



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

UMA NOVA TÉCNICA PARA ACOPLAMENTO DE MALHAS DE ELEMENTOS FINITOS NÃO CONFORMES: APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE CONTATO

A NOVEL COUPLING TECHNIQUE FOR NON-MATCHING FINITE ELEMENT MESHES: APPLICATION TO CONTACT PROBLEMS

Marco Tosati[†]

Oswaldo Luís Manzoli[†]

Eduardo Alexandre Rodrigues[†]

marco.tosati@gmail.com

omanzoli@feb.unesp.br

eduardoalex22@hotmail.com

[†]State University of Sao Paulo

Department of Civil Engineering, UNESP – Univ. Estadual Paulista, 17033-360, Bauru-SP, Brazil

Luís A. G. Bitencourt Jr.*

luis.bitencourt@usp.br

*Polytechnic School at the University of Sao Paulo - Av. Prof. Almeida Prado, Trav. 2, 271, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo-SP, Brazil

Resumo. Este artigo apresenta a simulação de problemas de contato empregando uma nova técnica para acoplamento de malhas não conformes baseada no uso de elementos finitos de acoplamento. Através desta técnica, os subdomínios de um problema podem ser discretizados em elementos finitos de forma independente e a interação entre as suas faces comuns podem ser descritas através de um esquema de acoplamento não rígido, que permite a separação dessas faces quando submetidas à tração, ao mesmo tempo que evita a interpenetração das malhas independentes quando submetidas à compressão. Os resultados preliminares obtidos neste trabalho demonstram que a representação da interação entre partes de um problema através deste método é bastante promissora.

Palavras-chave: elementos finitos de acoplamento, malhas não conformes, problemas de contato, perda de aderência, interpenetração de malhas.

Abstract. This paper presents the simulation of contact problems using a novel technique for coupling non-matching finite elements meshes based on the use of special finite elements recently developed, termed coupling finite elements (CFEs). This technique is able to establish the interaction between two non-matching meshes, representing two different subdomains of a problem, which share a common boundary. In addition, this technique has demonstrated to be highly versatile, since no additional degree of freedom is introduced to the problem and a non-rigid coupling scheme can be considered to describe the nonlinear behavior among the subdomains. In this paper the technique is applied to simulate the interaction between some parts of components meshed independently, demonstrating its capability to represent basic contact problems, such as loss of adherence. The results demonstrated that the strategy applied is able to represent the interaction between the parts of mechanical components, coherently and accurately.

Keywords: coupling finite element, non-matching meshes, contact problem, loss of adherence, overlap of meshes.

1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos (MEF) é um método numérico já consagrado e vem sendo aplicado para simular o comportamento mecânico de inúmeros problemas de engenharia. Resumidamente, o método consiste em discretizar o problema em elementos com dimensões finitas (elementos finitos), que irão descrever o seu comportamento através de funções de interpolação impostas para descrever o comportamento no interior de cada elemento, em conjunto com a introdução das condições de contorno (naturais e essenciais) nas equações de equilíbrio.

Sabe-se que a precisão do método está diretamente relacionada com o grau de refinamento da malha de elementos finitos. No entanto, quanto maior for o número de graus de liberdade do problema, mais recurso computacional será necessário para sua resolução. Desta forma, uma solução comum consiste em aplicar uma discretização mais refinada somente nas regiões de interesse. Em contrapartida, esta técnica pode implicar na presença de elementos distorcidos (Sellitto et al., 2011) na região de transição entre as regiões com malhas finas e grosseiras, prejudicando a qualidade dos resultados obtidos. Alternativamente, este tipo de problema também pode ser tratado através da discretização dos seus subdomínios de forma totalmente independentes, e posterior aplicação de uma técnica de acoplamento de malhas não conformes. Nesta linha, destacam-se atualmente a aplicação desta técnica em problemas com abordagens

multiescala (Unger et al., 2011; Lloberas-Valls et al., 2012 e Thirunavukkarasu e Guddati, 2012) e multifísica (Dureisseix e Bavestrello, 2006; Hueber e Wohlmuth, 2009; Bazilevs et al., 2012; Peters et al., 2012).

