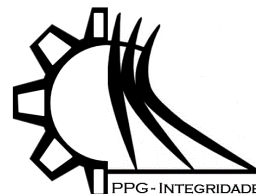




ISSN 2447-6102

Artigo



APLICAÇÃO DO MÉTODO DE VOLUMES DE CONTROLE BASEADO EM ELEMENTOS PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM MATERIAIS COMPÓSITOS

Van Els, P.P.D.¹, Cunha, F.A.^{2,*} and Vieira, W.³

¹ Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde / PPGEAS; pedro.dunice@gmail.com

² Faculdade UnB Gama/Engenharia Aeroespacial; fabioalfaia@unb.br

³ Faculdade UnB Gama/Engenharia Aeroespacial; william.t@ieee.org

* Correspondence: fabioalfaia@unb.br

Received: 06/11/2020; Accepted: 05/12/2020; Published: 31/12/2020

Resumo: O projeto ótimo de máquinas térmicas ou de equipamentos eletrônicos necessita de um conhecimento profundo dos fenômenos de transporte. Ainda que as equações governantes associadas sejam conhecidas há séculos, só nas últimas décadas é que métodos de solução eficientes ficaram ao alcance da engenharia. O Método de volumes de controle baseado em elementos é um dos métodos numéricos que possibilita a derivação de soluções aproximadas a partir de equações diferenciais fundamentais. Este trabalho apresenta detalhadamente a aplicação do método supracitado para discretização da equação de transferência de calor 3D, apresenta um método de cálculo da condutividade térmica efetiva para materiais compósitos e examina os resultados das soluções numéricas.

Palavras-chave: Transferência de calor. Método de volumes de controle baseado em elementos. Materiais compósitos.

APPLICATION OF CONTROL VOLUME BASED FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLUTION OF THE HEAT TRANSFER EQUATION IN COMPOSITE MATERIALS

Abstract: The development of thermal machines or electronic devices requires a deep knowledge about transport phenomena. Albeit the associate governing equations are well known for centuries, only in the last decades a cheap and efficient solution method became engineering accessible. The control volume finite element method is one of the numerical methods which makes the derivation of approximated solutions from fundamental differential equations possible. This paper presents in details the aforementioned method in the application of 3D heat transfer equation discretization, presents a method of calculating the effective thermal conductivity for composite materials and verifies the numerical solution considering composite materials.

Key-words: Heat transfer. Control volume finite element method. Composite materials.

1. Introdução

O projeto de máquinas térmicas e equipamentos eletrônicos mais eficientes e menos poluentes é um dos principais objetivos da indústria atual. O funcionamento eficiente de máquinas ou equipamentos eletrônicos geralmente está associado a estreitas faixas de temperatura (SUNDÉN e YUAN, 2013). Segundo Costa e Vlassov (2011), alguns dos métodos mais comuns para fornecer controle térmico em equipamentos eletrônicos são: Dissipadores de calor e planos de condução térmica. Os dissipadores de calor transferem o calor gerado por um dispositivo eletrônico

para um meio fluido. Os planos de condução térmica, dentro de placas de circuitos impressos, conduzem o calor para longe dos componentes geradores. Ambos os métodos de controle térmico citados envolvem materiais compósitos.

A manufatura aditiva de metais e a usinagem por máquina controlada por comandos numéricos ampliou significativamente a complexidade do projeto de dissipadores de calor. Por exemplo, Lei et al. (2018) utilizou otimização de topologia (OT) para projetar três dissipadores de calor para convecção natural e construiu cinco dissipadores de calor de pino de referência para comparação. Resultados de simulação e de experimentação mostram que os dissipadores de calor obtidos por OT conseguiram melhor desempenho de dissipação de calor em comparação com os dissipadores de calor de pino-aleta, para condições de operação similares. Em Lu et al. (2017) um novo design de dissipador de calor ondulado de microcanal com aletas porosas foi proposto para reduzir simultaneamente a queda de pressão e a resistência térmica. O modelo matemático utilizado para validar a eficácia do projeto era tridimensional e considerava transferência de calor em meios conjugados. Os resultados mostraram que o dissipador de calor reduzia simultaneamente a queda de pressão e a resistência térmica em comparação com os dissipadores de calor de microcanal ondulados convencionais com aletas sólidas. Neste novo mundo, domínios retangulares dão lugar a domínios de materiais compostos ondulados ou fractais, que impossibilitam uma solução analítica das equações de transferência de calor. Para enfrentar tais problemas tem-se empregado métodos numéricos modernos que utilizam malhas computacionais não-estruturadas, que ainda não são abordados em livros didáticos de transferência de calor, tais como, Çengel e Ghajar (2009), Incropera et al. (2016) e Kreith et al. (2016).

Dada a importância do tema e para uma difusão em linguagem mais acessível, neste trabalho é apresentado um método numérico de solução da equação de transferência de calor 3D que pode ser utilizado com materiais compósitos, baseado nos trabalhos de Saabas (1991), Saabas e Baliga (1994) e Tombarevé et al. (2013).

2. Método Computacional

O método de volumes de controle baseado em elementos finitos (Control Volume Finite Element Method - CVFEM) combina e estende os conceitos do método de elementos finitos e do método de volumes finitos (Saabas e Baliga, 1994). De acordo com Saabas (1991) a formulação do método envolve os passos básicos:

- Discretização do domínio em elementos e discretização em volumes de controle associados aos vértices dos elementos;
- Definição de funções de interpolação baseadas nos elementos para as variáveis dependentes;
- Derivação de equações discretizadas (aproximações algébricas das equações diferenciais governantes);
- Montagem elemento por elemento das equações no domínio discreto;
- Definição de um processo para resolver as equações algébricas resultantes.
- Os passos descritos acima serão apresentados a seguir.

