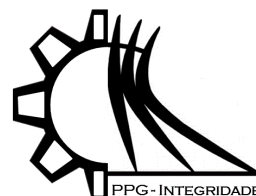




ISSN 2447-6102



Modelagem Analítica para a Dinâmica de Cabos em Aplicação Subaquática

Dias, J.C.¹ and Gomes, S.C.P.^{2,*}

¹ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, Rio Grande, Brasil; josiane.dias@riogrande.ifrs.edu.br

² Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, Brasil; sebastiao.gomes@furg.br

* Correspondence: FURG-IMEF, Av. Itália, km 8, 96203-900, Rio Grande, RS

Received: 06/11/2020; Accepted: 05/12/2020; Published: 31/12/2020

Resumo: Cabos são amplamente utilizados em estruturas marítimas, mais especificamente no ramo das indústrias petrolíferas e naval. Cabos umbilicais utilizados em veículos subaquáticos operados remotamente (ROV – *Remotely Operated Vehicle*), risers, cabos de reboque, amarração ou ancoragem para estruturas flutuantes são exemplos de importantes aplicações. Desenvolver modelos dinâmicos para tais estruturas em situações reais de aplicação é sempre um desafio científico motivador. Neste sentido, o presente trabalho propõe uma adaptação no desenvolvimento analítico clássico da dinâmica da corda vibrante, restringindo o movimento ao plano vertical e aplicando ao caso de um cabo suspenso por duas plataformas flutuantes, de forma que a dinâmica do cabo evolui em ambiente subaquático. O modelo analítico é discretizado utilizando-se diferenças finitas. Simulações mostraram bons resultados em análise qualitativa, condizentes com o esperado fisicamente. Um software de animação gráfica foi desenvolvido para uma melhor visualização dos resultados de simulações. A análise das animações permitiu identificar uma boa sensação de realidade física.

Palavras chave: Cabos, modelagem dinâmica, diferenças finitas, aplicações subaquáticas.

Abstract: Cables are widely used in marine structures, more specifically in the oil and naval industry. Umbilical cables used in underwater remotely operated vehicles (ROV), risers, tow cables, mooring or anchoring for floating structures are examples of important applications. Developing dynamic models for such structures in real application situations is always a motivating scientific challenge. In this sense, the present work proposes an adaptation in the classic analytical development of the dynamics of the vibrating strings, restricting the movement to the vertical plane and applying to the case of a cable suspended by two floating platforms, so that the dynamics of the cable evolves in an underwater environment. The analytical model is discretized using finite differences. Simulations showed good results in qualitative analysis, consistent with it was expected physically. Graphic animation software was developed to better visualize the results of simulations. The analysis of the animations allowed us to identify a good sense of physical reality.

Keywords: Cables, dynamic modeling, finite differences, underwater applications.

1. Introdução

A demanda mundial de combustível tem provocado a busca por fontes de energias renováveis tais como a solar, eólica, biocombustível, entre outras. No entanto, a exploração por fontes não renováveis de energia, como é o caso do petróleo, continua em alta. No caso do petróleo, algumas reservas de óleo e gás existentes atualmente encontram-se localizadas em regiões de difícil acesso, mais especificamente em regiões de águas mais profundas e afastadas da costa. A extração de petróleo dessas reservas impõe desafios tecnológicos em todas as etapas do processo, fato que requer investimento em tecnologia de ponta.

Muitas das estruturas empregadas na indústria de petróleo são do tipo cabo e, dessa forma, o estudo da dinâmica de cabos constitui um tema de grande importância nessa área. Dentre alguns exemplos de aplicações tecnológicas de estruturas do tipo cabo no universo subaquático estão os cabos umbilicais utilizados em veículos subaquáticos operados remotamente (*ROV – Remotely Operated Vehicle*), *risers*, ou ainda, cabos de reboque, amarração ou ancoragem para estruturas flutuantes. A Figura 1 ilustra alguns exemplos dessas aplicações.

Existe na literatura uma grande quantidade de trabalhos sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo e suas aplicações. A maioria dos trabalhos encontrados sobre modelagem de cabos utiliza a técnica de elementos finitos e, geralmente, em tais trabalhos o foco está voltado à obtenção de esforços em equilíbrio estático, importantes para efeito de dimensionamento.



Figura 1. Cabos em aplicações subaquáticas (TecPetro, 2015).

Em Luongo *et al.* (2008), a dinâmica de cabos suspensos é obtida via aproximações analíticas e numéricas utilizando o método de solução por diferenças finitas e o método de Galerkin. Chatjigeorgiou e Mavrakos (2010) propõem uma solução para a dinâmica tridimensional de estruturas marinhas delgadas em conformação catenária utilizando a técnica de diferenças finitas. Srivastava *et al.* (2011) apresentam uma aproximação numérica por diferenças finitas, a fim de prever o comportamento dinâmico de cabos subaquáticos utilizados em reboque de embarcações, quando o navio de reboque muda sua velocidade em uma direção fixa, em movimento linear.

Chang *et al.* (2008) investigam o comportamento dinâmico não-linear de um cabo elástico com base na teoria da catenária e com o uso do método de elementos finitos. Escalante *et al.* (2011) utilizam o método dos elementos finitos aplicado a obtenção de um modelo de ordem reduzida, a partir do método das decomposições ortogonais, também conhecido como método da decomposição de Karthunen-Loève. Wolfschluckner e Jodin (2013) utilizam diferentes abordagens para descrever o comportamento mecânico da dinâmica de cabos, comparando o método dos elementos finitos com métodos numéricos e analíticos.

Pereira (2010) investiga a interação fluido-estrutura em um cabo submerso em um fluido e, neste trabalho, uma nova formulação é proposta para a dinâmica do cabo, consistindo em supor que a flexibilidade contínua do cabo é representada por uma aproximação discreta, constituída de elos rígidos conectados por articulações elásticas fictícias. Trata-se de uma tese cujos principais resultados foram publicados em Pereira *et al.* (2012). Zanela (2013) utiliza uma abordagem discreta para a modelagem tridimensional de estruturas flexíveis do tipo cabo, introduzindo algoritmos genéricos que permitem gerar de forma automática os modelos dinâmicos, independentemente do número de elos escolhidos para a dinâmica. Em Pouzada (2017) um formalismo discreto foi utilizado para a modelagem dinâmica de cabos conectados a plataformas móveis e ainda, com uma das extremidades fixa ao fundo do mar. Em Gomes *et al.* (2016) foi proposto um novo formalismo para a modelagem dinâmica de cabos no espaço tridimensional, cuja principal contribuição é a formulação de algoritmos para gerar as matrizes e vetores do modelo discreto, para um número qualquer de graus de liberdade considerado no modelo.