Diversos métodos de acoplamento têm sido propostos a fim de descrever de forma precisa a interação entre interfaces de malhas não conformes (Haikal e Hjelmstad, 2010). Dentre eles destacam-se: multi-point constraint (MPC) (Unger et al., 2011); mortar method (Wohlmuth, 2001 e Lamichhane e Wohlmuth, 2004); e Arlequin method (Dhia, 1998; Dhia e Rateau, 2005). A primeira técnica consiste em obter os deslocamentos dos nós “soltos” da malha local (fina) na interface através da interpolação dos valores dos nós adjacentes da malha global (grosseira). Nos outros dois métodos a condição de contorno é imposta através de um campo de multiplicadores de Lagrange, os quais introduzem graus de liberdade adicionais ao problema, e são usualmente classificados como abordagens duais. Em alternativas existente, como o penalty method (Pantano e Averill, 2002; Pantano e Averill, 2007), discontinuous Galerkin (DG) methods (Arnold et al., 2002) e Nitsche methods (Nitsche, 1971), variáveis duais não são introduzidas no problema, uma vez que a interface é representada através de seu campo de deslocamento, e por este motivo, em contraste com os métodos duais, estes métodos não estão sujeitos a restrições Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi (LBB). Contudo, um parâmetro de estabilização é necessário. Por fim, cabem destacar os métodos baseados em elementos finitos de interface, os quais usualmente transformam elementos finitos padrões localizados nas interfaces não conformes, em elementos finitos especiais para acoplar os subdomínios inicialmente independentes.

Este trabalho consiste na aplicação de uma nova técnica para acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes, recentemente desenvolvida por Bitencourt Jr. et al. (2015), para simular a interação entre partes (subdomínios) de um problema, discretizados de forma totalmente independentes. Neste trabalho, o contato entre os domínios é representado simplificadaamente através da perda de aderência nas regiões onde ocorre separação das faces, e aderência perfeita naquelas onde há tendência de penetração das malhas a fim de garantir a continuidade nestas regiões.

2 ACOPLAMENTO DE MALHAS NÃO CONFORMES

2.1 Descrição do problema

A metodologia proposta por Bitencourt Jr. et al. (2015) para acoplar malhas de elementos finitos não conformes pode ser descrita resumidamente com base na Figura 1.

Inicialmente, os subdomínios (1) e (2) são discretizados de forma independente (Figura 1(a)). Em seguida, os nós “soltos” na interface comum ($\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$) dos subdomínios são identificados (ver nós vermelhos na Figura 1(b)). Com base nesses nós, elementos finitos de acoplamento são introduzidos na malha de elementos finitos. Note que para cada nó “solto” um elemento finito de acoplamento é criado (ver Figura 1(c)). Por fim, os elementos finitos de acoplamento são introduzidos no sistema de equações do problema.

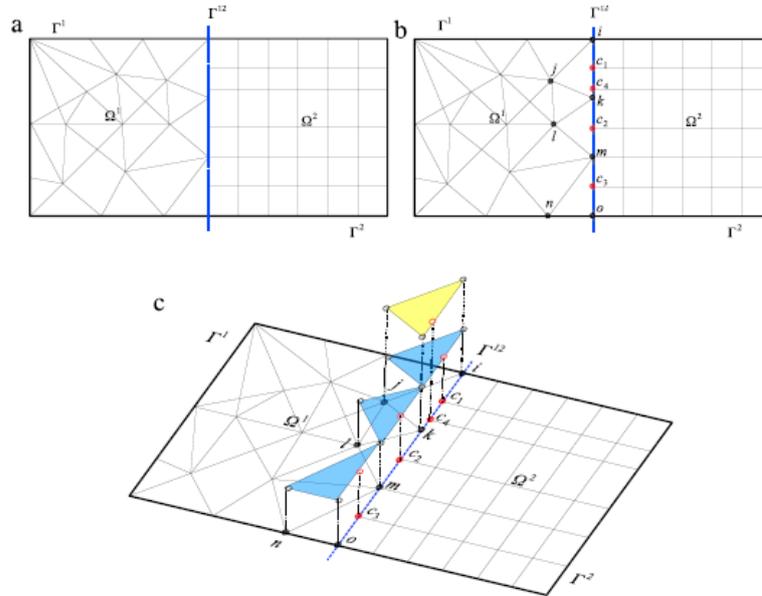


Figura 1 – Procedimento de acoplamento de malhas de elementos finitos não conformes: a) problema 2D com duas malhas não conformes; b) processo de identificação dos nós que irão compor os elementos de acoplamento; c) criação e inserção dos elementos de acoplamento (Bitencourt Jr. et al., 2015).