2.1 Discretização do domínio em elementos e discretização em volumes de controle associados aos vértices dos elementos

No método computacional os elementos finitos tetraédricos são utilizados para discretização do domínio geométrico e também para interpolação das incógnitas de cálculo (SAABAS e BALIGA, 1994). Com base nos elementos finitos são formados volumes de controle poliédricos, centrados nos vértices, que são utilizados na integração das equações diferenciais. Na Figura 1 (a) é apresentado um elemento tetraédrico, a divisão interna utilizada para formação dos volumes de controle e também são destacados os pontos de integração numérica. Na Figura 1 (b) a parte sombreada destacada a subsuperfície de controle interna ao elemento 1234, associada ao volume 1. Outros elementos que compartilhem o vértice 1 fornecerão outras subsuperfícies. E Na Figura 1 (c) é apresentado um volume de controle completo centrado no vértice 1 e todos os elementos que contribuem para sua formação.

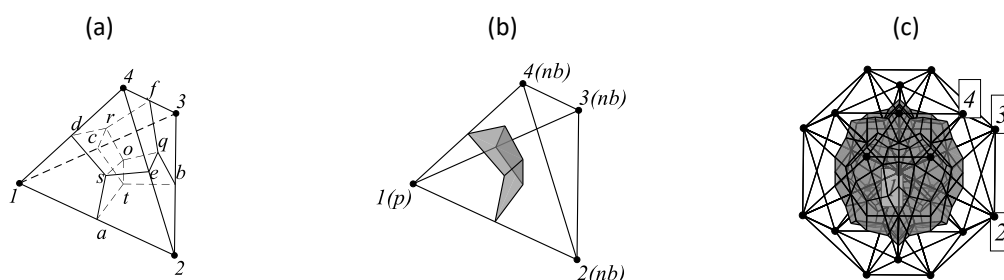


Figura 1. (a) Elemento finito, (b) Superfície interna ao elemento e (c) Volume centrado no vértice 1.

2.2 Definição de funções de interpolação baseadas nos elementos para as variáveis dependentes

Para realização da integração da equação diferencial de um escalar genérico ϕ é necessário aproximar sua variação no elemento finito, o que pode ser feito por meio de uma função de interpolação linear (TOMBAREVÉ et al., 2013). Em termos de funções de base a seguinte função de interpolação será utilizada:

$$\phi = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 + N_4\phi_4 \tag{1}$$

Em que os quatro índices estão associados aos vértices do tetraedro. Cada uma das quatro funções de base pode ser calculada como segue:

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) / DET \tag{2}$$

Em que $i = 1, 2, 3, 4$ e $DET = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$

As componentes do vetor gradiente podem ser calculadas com base na Equação 1 como:

$$\partial\phi / \partial x = (b_1\phi_1 + b_2\phi_2 + b_3\phi_3 + b_4\phi_4) / DET \tag{3}$$

$$\partial\phi / \partial y = (c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3 + c_4\phi_4) / DET \tag{4}$$

$$\partial\phi / \partial z = (d_1\phi_1 + d_2\phi_2 + d_3\phi_3 + d_4\phi_4) / DET \tag{5}$$

2.3 Derivação de equações discretizadas para a difusão de calor em regime permanente

A transferência de calor por difusão, em regime permanente e sem termos de fonte, é descrita pela seguinte equação diferencial (KREITH et al., 2016):

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = 0 \tag{6}$$

Em que ϕ é a temperatura e Γ é um coeficiente difusivo.

A solução analítica da Equação 6 para domínios e condições de contorno complexas pode ser impraticável. Por meio de métodos numéricos é possível derivar um conjunto de equações algébricas que aproxima a solução da Equação 6 para quaisquer domínios e condições de contorno. Segundo Saabas (1991), a derivação do conjunto de equações algébricas tem início com a integração da Equação 6 sobre um volume 1, V_1 , e com a utilização do teorema da divergência de Gauss para associar a integral sobre V_1 a uma integral sobre a superfície que o envolve, A_1 :

$$\int_{V_1} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \iint_{A_1} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA = 0 \tag{7}$$

Considerando o volume de controle da Fig. 1(c), então, pode-se decompor a integral de superfície como segue:

$$\iint_{A_1} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA = \int_{A_{atos}} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA + \int_{A_{crot}} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA + \int_{A_{dsor}} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA + \left(\begin{array}{l} \text{contribuição similares de outros elementos associados com o vértice 1} \\ \text{contribuições dos contornos, se aplicável.} \end{array} \right) \tag{8}$$

Em que, somente as integrais sobre as superfícies A_{atos} , A_{crot} e A_{dsor} , internas ao elemento 1234 e associadas ao volume do vértice 1, são explicitadas.

Se as componentes do vetor gradiente forem calculadas pelas Equações 3, 4 e 5, as mesmas podem sair da integral de superfície da Equação 8, por serem constantes. Além disso, admite-se que Γ sobre a superfície *atos* pode ser aproximado por seu valor no centro da própria superfície, representado por Γ_{atos} , e também que $\int_{A_{atos}} n dA \cong nA^{atos}$, em que $nA^{atos} = n_x^{atos} \mathbf{i} + n_y^{atos} \mathbf{j} + n_z^{atos} \mathbf{k}$. Cada elemento finito pode ter uma condutividade térmica diferente, assim, se a distribuição espacial de condutividade térmica for conhecida, é possível calcular a transferência de calor em qualquer material composto.