O objetivo principal do presente trabalho é realizar um estudo sobre a modelagem dinâmica de estruturas flexíveis do tipo cabo, propondo uma formulação analítica para modelar um problema de aplicação no ambiente subaquático, tratando-se de um cabo suspenso por duas plataformas que podem se movimentar na direção vertical,

simulando o efeito ondulatório da superfície do mar. Desta forma, ressalta-se que a principal contribuição do presente trabalho é mostrar como o problema puramente acadêmico da corda vibrante ideal pode ser adaptado para modelar dinamicamente uma importante aplicação subaquática, com plataformas flutuantes móveis nos contornos da estrutura flexível. O artigo também apresenta a formulação discreta do problema analítico, de forma a facilitar a interação do cabo com outras dinâmicas ou esforços externos, como é o caso do arrasto hidrodinâmico na presente aplicação. O estudo primeiramente será no sentido de se realizar comparações entre as curvas catenária e parábola, usadas em muitos trabalhos como configuração espacial de cabos em equilíbrio estático. Compara-se a catenária prevista de forma analítica com a configuração espacial do cabo obtida experimentalmente. Posteriormente, um formalismo analítico clássico é adaptado ao problema da referida aplicação subaquática. Utiliza-se o método de diferenças finitas para a solução numérica do modelo, incluindo-se em seguida uma análise qualitativa dos resultados de simulações.

2. Aproximação da Curva Catenária por uma Parábola

Na configuração de equilíbrio estático, cabos, fios e correntes presos em suas extremidades e sujeitos ao próprio peso possuem a conformação na forma de catenária, sendo natural, portanto, que o estudo de cabos inicie-se por meio da apresentação das equações que descrevem esta curva. A Figura 2 ilustra uma catenária, onde são mostradas as tensões T_0 com inclinação nula e T em um ponto qualquer, que está sendo designado por (x, y) .

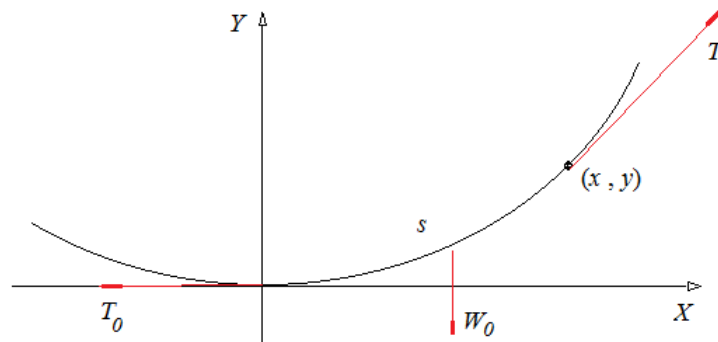


Figura 2. Um trecho de comprimento s de uma catenária.

A equação diferencial da catenária é desenvolvida a partir das equações de equilíbrio estático, obtendo-se:

$$y' = \sinh ax \quad (1)$$

onde $a = W_0/T_0$, com W_0 equivalente ao peso por unidade de comprimento do cabo. Integrando-se a Equação (1) e fazendo-se uso da condição $y(0) = 0$, chega-se a:

$$y = \frac{1}{a} [\cosh(ax) - 1] \quad (2)$$

O comprimento de arco s é igual ao comprimento do cabo L desde 0 até o ponto final x_f e é dado por:

$$L = \frac{1}{a} \sinh(ax_f) \quad (3)$$

Considerando-se conhecidos o comprimento L do cabo e a posição x_f da carga terminal, outra forma de se determinar a constante a consiste na aplicação do algoritmo da bissecção à equação:

$$L - \frac{1}{a} \sinh(ax_f) = 0 \quad (4)$$

Este resultado analítico apresentado foi comparado com um equivalente experimental, sendo utilizadas para a equação analítica as mesmas condições do experimento. O experimento consistiu em um cabo muito flexível, estilo corda, de material sintético, com uma das extremidades fixa ao teto. A outra extremidade foi mantida em uma posição final (x_f, y_f) , formando assim uma catenária como configuração espacial. O cabo tem comprimento total $L = 2.585 \text{ m}$. O experimento montado consiste na captação da configuração espacial do cabo a partir de uma câmera digital. A Figura 3-a mostra a imagem do cabo em sua configuração espacial de equilíbrio estático, enquanto a Figura 3-b a curva catenária ressaltando dois pontos: um na metade do comprimento do cabo e outro na sua extremidade. Percebe-se que as posições teóricas previstas com a catenária praticamente coincidem com as experimentais. É importante ressaltar que esse resultado só acontece porque o cabo escolhido é extremamente flexível, de forma que as tensões internas oriundas de forças de potencial elástico são negligenciáveis.

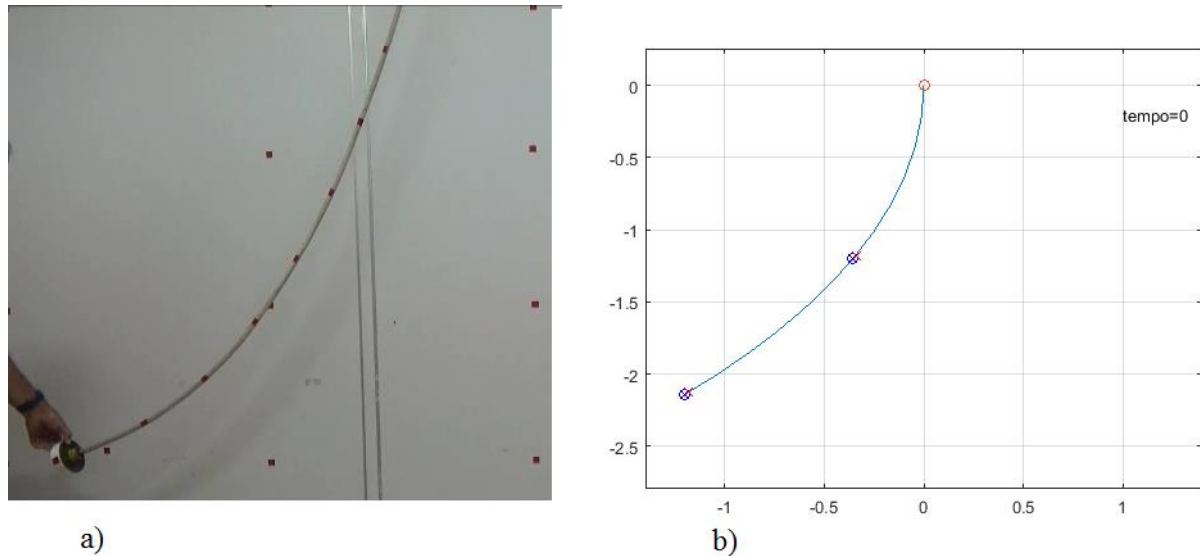


Figura 3. Configuração espacial do cabo: a) imagem captada; b) curva obtida destacando-se os pontos experimental ("x" em vermelho) e teórico ("o" em azul).