É importante notar que no método de acoplamento de malhas não conformes proposto, nenhum grau de liberdade é introduzido ao problema, uma vez que, cada elemento de acoplamento foi construído com base em um elemento pertencente ao domínio Ω^1 e um nó “solto” denominado “nó de acoplamento” que pertence a um elemento adjacente pertencente ao domínio Ω^2 .

Por possuírem nós pertencentes aos dois subdomínios não conformes, os elementos de acoplamento garantem a compatibilidade de deslocamentos e a transferência das forças de interação entre os respectivos subdomínios. Mais detalhes podem ser encontrados em Bitencourt Jr. et al. (2015).

Desta forma, após o procedimento de acoplamento descrito acima, o vetor de força interna e a matriz de rigidez, podem ser escritos como:

$$\mathbf{F}^{\text{int}} = \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}\Omega^1} (\mathbf{F}_e^{\text{int}})_{\Omega^1} + \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}\Omega^2} (\mathbf{F}_e^{\text{int}})_{\Omega^2} + \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}C} (\mathbf{F}_e^{\text{int}})_{C} \quad (1)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}\Omega^1} (\mathbf{K}_e)_{\Omega^1} + \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}\Omega^2} (\mathbf{K}_e)_{\Omega^2} + \mathbf{A}_{e=1}^{\text{nel}C} (\mathbf{K}_e)_{C} \quad (2)$$

onde a primeira e segunda parcelas são as contribuições dos elementos finitos padrões pertencentes aos domínios Ω^1 e Ω^2 , e as terceiras parcelas são as contribuições dos elementos de acoplamento.

2.2 Elemento finito de acoplamento

Neste trabalho será utilizado o elemento finito de acoplamento denominado T4. Trata-se de um elemento triangular padrão com 3 (três) nós, mais um nó adicional, denominado “nó de acoplamento” (C_{node}), conforme ilustra a Figura 2.

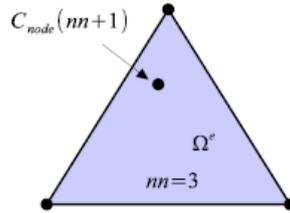


Figura 2 - Elemento finito de acoplamento T4 (Bitencourt Jr. et al., 2015).

O campo de deslocamento $\bar{\mathbf{U}}$ deste elemento fica definido pela interpolação dos três nós dos seus vértices, tal que, para um ponto material \mathbf{X} no seu domínio, pode-se escrever:

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i(\mathbf{X}) \mathbf{D}_i \quad (3)$$

onde \bar{N}_i são as funções de forma do elemento e \mathbf{D}_i são os deslocamentos nodais.

Define-se um deslocamento relativo, como a diferença entre o deslocamento do nó C_{node} e o deslocamento de um ponto material \mathbf{X}_C com as suas coordenadas, calculadas utilizando as funções de forma do elemento base, no qual, o C_{node} pertence ao seu domínio, como segue:

$$[[\mathbf{U}]] = \mathbf{D}_4 - \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}_C) = \mathbf{D}_4 - \sum_{i=1}^3 \bar{N}_i(\mathbf{X}_C) \mathbf{D}_i = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_e \quad (4)$$

na qual, \mathbf{B}_e pode então ser definida como:

$$\mathbf{B}_e = [-\bar{N}_1(\mathbf{X}_C) - \bar{N}_2(\mathbf{X}_C) - \bar{N}_3(\mathbf{X}_C) \mathbf{I}] \quad (5)$$

e o vetor que armazena os componentes de deslocamento:

$$\mathbf{D}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_3 \\ \mathbf{D}_4 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