Combinando as aproximações mencionadas pode-se associar a integral da Equação 8 a uma equação algébrica associada ao elemento, dita local:

$$\iint_{A_1} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA \cong \left(\begin{array}{l} C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3 + C_{14}\phi_4 \\ \text{contribuições similares de outros elementos associados com o vértice 1} \\ \text{contribuições dos contornos, se aplicável.} \end{array} \right) \tag{9}$$

Em que C_{ij} são coeficientes algébricos locais:

$$C_{11} = \frac{\Gamma_{atos}}{DET} (n_x^{atos} b_1 + n_y^{atos} c_1 + n_z^{atos} d_1) + \frac{\Gamma_{crot}}{DET} (n_x^{crot} b_1 + n_y^{crot} c_1 + n_z^{crot} d_1) + \frac{\Gamma_{dsor}}{DET} (n_x^{dsor} b_1 + n_y^{dsor} c_1 + n_z^{dsor} d_1) \quad (10)$$

$$C_{12} = \frac{\Gamma_{atos}}{DET} (n_x^{atos} b_2 + n_y^{atos} c_2 + n_z^{atos} d_2) + \frac{\Gamma_{crot}}{DET} (n_x^{crot} b_2 + n_y^{crot} c_2 + n_z^{crot} d_2) + \frac{\Gamma_{dsor}}{DET} (n_x^{dsor} b_2 + n_y^{dsor} c_2 + n_z^{dsor} d_2) \quad (11)$$

$$C_{13} = \frac{\Gamma_{atos}}{DET} (n_x^{atos} b_3 + n_y^{atos} c_3 + n_z^{atos} d_3) + \frac{\Gamma_{crot}}{DET} (n_x^{crot} b_3 + n_y^{crot} c_3 + n_z^{crot} d_3) + \frac{\Gamma_{dsor}}{DET} (n_x^{dsor} b_3 + n_y^{dsor} c_3 + n_z^{dsor} d_3) \quad (12)$$

$$C_{14} = \frac{\Gamma_{atos}}{DET} (n_x^{atos} b_4 + n_y^{atos} c_4 + n_z^{atos} d_4) + \frac{\Gamma_{crot}}{DET} (n_x^{crot} b_4 + n_y^{crot} c_4 + n_z^{crot} d_4) + \frac{\Gamma_{dsor}}{DET} (n_x^{dsor} b_4 + n_y^{dsor} c_4 + n_z^{dsor} d_4) \quad (13)$$

A integração da Equação 6 sobre os volumes centrados nos vértices 2, 3 e 4 produzirá os coeficientes: C_{21} , C_{22} , C_{23} , C_{24} , C_{31} , C_{32} , C_{33} , C_{34} , C_{41} , C_{42} , C_{43} e C_{44} .

2.4 Montagem elemento a elemento das equações no domínio discreto

Vários elementos contribuem para a formação de volume de controle centrado em um vértice p . Existirão quatro equações algébricas para cada elemento (similares a Eq. 9), são ditas equações locais por estarem associadas aos elementos. Uma equação algébrica para o volume p , com coeficientes algébricos a_{ij} , dita equação algébrica global, pode ser obtida pela soma das equações algébricas locais associadas ao vértice p , cujos coeficientes são C_{ij} . Por isso, todos cálculos inicialmente visam a determinação dos coeficientes algébricos locais associados aos elementos C_{ij} , e depois estes coeficientes algébricos locais são utilizados para o cálculo de coeficientes algébricos globais associados aos vértices a_{ij} . Quando a contribuição de todos os elementos da malha é finalizada, para cada vértice p existe a seguinte igualdade: $\iint_{A_p} \Gamma \nabla \phi \cdot n dA = a_p \phi_p - (\sum a_{nb} \phi_{nb} + b_p) = 0$, ou simplesmente:

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b_p \quad (14)$$

Em que o subscrito nb indica os volumes de controle vizinhos ao volume de controle centrado no vértice p . O sistema de equações resultante do processo de discretização terá tantas equações quantos volumes de controle existirem na malha computacional.

2.5 Definição de um processo para resolver as equações algébricas resultantes

Os sistemas de equações algébricas provenientes do processo de discretização são de grande porte e altamente esparsos. Devido a isso a montagem das matrizes dos coeficientes no código é realizada no formato coordenado, que armazena a matriz principal em três vetores: um para as linhas, um para as colunas e um para os valores. O sistema de equações é resolvido no código computacional por uma função intrínseca do MATLAB.

2.6 Aplicação de Condições de Contorno

Se um volume de controle p estiver na fronteira do domínio, então a integral de fluxo necessitará de contribuições das condições de contorno do problema para seu fechamento.