Alguns trabalhos científicos (BENEDETTINI *et al.* 1995, GUO *et al.* 2017) que utilizam diferenças finitas para a solução das equações diferenciais que representam a dinâmica de um cabo suspenso em dois pontos consideram, para a configuração espacial inicial do cabo, a seguinte equação parabólica:

$$y(x) = \frac{4b}{l} \left(x - \frac{1}{l} x^2 \right) \quad (5)$$

No presente trabalho, a parábola (Equação (5)) também foi usada como configuração espacial do cabo em equilíbrio estático, para o caso do cabo suspenso por duas plataformas móveis. Foram utilizados um vão $l = 30 \text{ m}$ e uma flecha $b = 4 \text{ m}$, de forma que o comprimento total do cabo é $L = 31.367 \text{ m}$. A Figura 4 mostra, na parte superior, uma superposição da parábola com a catenária nessa condição, enquanto na parte inferior vê-se a diferença entre as curvas catenária e parábola. Percebe-se que, para esta aplicação específica, a utilização da parábola como aproximação mostra-se bem razoável. Observa-se que foi adotado o sentido positivo do eixo y como sendo o mesmo sentido da aceleração da gravidade, de forma que a parábola da Equação (5) tem concavidade voltada para baixo. Porém, para causar uma impressão mais realista, plota-se $-y(x)$ na Figura 4 e em todos os outros gráficos do artigo.

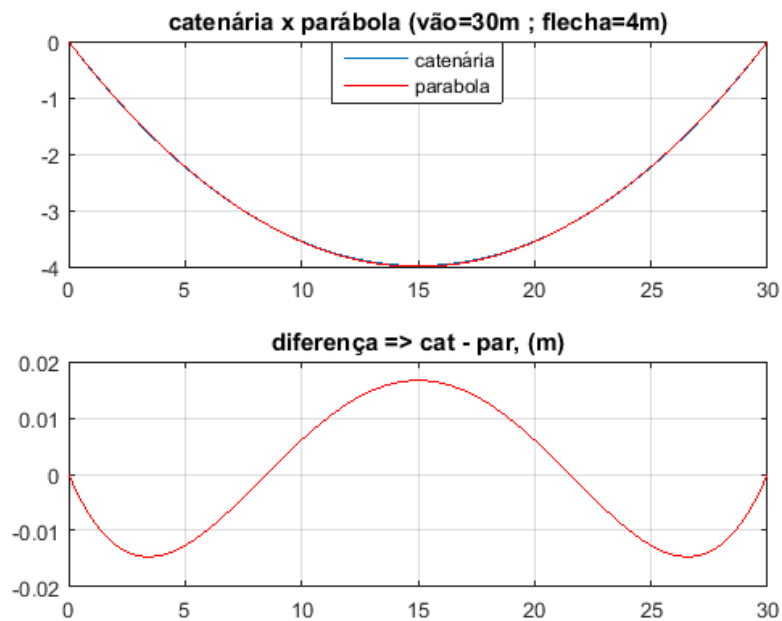


Figura 4. Comparação entre catenária e parábola, para o caso do cabo suspenso por duas plataformas.

3. Dinâmica de um Cabo Suspenso

Esta sessão aborda a dinâmica de cabos suspensos em suas extremidades, iniciando-se pela obtenção das equações analíticas do cabo suspenso. As equações foram obtidas de acordo com um artigo que é referência no estudo da dinâmica de cabos (BENEDETTINI *et al.*, 1995), para o caso de movimento no espaço tridimensional. Porém, no presente trabalho simplificações são feitas de modo a permanecer com a dinâmica no plano vertical. Posteriormente, o modelo analítico obtido é integrado, utilizando-se para isto uma solução numérica via diferenças finitas. É importante ressaltar que, no presente trabalho, o problema puramente acadêmico da corda vibrante, tal como fora proposto anteriormente, é adaptado para modelar uma aplicação dinâmica de cabos suspensos por plataformas móveis flutuantes, de forma que os contornos agora são dinâmicos. A discretização deste problema analítico adaptado também permite fácil interação com outras dinâmicas ou esforços externos, como é o caso do arrasto hidrodinâmico visto na próxima seção. Ressalta-se ainda que a mesma adaptação poderia ter sido feita para a dinâmica do cabo no espaço tridimensional. Porém, a dinâmica de um cabo suspenso por duas plataformas que se movimentam verticalmente se verifica aproximadamente no plano vertical.

Inicia-se neste ponto a obtenção de um modelo contínuo descrevendo a resposta espacial do cabo. As equações diferenciais parciais do movimento são obtidas por meio do princípio de Hamilton. Considere-se um cabo elástico sujeito ao seu peso e suspenso entre dois suportes que estão no mesmo nível (Figura 5). A configuração de equilíbrio estático inicial é denotada por C^1 e tal configuração situa-se no plano Oxy , representada pela função $y(s)$, onde s é a coordenada curvilínea que abrange o comprimento inicial do cabo L_c . Consideram-se E , A e m o módulo de elasticidade, a área de seção reta e a massa por unidade de comprimento do cabo, respectivamente.

