproximação para  $u^\varepsilon$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

#### 4 Exemplos

A seguir, apresenta-se um exemplo ilustrativo do fato de que  $u^{(1)} \rightarrow u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  e a comparação dos casos discreto e contínuo considerando  $f(x) = -1$ . A solução exata deste problema, sem especificar o formato do coeficiente  $a^\varepsilon(x)$ , é  $u^\varepsilon(x) = \int_0^x \frac{C_\varepsilon - s}{a^\varepsilon(s)} ds$  em que  $C_\varepsilon = \left( \int_0^1 \frac{ds}{a^\varepsilon(s)} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{s ds}{a^\varepsilon(s)}$ .

O caso discreto é um compósito bifásico com fases constituintes homogêneas. A propriedade é

$$a(y) = \begin{cases} a_1, y \in (0, 0.5 - \delta) \cup (0.5 + \delta, 1) \\ a_2, y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \end{cases} \quad (39)$$

com  $a_r > 0$ ,  $r = 1, 2$ , e  $\delta \in (0, 0.5)$ . Aqui, o conjunto de descontinuidades de  $a(y)$  na célula básica é  $\Gamma = \{0.5 - \delta, 0.5 + \delta\}$ . A propriedade efetiva correspondente é

$$\hat{a} = \langle a^{-1}(y) \rangle^{-1} = \left( \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} \right)^{-1}, \quad (40)$$

onde  $c_2 = 2\delta = 1 - c_1$  com  $c_r$  a concentração da fase  $r$ . A solução do problema local é

$$N_1(y) = \begin{cases} Ay, y \in (0, 0.5 - \delta) \\ \left( \frac{a_1}{a_2} (A + 1) - 1 \right) y + B, y \in (0.5 - \delta, 0.5 + \delta) \\ A(y - 1), y \in (0.5 + \delta, 1) \end{cases} \quad (41)$$

onde  $A$  e  $B$  são obtidos das condições de contato. De  $u_0$  e  $N_1$  dados acima se obtém a expansão assintótica  $u^{(1)}$  do problema original. A solução exata  $u^\varepsilon$  do problema original se obtém de maneira análoga a  $N_1$ , ou seja, resolvendo em cada intervalo e obtendo as constantes de integração a partir das condições de contato e de contorno. Em particular, considera-se que  $a_1 = 1.25$ ,  $a_2 = 0.75$  e  $\delta = \frac{\sqrt{15}-3}{4}$ .

O caso contínuo corresponde a um meio funcionalmente graduado com a propriedade  $a(y) = 1 + \frac{1}{4} \cos(2\pi y)$ . A solução do problema local é

$$N_1(y) = \int_0^y \left( \frac{\hat{a}}{a(s)} - 1 \right) ds, \quad (42)$$

e calculou-se a integral numericamente para cada  $y$ .

Em ambos os casos o coeficiente efetivo correspondente é  $\hat{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$  e a solução do problema homogeneizado é

$u_0(x) = \frac{x(1-x)}{2\hat{a}}$ . Ainda, neste caso, a expansão assintótica (19) é  $u^{(1)}(x, \varepsilon) = \frac{x(1-x)}{2\hat{a}} + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{1-2x}{2\hat{a}}$  em que  $N_1(y)$  é dado por (42).

Na Figura 1 a seguir, apresenta-se, para ambos os casos, o comportamento da propriedade  $a^\varepsilon(x)$  (primeira linha), da função local  $N_1(x/\varepsilon)$  (segunda linha), e da solução  $u_0$  do problema homogeneizado juntamente com a expansão assintótica  $u^{(1)}(x, \varepsilon)$  do problema original (terceira linha), para valores decrescentes de  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{4}$  para as colunas 1, 2 e 3, respectivamente). Pode observar-se que, quando  $\varepsilon$  decresce,  $a^\varepsilon(x)$  e  $N_1(x/\varepsilon)$  são rapidamente oscilantes e periódicos como esperado, e que  $u^{(1)} \rightarrow u_0$ .