A condição de contorno de fluxo de calor devido convecção para um volume de contorno p é obtida a partir da taxa de transferência de calor dada pela Lei do resfriamento de Newton: $\dot{Q}_p = h_p A_p (\phi_p - \phi_\infty)$, em que h é o coeficiente de troca de calor por convecção, ϕ_p é a temperatura da superfície de contorno p e ϕ_∞ é uma temperatura de referência para a convecção. O balanço de energia em p fica como: $a_p \phi_p - (\sum a_{nb} \phi_{nb} + b_p) = h_p A_p (\phi_p - \phi_\infty)$. Com isso, a equação algébrica de contorno modificada pela condição de contorno fica:

$$A_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + B_p, \quad A_p = a_p - h_p A_p \quad \text{e} \quad B_p = b_p - h_p A_p \phi_\infty. \quad (15)$$

Se o fluxo de calor em um contorno do domínio for conhecido, q_p [Wm^{-2}], este pode ser utilizado como condição de contorno. A aplicação deste tipo de condição de contorno requer o conhecimento da área de contorno associada ao vértice p , referenciada de s_p . Com isso, a aplicação da condição de contorno consiste em adicionar o termo $q_p s_p$ a

B_p : $B_p = b_p - h_p A_p \phi_\infty + q_p S_p$. Outra condição que envolve fluxo de calor é a de simetria, neste caso q_p deve ser nulo. Tal condição é satisfeita pela Equação 15 sem qualquer intervenção.

A condição de contorno de temperatura especificada é imposta editando a Equação 15 da seguinte forma: $\sum a_{nb} \phi_{nb} = 0$, $A_p = 1$ e $B_p = \phi_{p, especificado}$.

3. Resultados

Um código foi programado na linguagem do software MATLAB com a metodologia numérica apresentada para realização das simulações. Três casos serão apresentados a seguir, com o objetivo de verificar o código computacional e testá-lo para materiais compósitos, ou simplesmente compósitos.

3.1. Caso de teste 1: Simulação da transferência de calor através de um sólido simples.

Neste primeiro caso de teste é realizada a verificação do código computacional. Para tal, os resultados obtidos por simulação são comparados aos de um problema obtido em Kreith et al. (2016), que considera a transferência de calor bidimensional em um quadrado de lado unitário, em regime permanente, sem geração de energia e condições de contorno de temperatura especificada, cuja solução analítica é dada por:

$$T(x, z) = \frac{\sinh(\pi z) \sin(\pi x)}{\sinh(\pi)} \quad (16)$$

Condições de contorno $T(x, 0) = 0$, $T(x, 1) = \sin(\pi x / L)$, $T(0, y) = 0$ e $T(1, y) = 0$.

A geometria de base para as simulações é um cubo de lado unitário. As seguintes condições de contorno foram utilizadas: $T(0, y, z) = 0$, $T(1, y, z) = 0$, $T(x, y, 0) = 0$, $T(x, y, 1) = \sin(\pi x / L)$, $\partial T(x, 0, z) / \partial z = 0$ e $\partial T(x, 1, z) / \partial z = 0$. Três malhas foram geradas no software MATLAB para as simulações. Uma malha grossa, com 27 (3x3x3) volumes, apresentada na Figura 2, uma malha média, com 125 (5x5x5) volumes, e uma malha fina, com 729 (9x9x9) volumes.

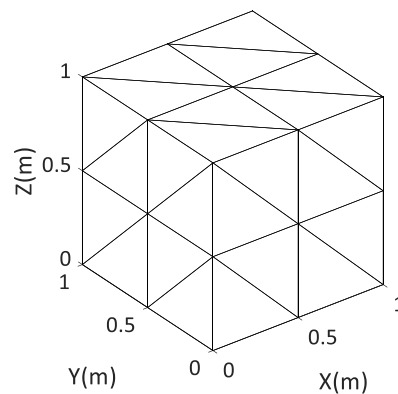


Figura 2. Malha de elementos finitos (malha grossa: 3x3x3=27 volumes).

Um perfil de temperatura é apresentado na Figura 3, sobre a reta definida por $X=0.5$, $Y=0.5$ e $Z=[0,1]$. Os resultados obtidos por simulação são apresentados somente nas posições dos vértices, o que representou três, cinco e nove valores de temperatura para as malhas grosseira, média e fina, respectivamente. Nota-se da Figura 3 que os resultados das simulações convergem para o resultado analítico com o refinamento da malha.

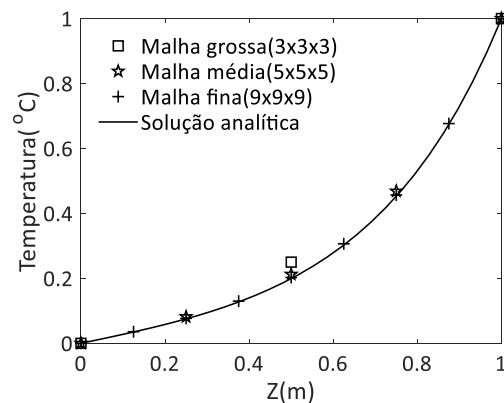


Figura 3. Resultados computacionais para as três malhas.

Campos de temperatura no plano XZ ($Y=0.5$) são apresentados na Figura 4, considerando a solução analítica e uma solução computacional para uma malha com 35937 ($33 \times 33 \times 33$) volumes. Observa-se que os dois campos de temperatura apresentados são similares, que a solução computacional apresenta um nível de detalhamento similar à da solução analítica.