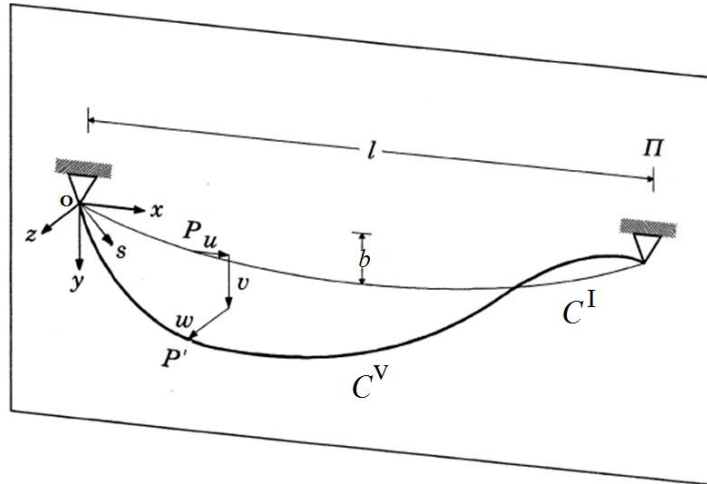


Figura 5. Dinâmica 3D de um cabo elástico suspenso (Benedettini, 1995).

Na Figura 5, a configuração dinâmica do cabo em três dimensões é representada pela curva C^V . Considera-se atuante sobre o cabo um carregamento dado por $p_i(s, t) = \{p_u, p_v, p_w\}, i = 1, 2, 3$. A estrutura flexível possui movimento descrito pelas componentes do campo de deslocamento $q_i(s, t) = \{u, v, w\}, i = 1, 2, 3$. Usa-se a deformação Lagrangeana como medida de deformação, na forma:

$$\varepsilon(s, t) = x'u' + y'v' + 1/2(u'^2 + v'^2 + w'^2) \tag{6}$$

sendo o apóstrofo a derivada em relação a s , $\frac{\partial}{\partial s}$. Esta deformação é função implícita tanto do s quanto do t e é utilizada na obtenção da componente elástica da energia potencial.

Para a obtenção das equações do movimento utiliza-se o princípio de Hamilton:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K^V - \Pi^V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W^V dt = 0 \tag{7}$$

Na Equação (7) tem-se a energia cinética K^V , a energia potencial Π^V e o trabalho virtual W^V . Cada um desses termos é apresentado a seguir:

$$K^V = \frac{1}{2} m \int_0^{L_c} \left[\sum_{i=1}^3 \dot{q}_i^2 \right] ds \tag{8}$$

$$\Pi^V = \Pi^I + \int_0^{L_c} \left(T^I \varepsilon + \frac{1}{2} EA \varepsilon^2 \right) ds \tag{9}$$

$$\delta W^V = \int_0^{L_c} \sum_{i=1}^3 [mg\delta_{i2} + p_i(s, t) - \mu_i \dot{q}_i] \delta q_i ds \tag{10}$$

O ponto designa a derivada em relação ao tempo $\frac{\partial}{\partial t}$. T^I é a tensão do cabo na configuração inicial, $\mu_i = \{\mu_u, \mu_v, \mu_w\}$ são os coeficientes de amortecimento viscoso por unidade de comprimento e δ_{i2} é o delta de Kronecker. Assume-se neste ponto a configuração de equilíbrio estático como sendo a parábola da Equação (5). Ao assumir tal configuração têm-se as implicações $ds \approx dx$ e $T^I \approx H$, sendo H a componente horizontal da tensão. Nestas condições as equações do movimento no espaço assumem a forma (BENEDETTINI *et al.*, 1995):

$$EA \left\{ u' + y'v' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right\}' - \mu_u \dot{u} + p_u = m\ddot{u} \tag{11}$$

$$\left\{ Hv' + EA(y' + v') \left[u' + y'v' + \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2) \right] \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m\ddot{v} \tag{12}$$

$$\left\{ Hw' + EA w' \left[u' + y' v' + \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2) \right] \right\}' - \mu_w \dot{w} + p_w = m \ddot{w} \quad (13)$$

com as condições de contorno (neste trabalho, adota-se a condição inicial como sendo nula, ou seja, o cabo está em repouso antes de sofrer alguma ação externa):

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \bar{u}_0(t); u(l, t) = \bar{u}_l(t) \\ v(0, t) &= \bar{v}_0(t); v(l, t) = \bar{v}_l(t) \\ w(0, t) &= \bar{w}_0(t); w(l, t) = \bar{w}_l(t) \end{aligned} \quad (14)$$

As condições descritas em (14) correspondem aos movimentos dos suportes (plataformas móveis). O termo entre as chaves da Equação (11) é a tensão adicional no cabo. Algumas simplificações fazem-se presentes neste ponto e uma delas é a do movimento dos suportes. Considera-se aqui que os suportes não possuam movimento na horizontal e isto implica que as condições de contorno ou de fronteira são nulas na variável u :

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Além dessa simplificação tem-se ausência de carregamento externo na direção longitudinal (u), isto é, $p_u = 0$, de forma que o termo relacionado à aceleração longitudinal também pode ser desprezado e isto pode ser feito ao supor que o cabo deforma-se de maneira quase estática. Tal suposição foi discutida em detalhes por Irvine e Caughey para cabos elásticos (IRVINE e Caughey, 1974).

Neste trabalho tem-se interesse no estudo da dinâmica planar (plano vertical) e, dessa forma, a Equação (13) pode ser desprezada, restando duas equações a serem trabalhadas, uma na direção longitudinal e outra na transversal.

As considerações estabelecidas anteriormente permitem escrever as equações (11) e (12) nas formas:

$$EA \left\{ u' + y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right\}' = 0 \quad (16)$$

$$\left\{ H v' + EA (y' + v') \left[u' + y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m \ddot{v} \quad (17)$$

sujeitas às condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \bar{u}_0(t); u(l, t) = \bar{u}_l(t) \\ v(0, t) &= \bar{v}_0(t); v(l, t) = \bar{v}_l(t) \end{aligned} \quad (18)$$

O termo entre as chaves na Equação (16), igual a $e(t)$, é constante com relação à posição x , ou seja, só depende do tempo:

$$u' + y' v' + (1/2)(v'^2) = e(t) \quad (19)$$

Integrando-se a Equação (19) chega-se a:

$$u(x, t) = e(t)x - \int_0^x \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx \quad (20)$$

A função $e(t)$ é determinada por meio da condição de contorno $u(l, t) = 0$:

$$e(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx \quad (21)$$

Logo, $u(x, t)$ na Equação (20) pode ser escrita como:

$$u(x, t) = \frac{x}{l} \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx - \int_0^x \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx \quad (22)$$

Observando-se as equações (17), (19) e (21), percebe-se que o termo dentro dos colchetes em (17) é igual a $e(t)$ e, dessa forma, pode ser substituído por (21):

$$\left\{ H v' + \frac{EA}{l} (y' + v') \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx \right\}' - \mu_v \dot{v} + p_v = m \ddot{v} \quad (23)$$