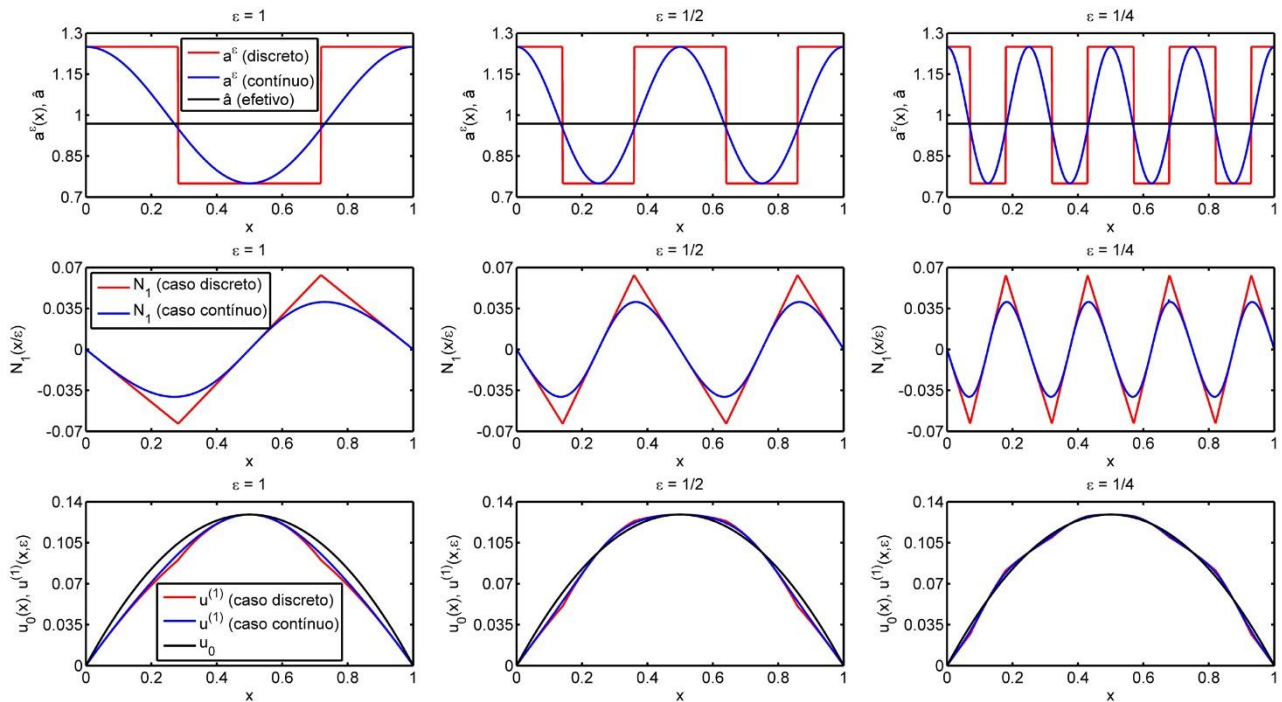


Figura 1: Comparação dos modelos contínuo e discreto

Depende de qual é o interesse, uma aproximação contínua pode fornecer uma forma mais simples se o interesse é o comportamento efetivo e pode simplificar o cálculo, mas mesmo assim conseguimos o comportamento efetivo desejado; mas também temos que uma aproximação contínua não é o suficiente, pois na realidade não há materiais perfeitamente contínuos.

### 5 Considerações Finais

Neste trabalho aplicou-se o método de homogeneização assintótica a um problema unidimensional, e provou-se a proximidade entre a soluções exata  $u^\varepsilon$ , a expansão assintótica  $u^{(1)}$  e a solução  $u_0$  do problema homogeneizado. Através de um exemplo, ilustra-se o fato de que  $u^{(1)} \rightarrow u_0$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  independentemente da natureza (constante por partes ou contínua) do coeficiente. A demonstração da proximidade entre as soluções e os exemplos ilustrativos apresentados mostram a robustez do MHA.

## 6 Agradecimentos

Agradecemos à CAPES, FAPERGS e ao projeto CAPES nº 88881.030424/2013-01. Agradecemos os revisores pelas suas valiosas contribuições para o melhoramento do trabalho.