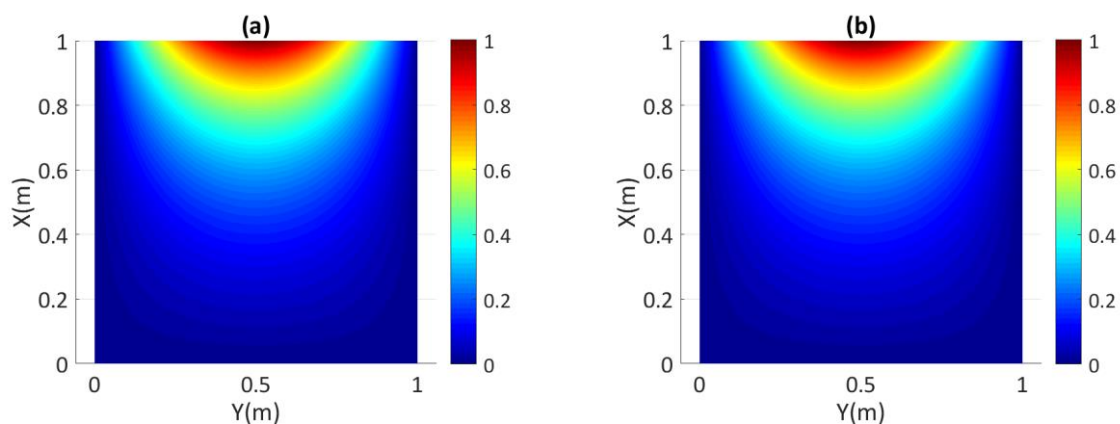


Figura 4. Campos de temperaturas: (a) Solução analítica e (b) Solução computacional.

3.2 Caso 2: Cálculo da condutividade térmica efetiva de materiais compósitos.

A condutividade térmica efetiva é utilizada com frequência para o cálculo do fluxo de calor em placas de circuito impresso. Por exemplo, Xiao et al. (2015) deduziram um conjunto de equações, se baseando no conceito de condutividade térmica efetiva, para otimizar e melhorar a condutividade térmica de vias em placas de circuito impresso de aparelhos de energia elétrica. É produtivo tratar placas de circuitos impressos como um material compósito, pois, uma vez que for mapeada a distribuição de materiais na placa de circuito, uma malha computacional pode ser criada e a simulação pode calcular a condutividade térmica efetiva, o que simplifica drasticamente o problema de transferência de calor.

O caso de transferência de calor em compósitos apresentado em Yoon et al. (2011) é utilizado como referência nesta parte do trabalho para introduzir a metodologia de cálculo da condutividade térmica efetiva, Figura 5.

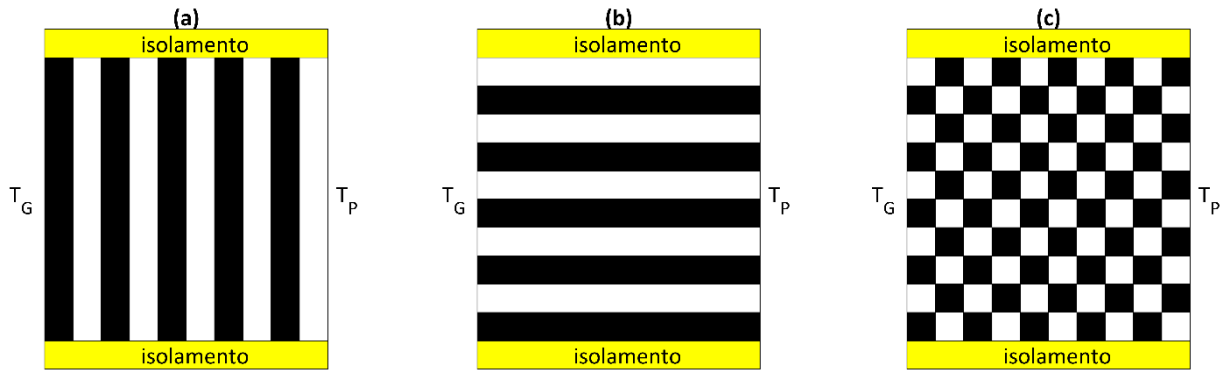


Figura 5. Compósitos. As áreas pretas e brancas representam diferentes materiais.

No primeiro compósito a transferência de calor ocorre sequencialmente, de um material puro após o outro, ou seja, a transferência de calor ocorre em série. No segundo compósito a transferência de calor ocorre simultaneamente através dos materiais puros, ou seja, a transferência de calor ocorre em paralelo. O terceiro material apresenta uma estrutura interna quadrada, cuja característica de transferência de calor será descrita nos resultados.

A condutividade térmica efetiva de cada compósito depende das condutividades térmicas dos materiais puros, da geometria e da transferência de calor. Nos compósitos apresentados na Figura 5 as áreas pretas e brancas possuem condutividades térmicas k_p e k_b , respectivamente. Segundo Yoon et al. (2011), a condutividade térmica efetiva de compósitos com estruturas internas em série e em paralelo podem ser calculadas pelas equações 17 e 18, respectivamente.

$$k_{ef,p} = (1 - v_p)k_b + v_pk_p \tag{17}$$

$$k_{ef,s} = \frac{1}{k_b / (1 - v_p) + k_p / v_p} \frac{k_b}{1 - v_p} \frac{k_p}{v_p} \tag{18}$$

Em que v_p é a fração de volume do material relacionado a cor preta. Nos três materiais $v_p=0.5$.

Compósitos que possuem estruturas internas complexas tornam a tarefa de derivação de equações de condutividade térmica efetiva quase impossível. No entanto, por mais complexa que seja a estrutura interna do compósito, se a mesma puder ser conhecida é possível calcular a condutividade térmica efetiva pela equação:

$$k_{ef} = \frac{1}{\nabla T_m V_m} \int_{V_m} k \nabla T dv \tag{19}$$

Em que ∇T_m é um gradiente de temperatura avaliado no volume total do compósito. O termo V_m é o volume total do compósito e k é uma condutividade térmica local.