Deriva-se com relação a x o termo entre as chaves da Equação (23) e obtém-se:

$$H v'' + \frac{EA}{l} (y'' + v'') \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx - \mu_v \dot{v} + p_v = m \ddot{v} \quad (24)$$

A Equação (24) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{m}{H} \ddot{v} + \frac{\mu_v}{H} \dot{v} - v'' - \frac{EA}{Hl} (y'' + v'') \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} (v'^2) \right] dx - \frac{p_v}{H} = 0 \quad (25)$$

Na ausência de carregamento externo, o termo p_v é nulo. Caso o cabo seja fixo nas suas duas extremidades, a Equação (25) admite as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= 0 \\ v(l, t) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

4. O Método de Diferenças Finitas Aplicado ao Problema do Cabo Suspenso

Já foi visto que a configuração de equilíbrio na qual o cabo se conforma é uma catenária ou, por aproximação, uma parábola. Reescrevendo-se a Equação (25) para \ddot{v} tem-se:

$$\ddot{v} = \frac{H}{m} v'' + \left(\frac{EA}{ml} \right) (y'' + v'') \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} v'^2 \right] dx - \frac{\mu}{m} \dot{v} + \frac{F_a}{m} \quad (27)$$

Considerou-se:

$$p_v = F_a = -(\gamma_1 + \gamma_2 |\dot{v}|) \dot{v} \quad (28)$$

consistindo na força de arrasto hidrodinâmico distribuída. Cabos em aplicações reais, com grandes dimensões, possuem dinâmicas lentas, caracterizadas por baixas velocidades, de forma que a constante γ_2 pode ser considerada nula (termo quadrático do arrasto negligenciado). Como as forças peso e empuxo atuam na mesma direção, mas em sentidos opostos, considerar o empuxo no cabo significa multiplicar a gravidade por uma constante: $g_e = \beta g$. Foi adotado $\beta = 0.8$, ou seja, considerou-se o empuxo no cabo equivalente a 20% do seu peso. Observa-se que, na Equação (27), a gravidade está presente no termo H , que corresponde à componente horizontal da tensão no cabo, que por sua vez, depende da força peso.

A Equação (27) representa a dinâmica do cabo no plano vertical. A exemplo do que foi feito em (BENEDETTINI *et al.* 1995), utiliza-se uma aproximação parabólica descrita na Equação (5), cujas derivadas possuem as formas:

$$y' = \frac{4b}{l} \left(1 - \frac{2}{l} x \right) \quad (29)$$

$$y'' = -\frac{8b}{l^2} \quad (30)$$

Substituindo-se as equações (29) e (30) na Equação (27) obtém-se:

$$\ddot{v} = \frac{H}{m} v'' + \left(\frac{EA}{ml}\right) \left(-\frac{8b}{l^2} + v''\right) S - \frac{\mu}{m} \dot{v} + \frac{F_a}{m} \quad (31)$$

onde $S = \int_0^l \left[y' v' + \frac{1}{2} v'^2 \right] dx$. Para integrar a Equação (31) utiliza-se o método de diferenças finitas na forma explícita. Na equação integro-diferencial parcial (31) utilizam-se as seguintes aproximações discretas:

$$\dot{v} \cong \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2dt} \quad (32)$$

$$\ddot{v} \cong \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(dt)^2} \quad (33)$$

$$v' \cong \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx} \quad (34)$$

$$v'' \cong \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(dx)^2} \quad (35)$$

Substituindo-se as equações (32), (33) e (35) na Equação (31) e isolando-se $v_{i,j+1}$ chega-se a:

$$v_{i,j+1} = \frac{1}{1 + \alpha dt} \left[2v_{i,j} - (1 - \alpha dt)v_{i,j-1} + \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S\right) (v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}) - \frac{8bEA}{ml^3} S dt^2 \right] \quad (36)$$

onde $\alpha = (\mu + \gamma_1)/(2m)$ e S possui a forma:

$$S = \int_0^l \left[\frac{4b}{l} \left(1 - \frac{2}{l}x\right) \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2dx}\right)^2 \right] dx \quad (37)$$

Embora a notação seja extremamente conhecida, ressalta-se que $v_{i,j} = v(x_i, t_j)$, onde x_i, t_j formam o domínio discreto da solução, sendo dx e dt os passos no espaço e no tempo, respectivamente. No entanto, para o primeiro passo de tempo em $j = 0$, necessita-se da condição inicial de velocidade (velocidade inicial nula). A condição inicial para o problema do cabo preso em suas extremidades é dada por:

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{j=0} \cong \frac{v_{i,1} - v_{i,-1}}{2dt} = 0$$

$$v_{i,1} = v_{i,-1} \quad (38)$$

Usa-se a Equação (38) para calcular a Equação (36) para $j = 0$ e, dessa forma, determinar os elementos $v_{i,1}$:

$$v_{i,1} = \left[1 - \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S_0\right) \right] v_{i,0} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \left(\frac{H}{m} + \frac{EA}{ml} S_0\right) (v_{i+1,0} - v_{i-1,0}) - \frac{8bEA}{ml^3} S_0 dt^2 \right] \quad (39)$$

com S_0 dado pela Equação (37) no caso em que $j = 0$. A Equação (39) pode ser utilizada para calcular v no primeiro passo de tempo. Nos demais tempos utiliza-se a Equação (36). No cálculo das integrais S_0 e S utiliza-se a regra de Simpson em cada passo de integração: para cada valor de j a integral é resolvida no intervalo de integração $0 \leq x \leq l$. Na próxima seção os resultados das simulações são apresentados. Para as simulações utilizam-se como passos no tempo e no espaço os valores $dt = 7.5 \times 10^{-5} s$ e $dx = 0.375 m$. Observa-se que, como foi utilizado o método de diferenças finitas na forma explícita, o passo no domínio do tempo foi muito pequeno, suficiente para evitar instabilidade numérica.

4. Simulações e Análise de Resultados

As simulações apresentadas a seguir foram realizadas considerando-se o cabo dentro d'água. Considera-se ainda que as plataformas flutuantes tenham massas muito mais significativas do que a massa do cabo, de forma que suas dinâmicas não são perturbadas pelos esforços oriundos do cabo. Esta última consideração permite representar os movimentos das plataformas (representadas em vermelho na Figura 6) a partir de variações nas posições verticais dos contornos.