## 7 Referências

1. Bakhvalov, N. S.; Panasenko, G. P. *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-2247-1>
2. Einstein, A. Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen. *Annalen der Physik*, v.324, n.2, p.289–306, 1906. <https://doi.org/10.1002/andp.19063240204>
3. Kudriavtsev, L. D. *Curso de Análisis Matemático: Tomo I*. Moscou: Mir, 1983.
4. Maxwell, J. C. *Treatise on Electricity and Magnetism*. Oxford: Clarendon Press, 1873.
5. Rayleigh, L. On the influence of obstacles arranged in a rectangular order upon the properties of medium. *Philosophical Magazine*, v.34, p.481–502, 1892. <https://doi.org/10.1080/14786449208620364>
6. Sadd, M. H. *Elasticity: Theory, Applications, and Numerics*. Oxford: Elsevier Academic Press, 4ta. Ed., 2020. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-03720-5>
7. Torquato, S. *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*. New York: Springer-Verlag, 2002. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6355-3>
8. Caballero-Pérez, R. O.; Bravo-Castillero, J.; Pérez-Fernández, L. D. A simple scheme for calculating the energy harvesting figures of merit of porous ceramics. *Energy Harvesting and Systems*, v. 7, n. 1, p. 25-32, 2020a. <https://doi.org/10.1515/ehs-2021-0001>
9. Hashin, Z. *Analysis of composite materials—a survey*. *Journal of Applied Mechanics*, v. 50, p. 481-505, 1983. <https://doi.org/10.1115/1.3167081>
10. Caballero-Pérez, R. O., Bravo-Castillero, J., Pérez-Fernández, L. D., Rodríguez-Ramos, R., & Sabina, F. J. *Computation of effective thermo-piezoelectric properties of porous ceramics via asymptotic homogenization and finite element methods for energy-harvesting applications*. *Archive of Applied Mechanics*, v. 90, p. 1415–1429, 2020b. <https://doi.org/10.1007/s00419-020-01675-6>
11. Sabina, F. J., Guinovart-Díaz, R., Espinosa-Almeyda, Y., Rodríguez-Ramos, R., Bravo-Castillero, J., López-Realpozo, J. C., ... & Sánchez-Dehesa, J. *Effective transport properties for periodic multiphase fiber-reinforced composites with complex constituents and parallelogram unit cells*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 204, p. 96-113, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.08.001>
12. Bravo-Castillero, J., Ramírez-Torres, A., Sabina, F. J., García-Reimbert, C., Guinovart-Díaz, R., & Rodríguez-Ramos, R. *Analytical formulas for complex permittivity of periodic composites. estimation of gain and loss enhancement in*

- active and passive composites*. *Waves in Random and Complex Media*, v. 30, n. 4, p. 593-613, 2020. <https://doi.org/10.1080/17455030.2018.1546063>
13. Yañez-Olmos, D., Bravo-Castillero, J., Ramírez-Torres, A., Rodríguez-Ramos, R., & Sabina, F. J. *Effective coefficients of isotropic complex dielectric composites in a hexagonal array*. *Technische Mechanik*, v. 39, n. 2, p. 220-228, 2019. <https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2019-020>
14. Caballero-Pérez, R. O., Bravo-Castillero, J., Pérez-Fernández, L. D., Rodríguez-Ramos, R., & Sabina, F. J. *Homogenization of thermo-magneto-electro-elastic multilaminated composites with imperfect contact*. *Mechanics Research Communications*, v. 97, p. 16-21, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2019.04.005>
15. Álvarez-Borges, F. E., Bravo-Castillero, J., Cruz, M. E., Guinovart-Díaz, R., Pérez-Fernández, L. D., Rodríguez-Ramos, R., & Sabina, F. J. *Reiterated homogenization of a laminate with imperfect contact: gain-enhancement of effective properties*. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 39, n. 8, p. 1119-1146, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10483-018-2352-6>
16. Guinovart-Sanjuán, D., Vajravelu, K., Rodríguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Lebon, F., & Sabina, F. J. et al. *Analysis of effective elastic properties for shell with complex geometrical shapes*. *Composite Structures*, v. 203, p. 278-285, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.036>
17. Mattos, Lucas Prado; cruz, Manuel Ernani; Bravo-Castillero, Julián. *Finite element computation of the effective thermal conductivity of two-dimensional multi-scale heterogeneous media*. *Engineering Computations*, v. 35 n. 5, p. 2107-2123, 2018. <https://doi.org/10.1108/EC-11-2017-0444>
18. Rodríguez-Ramos, R., Otero, J. A., Cruz-González, O. L., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Sabina, F. J., ... & Sevostianov, I. *Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method*. *International Journal of Solids and Structures*, v. 190, p. 281-290, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014>