A integral da Equação 19 pode ser aproximada da seguinte forma:

$$k_{ef} = \frac{1}{\nabla T_m V_m} \sum_{k=1}^{n_{ele}} [k_k \nabla T_k \delta v_k] \tag{20}$$

Em que k_k é a condutividade, ∇T_k é o gradiente de temperatura e δv_k é o volume de um elemento tetraédrico k . O termo n_{ele} na somatória se refere ao número total de elementos da malha. O volume total do compósito é calculado como: $V_m = \sum_{k=1}^{n_{ele}} \delta v_k$. As componentes de $(\nabla T)_k$ são calculadas pelas Equações 3, 4 e 5. O termo ∇T_m é calculado como: $(T_G - T_P)/L$, sendo L o comprimento do domínio na direção do fluxo de calor.

O domínio de simulação do caso 02 é um prisma quadrangular, com dimensões $L_x=1$, $L_y=1$ e $L_z=0.001$. O comprimento na direção Z foi assumido pequeno para poupar elementos e porque os gradientes na direção Z são desprezados. As seguintes condições de contorno foram consideradas: $T(0,y,z)=T_G$, $T(1,y,z)=T_P$, $\partial T(x,0,z)/\partial y=0$, $\partial T(x,1,z)/\partial y=0$, $\partial T(x,y,0)/\partial z=0$ e $\partial T(x,y,0.001)/\partial z=0$.

Testes de malha foram conduzidos e foi constatado que a discretização necessária para geração de resultados precisos estava associada a uma malha fina com 2004002 volumes. Resultados também são apresentados para uma malha grossa com 51842 volumes.

A condutividade térmica efetiva adimensional k_{ef}/k_B dos compósitos em função da condutividade térmica adimensional k_p/k_B obtidas por simulação são comparadas na Figura 6. Resultados das Equações 17 e 18 foram utilizados como referência para as condutividades efetivas dos compósitos com estrutura interna em serie e em paralelo. O resultado computacional de Yoon et al.(2011) foi utilizado como referência para o compósito de estrutura interna quadrada. Nos resultados se nota um limite superior para a condutividade efetiva quando o compósito tem uma estrutura interna em série. Isso ocorre porque o material que possui menor condutividade limita a transferência de calor. Para o caso da estrutura interna em paralelo é verificado um crescimento da condutividade efetiva proporcional a k_p . O comportamento da condutividade do compósito com estrutura interna quadrada é intermediário aos dois outros materiais mencionados até $k_p \sim 10$, depois seu valor se modifica com k_p de forma semelhante à do compósito que possui estrutura interna em paralelo.

As curvas associadas aos compósitos que apresentam estrutura em serie e em paralelo estão de acordo com as referências, que são equações analíticas. Os resultados obtidos com a malha fina para a estrutura quadrada divergem um pouco dos valores de referência. Por isso resultados para uma malha grossa também são apresentados na Figura 6. Acredita-se que os resultados de Yoon et al.(2011) não estavam independentes da malha, uma vez que se aproximaram dos resultados obtidos com a malha grossa.

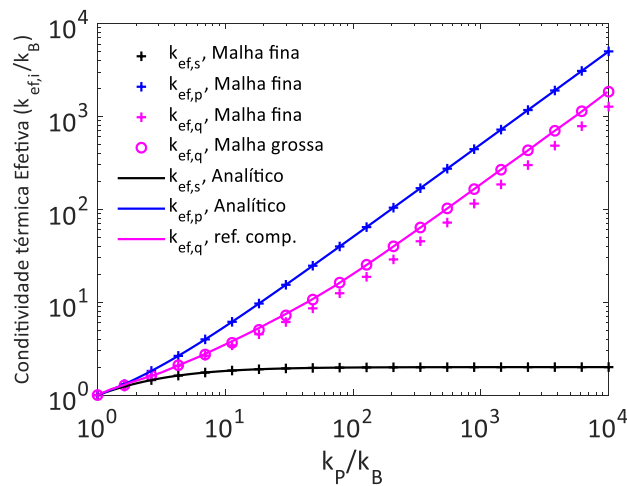


Figura 6. Condutividade térmica efetiva dos três compósitos.

3.3 Caso de teste 3: Eficiência térmica de um dissipador de calor aletado.

Um dissipador de calor aletado é um trocador de calor passivo que transfere calor gerado por um dispositivo eletrônico ou mecânico para um meio fluido, Figura 7. Na fabricação deste tipo de dissipador uma placa cobre pode ser inserida em uma ferramenta de forjamento seguida por uma placa de alumínio. Sob a pressão do molde o alumínio se molda para formar as aletas e se fixa sobre a base de cobre, com resistência térmica de contato mínima.

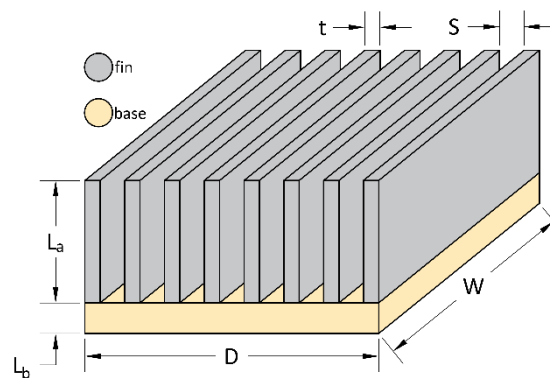


Figura 7. Esquema de um dissipador de calor de aletas.