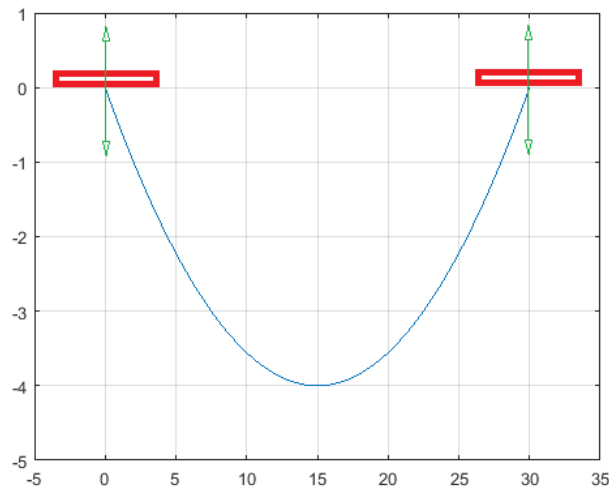


Figura 6. Representação do cabo suspenso por duas plataformas que se movimentam na vertical (escalas em metros).

Os parâmetros físicos adotados para o cabo idealizado para a realização das simulações podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros físicos adotados para a realização de simulações

Parâmetro	Valor numérico
Comprimento entre suportes	$l = 30 \text{ m}$
Flecha máxima	$b = 4 \text{ m}$
Comprimento do cabo	$L = 31.367 \text{ m}$
Massa específica	$\rho = 0.4938 \text{ kg/m}$
Coefficiente de amortecimento	$\mu = 0.2 \text{ Ns/m}$
Coefficiente de arrasto hidrodinâmico	$\gamma_1 = 0.45 \text{ Ns/m} ; \gamma_2 = 0$
Módulo de Young	$E = 2.109 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$

Para observar a dinâmica ao longo do cabo, uma pequena perturbação foi admitida até o tempo $t \leq 1\text{s}$. Esse tempo está relacionado a um ciclo completo, ou seja, equivalente ao período da onda senoidal aplicada à posição vertical do primeiro contorno (primeira plataforma). O algoritmo utilizado para realizar esta perturbação inicial é apresentado abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \text{if } t(i) \leq 1, \\
 & \quad V_0(i) = 0.35 \sin(2\pi t(i)); \\
 & \quad V_f(i) = 0; \\
 & \quad \text{else} \\
 & \quad V_0(i) = 0; \\
 & \quad V_f(i) = 0; \\
 & \text{end,}
 \end{aligned} \tag{46}$$

$V_0(i)$ e $V_f(i)$ são as posições verticais das plataformas (contornos) da esquerda e da direita, respectivamente.

Na Figura 7 apresenta-se a configuração espacial do cabo com frames a cada 0.2 s. Em vermelho vê-se a configuração espacial do cabo em equilíbrio estático, enquanto que em azul encontra-se a configuração espacial do cabo na sua evolução dinâmica. A perturbação senoidal aplicada na plataforma esquerda gera uma oscilação que percorre toda a extensão do cabo, chega à plataforma direita que está fixa e é refletida de volta, de forma bem mais atenuada, conforme esperado fisicamente. Esta reflexão é mais nitidamente percebida na próxima figura, que considera 5 s de simulação.

Na Figura 8 apresenta-se a configuração espacial do cabo ao longo do tempo, formando assim uma superfície sobre a grade do domínio discreto (x_i, t_j) . Observa-se nos instantes iniciais a perturbação gerada na plataforma da esquerda. Esse gráfico complementa o resultado mostrado na Figura 7. Percebe-se que o movimento senoidal imposto à plataforma da esquerda gera uma oscilação no cabo que reflete na plataforma da direita, retornando com igual velocidade de propagação, embora atenuada em razão do atrito estrutural e do arrasto hidrodinâmico. Estes resultados já eram esperados fisicamente, de forma que atestam, qualitativamente, a boa representatividade do modelo aplicado a este problema específico.

Uma simulação semelhante foi realizada, modificando-se apenas a perturbação, agora aplicada nas duas plataformas, conforme o algoritmo a seguir:

$$\begin{aligned}
 & \text{if } t(i) \leq 1, \\
 & \quad V_0(i) = 0.35\sin(2\pi t(i)); \\
 & \quad V_f(i) = -0.35\sin(2\pi t(i)); \\
 & \quad \text{else} \\
 & \quad \quad V_0(i) = 0; \\
 & \quad \quad V_f(i) = 0; \\
 & \text{end,}
 \end{aligned} \tag{47}$$