2.2.1 Vetor de força interna e matriz de rigidez

O trabalho virtual interno do elemento de acoplamento é dado por:

$$\delta W_e^{\text{int}} = \delta[[\mathbf{U}]]^T \mathbf{F}([[U]]) \quad (7)$$

onde $\mathbf{F}([[U]])$ é a força de reação devido ao deslocamento relativo $[[U]]$ e $\delta[[U]]$ é um deslocamento relativo arbitrário, compatível com as condições de contorno do problema. Aplicando para o deslocamento relativo virtual a mesma aproximação usada para o deslocamento relativo, $\delta[[U]] = \mathbf{B}_e \delta \mathbf{D}_e$, o vetor de força interna do elemento de acoplamento pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_e^{\text{int}} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{F}([[U]]). \quad (8)$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento finito de acoplamento é definida como:

$$\mathbf{K}_e = \frac{\delta \mathbf{F}_e^{\text{int}}}{\delta \mathbf{D}_e} = \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}_{\text{tg}} \mathbf{B}_e \quad (9)$$

onde $\mathbf{C}_{\text{tg}} = \partial \mathbf{F}([[U]]) / \partial ([[U]])$ é o operador tangente da relação constitutiva entre a força de reação e o deslocamento relativo.

2.3 Interação entre domínios não conformes

Neste trabalho a interação entre os domínios não conformes será representada através de um acoplamento denominado não rígido (Bitencourt Jr. et al., 2015).

Assim, de acordo com a Figura 3, pode-se escrever o vetor de deslocamento relativo e sua corresponde força de reação em coordenadas locais como:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{R}[[\mathbf{U}]] \text{ ou } \begin{Bmatrix} [[\mathbf{u}_n]] \\ [[\mathbf{u}_s]] \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} [[\mathbf{U}_1]] \\ [[\mathbf{U}_2]] \end{Bmatrix} \quad (10)$$

e

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}\mathbf{F} \text{ ou } \begin{Bmatrix} [[\mathbf{f}_n]] \\ [[\mathbf{f}_s]] \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} [[\mathbf{F}_1]] \\ [[\mathbf{F}_2]] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

na qual \mathbf{R} é a matriz ortogonal de rotação dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde n_i e s_i são as componentes dos vetores na base local (n, s) em relação ao sistema de coordenadas globais (X_1, X_2) .

Seja ainda \mathbf{c} uma matriz em coordenadas locais que armazena as constantes elásticas nessas coordenadas, dada por:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_n & 0 \\ 0 & c_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

que com o auxílio da matriz de rotação pode ser escrita em coordenadas globais da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^T \mathbf{c} \mathbf{R} \quad (14)$$

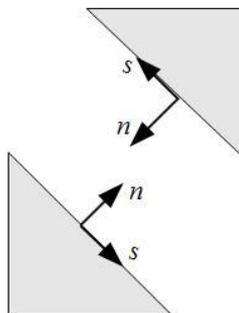


Figura 3 – Componentes normal e tangencial em coordenadas locais.

Assim, pode-se definir as componentes do vetor de forças de interação que surgem no nó de acoplamento j e direções n e s , como:

$$\mathbf{f}_{nj} = (\mathbf{1} - \hat{D}) \mathbf{c}_n \llbracket \mathbf{u}_{nj} \rrbracket \quad (15)$$

$$\mathbf{f}_{sj} = (\mathbf{1} - \hat{D}) \mathbf{c}_s \llbracket \mathbf{u}_{sj} \rrbracket \quad (16)$$

onde \hat{D} é um escalar que assume valor igual a 0 (zero) quando a força normal a face for negativa (compressão) e valor igual a 1 (um) quando para força normal a face for positiva (tração).

É importante notar que neste trabalho o contato entre os domínios é representado simplificadaamente através de dois casos: aderência perfeita ou acoplamento rígido (como define Bitencourt Jr. et al., 2015) para $\hat{D} = 0$, aplicado nas regiões das faces comuns aos subdomínios que tentam se sobrepor (interpenetração), e perda de contato para $\hat{D} = 1$ nas regiões onde as faces tendem a se separar. Para ambos os casos, as componentes da matriz c assumem valor igual a 10^9 . Este valor é sugerido por Bitencourt Jr. et al. (2015) para assegurar um acoplamento rígido entre as malhas não conformes.

Por fim, é importante salientar que durante o procedimento incremental-iterativo da análise não linear dada pelo comportamento da interface comum dos subdomínios, o valor da variável \hat{D} no passo de carga n é obtida com base dos valores de deslocamentos relativos normais do passo anterior $n-1$. Mais detalhes sobre este procedimento de integração de modelos constitutivos podem ser consultados em (Prazeres et al., 2016).