A eficiência térmica de uma das aletas do dissipador de calor pode ser calculada pela Equação 21 (KREITH et al., 2016). Em tal cálculo compara-se a transferência de calor real e a que ocorre quando o dissipador de calor é isotérmico, situação em que a resistência térmica é desprezada.

$$\eta = [\tanh(aL_c)] / (aL_c) \tag{21}$$

Em que $a = [hp / (kA_c)]^{0.5}$, $L_c = L_a + A_d/p$, $p = (t+W)2$, $A_c = tW$, h é um coeficiente convectivo e k a condutividade térmica da aleta.

Duas configurações geométricas foram admitidas nas simulações. Na primeira considerou-se uma única aleta do dissipador. Neste caso um prisma quadrangular representou a aleta, com $L_a = 0.02m$ e $t = 0.002m$. Na segunda configuração o dissipador de calor completo foi admitido, com oito aletas, $S = 0.003m$ e $L_b = 0.002m$. Para o caso do dissipador completo uma taxa de $15W$ foi aplicada uniformemente na superfície inferior da base do dissipador de calor. Para o caso da aleta única, uma taxa de $15/8W$ foi aplicada na superfície inferior da aleta. A condição de convecção de calor foi admitida nos demais contornos das duas configurações geométricas, com $T_\infty = 37^\circ C$ e $h = 45W.m^{-2}.K^{-1}$. Uma malha grosseira do dissipador de calor é apresentada na Figura 8 com 3864 volumes. A malha utilizada nas simulações tinha 71086 volumes. As malhas utilizadas neste estudo de caso foram geradas no Software Gambit.

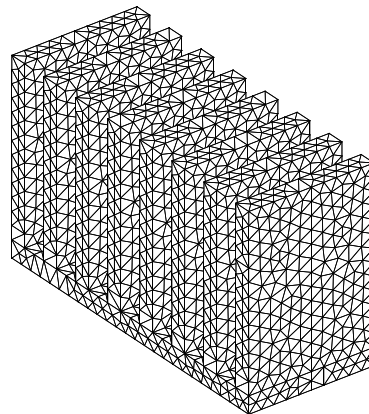


Figura 8. Malha de elementos tetraédricos do dissipador de calor, $W = 0.015m$.

Os resultados apresentados na Figura 9 (a) mostram a variação da eficiência térmica de uma aleta única em função de sua condutividade térmica. O resultado analítico foi calculado com a Equação 21. Nota-se uma boa concordância entre o resultado simulado e analítico. Na medida em que a condutividade cresce a eficiência térmica também cresce. Para $k < 237W.m^{-1}.K^{-1}$ o crescimento da eficiência térmica é bem acentuado, de 0.885 para 0.973. Depois, para $k > 237W.m^{-1}.K^{-1}$, o crescimento da eficiência é pequeno, de 0.973 para 0.984. Este seria o ganho obtido se uma aleta de alumínio fosse substituída por uma aleta cobre. A variação da eficiência com o parâmetro W é apresentada na Figura 9 (b). Existe pequena alteração de eficiência térmica com a variação de W . Tal variação não pode ser prevista pela Equação 21.

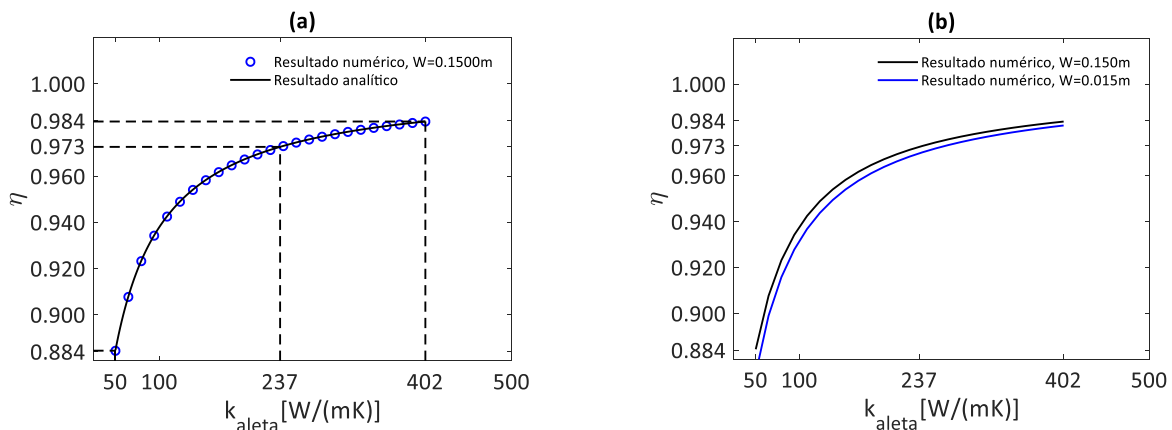


Figura 9. Eficiência térmica de uma aleta em função da sua condutividade térmica.

Campos de temperatura são apresentados nas Figuras 10(a) e (b), para um dissipador com base de cobre e aletas de alumínio. O plano utilizado para apresentação dos resultados é normal a direção de W e está posicionado em $W/2$. Apesar do fluxo de calor ser uniforme na superfície inferior da base do dissipador as aletas centrais experimentam maiores temperaturas que as aletas laterais. A variação do parâmetro W produz campos de temperatura bem diferentes. A diferença entre a temperatura máxima e a mínima do dissipador de calor cresce com a redução de W . Deve-se ter cuidado com o aumento das diferenças de temperatura, pois as mesmas geram tensões térmicas que poderiam deformar de forma comprometedoras o dissipador de calor e o componente eletrônico. Neste caso, o uso de materiais compósitos poderia melhorar a dissipação de calor e aumentar a resistência mecânica