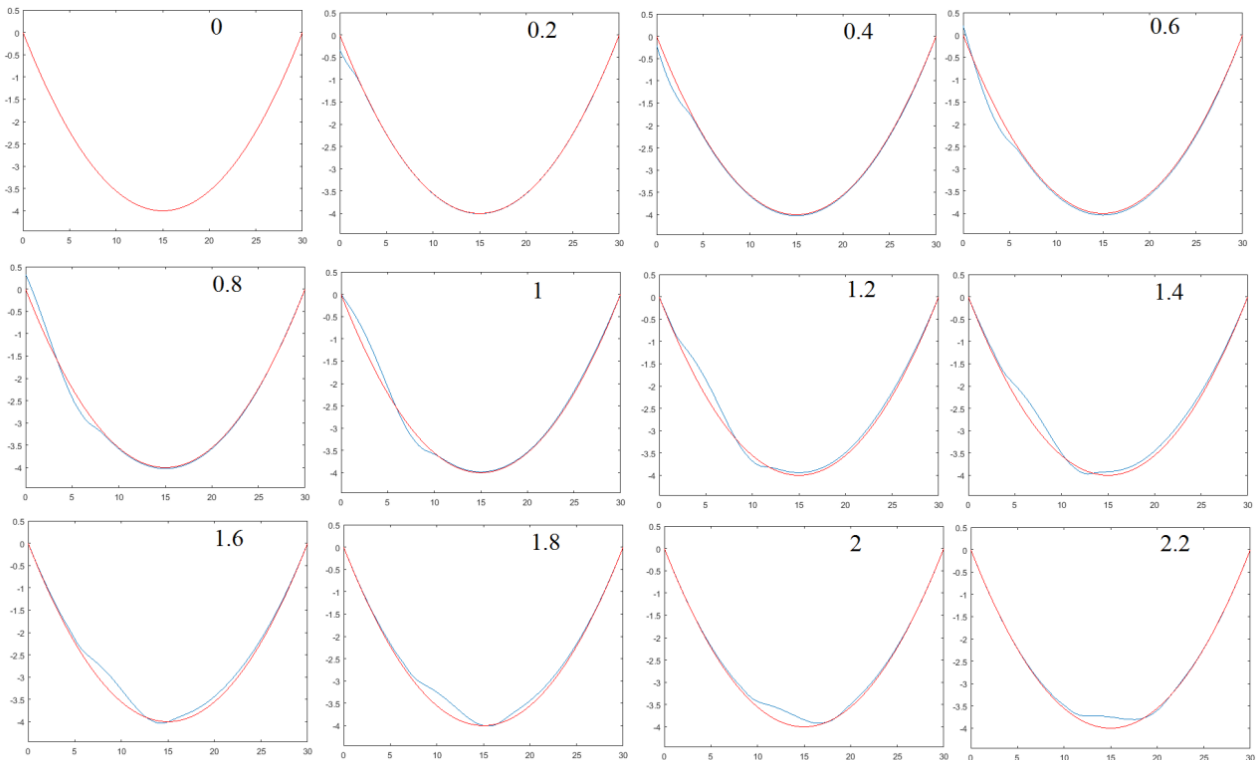


Figura 7. Configuração espacial do cabo com frames a cada 0.2 s (perturbação na plataforma esquerda).

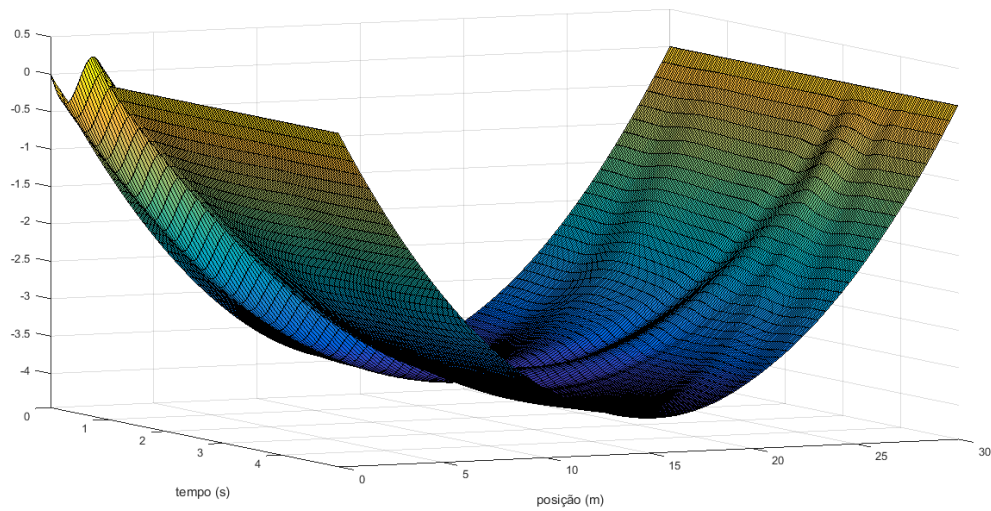


Figura 8. Superfície mostrando a resposta dinâmica do cabo a uma perturbação oriunda da plataforma da esquerda.

A Figura 9, a exemplo da Figura 7, mostra a evolução dinâmica da configuração espacial do cabo, agora com perturbações senoidais em ambas as plataformas. Estas perturbações geram ondas que se cruzam em sentidos opostos, efeito que pode ser também visualizado na Figura 10. Mais uma vez, a dinâmica do cabo comporta-se conforme o esperado fisicamente.

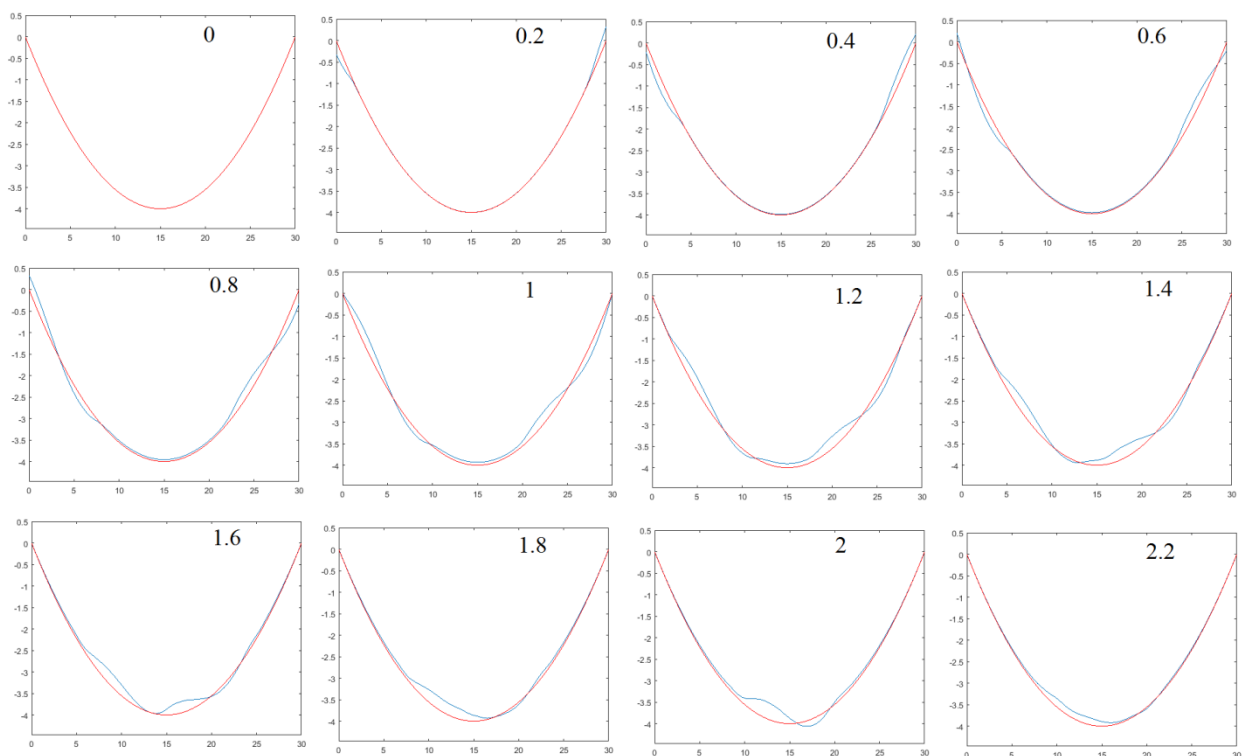


Figura 9. Configuração espacial do cabo com frames a cada 0.2 s (perturbação em ambas as plataformas).