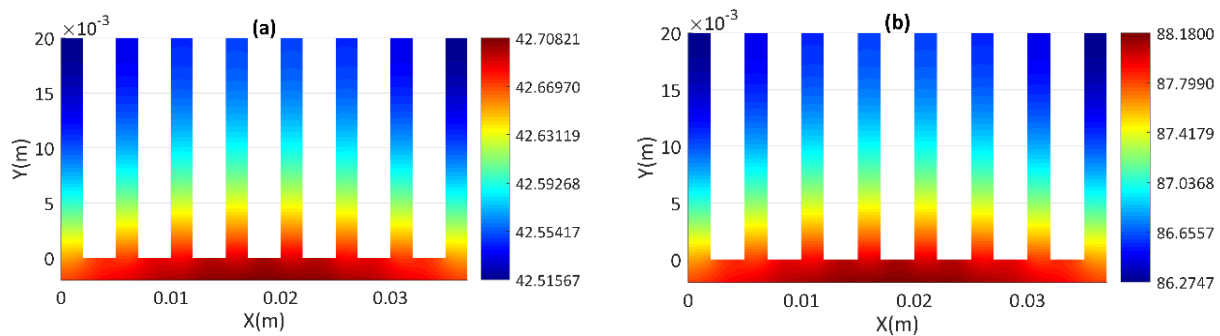


Figura 10. Campo de temperatura: (a) $W=0.15m$ e (b) $W=0.015m$.

5. Conclusões

Um método de volumes de controle baseado em elementos que usa uma malha de elementos tetraédricos para discretização do domínio geométrico e uma malha de volumes de controle poligonais para discretização da equação de transferência de calor 3D foi testado neste trabalho considerando materiais compósitos. No caso de teste 01 foi realizada a verificação do código computacional desenvolvido, baseada em comparações com uma solução analítica. Bons resultados foram encontrados. Foi verificada convergência de resultados da simulação numérica com refinamento das malhas para o caso de teste 1, onde existia uma solução analítica de referência. No caso de teste 02 foi apresentado um método de cálculo da condutividade térmica efetiva para materiais compósitos. As condutividades térmicas efetivas calculadas com o método proposto concordaram com valores obtidos com equações analíticas. A condutividade térmica efetiva de uma placa de circuito impresso real, que incorpora um plano de condução térmica, poderia ser calculada com a metodologia de cálculo apresentada se a geometria pudesse ser aproximada por elementos tetraédricos. No caso de teste 03, a eficiência térmica de um dissipador de calor, que possuía base e aletas de materiais diferentes, foi avaliada em função da condutividade térmica. Com as informações obtidas das simulações seria possível melhorar o projeto do dissipador de calor, com a incorporação de materiais diferentes em partes críticas.

Referências

1. Sundén, B.; Yuan, J. Evaluation of models of the effective thermal conductivity of porous materials relevant to fuel cell electrodes. *International Journal of Computational Methods and Experimental* **2013**, Vol. 1, No. 4, 440–455.
2. Costa, R. L.; Vlassov, V. Simulation method for effective thermal conductivity determination of complex boards. 2^o Workshop em Engenharia e Tecnologia Espaciais, 03, 04 e 05 de maio de 2011.
3. Lei, T.; Alexandersen, J.; Lazarov, B.S.; Wang, F.; Haertel, J.H.; De Angelis, S.; Sanna; S., Sigmund, O.; Engelbrecht, K. Investment casting and experimental testing of heat sinks designed by topology optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer* (**2018**), 127, pp.396-412.
4. Lu, G.; Zhao, J.; Lin, L.; Wang, X.D.; Yan, W.M. A new scheme for reducing pressure drop and thermal resistance simultaneously in microchannel heat sinks with wavy porous fins. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **2017**, 111, pp.1071-1078.
5. Çengel, Y. A.; Ghajar, A.J. *Transferência de Calor e Massa*. Editora AMG, 2009.
6. Incropera, F. P.; Dewitt, D. P.; Bergman, T. L.; LAVINE, A. S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Editora John Wiley & Sons, 6th Edição, 2016.

7. Kreith, F.; Manglik, R. M.; Bohn, M. S. *Princípios de transferência de calor*. Tradução da 7ª edição norte-americana, 2016.
8. Saabas, H. J. A Control Volume Finite Element Method For Three-Dimensional, Incompressible, Viscous Fluid Flow, Ph.D. Thesis, Dept. of. Mech. Eng., McGill University, Montreal, Que, Canada. 1991.
9. Saabas, H. J.; Baliga, B. R. Co-located equal-order control-volume finite-element method for multidimensional, incompressible, fluid flow – part i: formulation. *Numerical Heat Transfer, Part B* **1994**, 26, 381-407.
10. Tombarevé, E.; Voller, V.R; Vušanovic, I. Detailed CVFEM algorithm for three dimensional advection-diffusion problems. *Cmes-computer modeling in engineering & sciences* **2013**, 96(1), pp.1-29.
11. Xiao, S.; Zhao, Y.; Cao, Y.; Jiang, H.; Zhu, W. Computing method of thermal conductivity of heat dissipation vias in printed circuit board and its optimization, *Circuit World* **2015**, Vol. 41, No. 1, pp. 14-19.
12. Yoon, J.; Park, E.S.; Han, J.H. The Effective Thermal Conductivity of Square Lattice Structure of High Filler Loading Composites Using Finite Element Simulation. The 18th International Conference on Composites Materials (ICCM), 21th to 26th of August, 2011, in Jeju Island, Korea