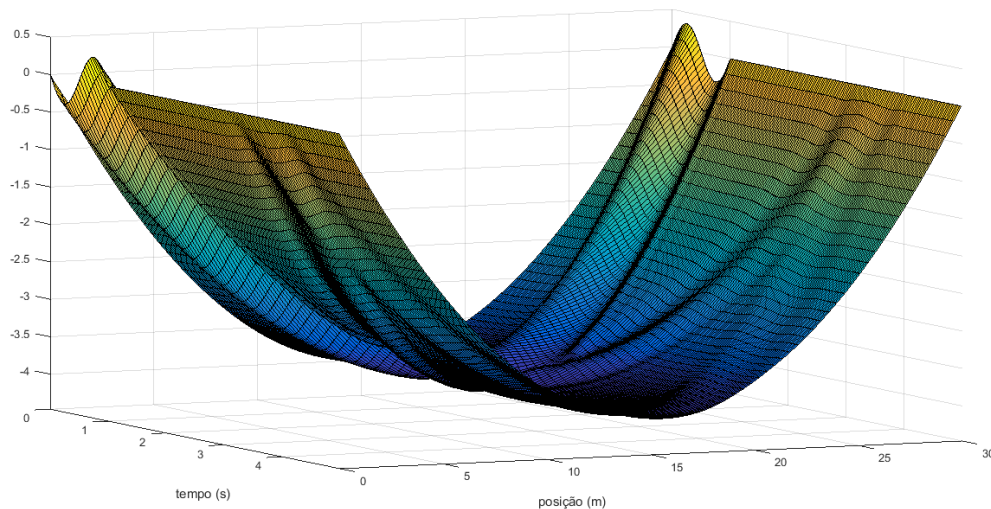


Figura 10. Superfície mostrando a resposta dinâmica do cabo a perturbações em ambas as plataformas.

5. Conclusões

No presente trabalho foi realizado um estudo sobre a dinâmica de cabos suspensos, bem como sobre suas configurações espaciais em equilíbrio estático, considerando-se principalmente comparações entre as curvas catenária e parábola. Um formalismo clássico de modelagem dinâmica foi adaptado para simular um problema específico de aplicação subaquática, consistindo em um cabo suspenso por duas plataformas flutuantes, que podem se movimentar na direção vertical. A dinâmica adaptada ao problema específico passa a ser representada por uma equação integro-diferencial parcial, cuja solução numérica foi realizada a partir do método de diferenças finitas. Os resultados de simulações mostraram comportamentos dinâmicos conforme o esperado fisicamente, atestando, de forma qualitativa, a boa representatividade do modelo neste problema específico. Um software que permite animação gráfica foi construído especificamente para possibilitar uma melhor análise dos resultados de simulações. As animações computacionais mostraram uma boa sensação de realidade física, corroborando assim com a análise positiva quanto à validação qualitativa da modelagem dinâmica. A motivação principal de se trabalhar sobre esse problema é a grande quantidade de aplicações tecnológicas envolvendo estruturas flexíveis do tipo cabo, principalmente voltadas à indústria de extração de petróleo *offshore*. Trata-se de um tema que desperta muito o interesse da comunidade científica, pois a indústria do petróleo financia muitas pesquisas em todo o planeta. Em trabalhos futuros, pretende-se comparar os resultados do presente trabalho com outra técnica de modelagem baseada em um formalismo discreto. Pretende-se ainda validar ambos os formalismos de modelagem de forma quantitativa, a partir de comparações com resultados experimentais.

Referências

1. BENEDETTINI, F., Rega, G. and Alaggio R. Non-linear oscillations of a four-degree-of-freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 1995;182(5):775-798.
2. CHANG, B. S, Park, J. and Lee, K. Nonlinear dynamic analysis of spatially suspended elastic catenary cable with finite element method. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 2008;2(12):121-128.
3. CHATJIGEORGIOUS, I. K. and Mavrakos, A. The 3d nonlinear dynamics of catenary slender structures for marine applications. *Nonlinear Dynamics*. INTECH. 2010:366.
4. ESCALANTE, M. R., Sampaio, R., Rosales, M. B. and Ritto, T. A reduced order model of a 3d cable using proper orthogonal decomposition. *Mecánica Computacional*. 2011;XXX:1143-1158.
5. GOMES S. C. P., Zanela, B. E. and Pereira, A. E. L. Automatic generation of dynamic models of cables. *Ocean Engineering*. 2016; 121: 559–571.
6. GUO, T., Kang, H., Wang, L. and Zhao, Y. An asymptotic expansion of cable-flexible support coupled non-linear vibrations using boundary modulations. *Nonlinear Dynamics*. 2017;88(1):33-59.

7. IRVINE, H. M. and Caughey, T. K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1974;341(1626):299-315.
8. LUONGO, A., Zulli, D. and Piccardo, G. Analytical and numerical approaches to nonlinear galloping of internally resonant suspended cables. Journal of Sound and Vibration. 2008;31:375-393.
9. PEREIRA, A. E. L. O método da decomposição de Adomian aplicado à interação fluido-estrutura de um cabo[thesis]. Porto Alegre: Matemática Aplicada/UFRGS;2010. 184p.
10. PEREIRA, A. E. L., Gomes, S. C. P. and Bortoli, A. L. A new formalism for the dynamic modelling of cables. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2012;1:1-14.
11. POUZADA, T. A. and Gomes, S. C. P. Geração Automática de modelos dinâmicos de cabos. Ciência e Natura. 2017;39:390-401.
12. SRIVASTAVA, V. K., Yvss, S. and Tamsir, M. Dynamic behaviour of underwater towed-cable in linear profile. International Journal of Scientific & Engineering Research. 2011;2 (7):1-10.
13. Tecpetro: <https://tecpetro.com/2015/12/14/dutos-submarinos/>, acessado em 10/10/2020.
14. WOLFSCHLUCKNER, A. and Jodin, D. Modelling cable dynamics exemplified by load transposition of insulator string in overhead lines. Proceeding in Manufacturing Systems. 2013;8(3):141-146.
15. ZANELA, E. B. Modelagem Analítica de Estruturas do Tipo Cabo Para Aplicações Subaquáticas[dissertation]. Rio Grande: Engenharia Oceânica/FURG; 2013. 146p.