3 EXEMPLOS

Para ilustrar as principais características da técnica proposta para descrever o contato entre partes (subdomínios) de um sólido através de um novo esquema de acoplamento não rígido proposto por Bitencourt Jr. et al. (2015), dois exemplos são apresentados.

3.1 Mancal de apoio

Trata-se de uma barra com seção retangular e um mancal de apoio, conforme ilustra a Figura 4. A barra de aço é engastada em uma de suas extremidades, enquanto é aplicada uma carga distribuída com resultante de 100N vertical para cima na extremidade oposta, gerando um momento em sua fixação. Próximo ao centro da barra, o mancal de apoio de seção retangular em aço, limita o deslocamento vertical do conjunto, resultando em regiões de contato (quina do mancal) com elevada concentração de tensões.

Foi considerado material elástico linear para a barra e mancal com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson 0,31.

Para a construção do modelo numérico 2D, mancal e barra foram discretizados em elementos finitos de forma independente, com elementos finitos isoparamétricos 2D triangulares com 3 nós (T3). Além disso, como pode ser visto na Figura 4, a barra de aço foi discretizada com uma malha mais grosseira (1920 elementos) em relação à malha adotada para o mancal (540 elementos).

Para acoplar as malhas independentes e descrever a interação entre as partes do sólido, elementos finitos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) foram introduzidos nas interfaces barra/mancal (ver elementos cor rosa na Figura 4). Note que para cada nó solto na interface, um elemento de acoplamento foi introduzido, composto por 3 nós do elemento triangular (T3) da malha grosseira e 1 nó (solto) extra da malha fina.

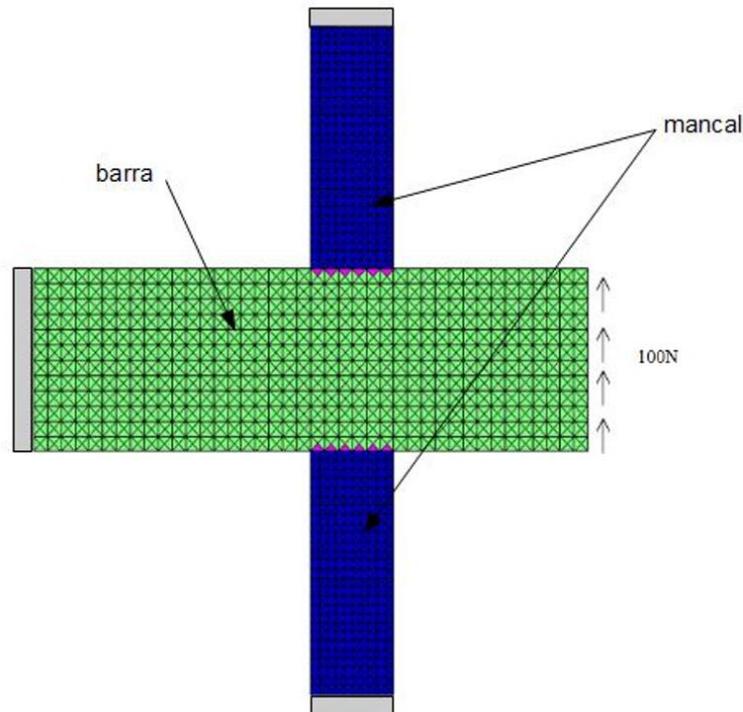


Figura 4 - Geometria, condições de contorno e discretização em elementos finitos.

As Figuras 5 e 6 ilustram o campo de tensões normais vertical e isocurvas de deslocamentos totais, respectivamente. Ao ser carregada verticalmente, a barra retangular se apoia na quina direita do mancal superior e a comprime. É importante notar que nessa região, a técnica foi capaz de impedir a penetração entre os componentes, representando fielmente a compressão e a deformação de ambos os componentes. Além disso, a esquerda da quina, e em toda a face inferior, a barra tem a tendência de se afastar do mancal, provocando uma perda de contato. Neste caso, o acoplamento não rígido que permite a perda de contato entre as regiões foi fundamental. Assim, a técnica utilizada foi capaz de retratar o comportamento mecânico, sobrecarregando a região comprimida do mancal e permitindo a perda de contato nas demais regiões.

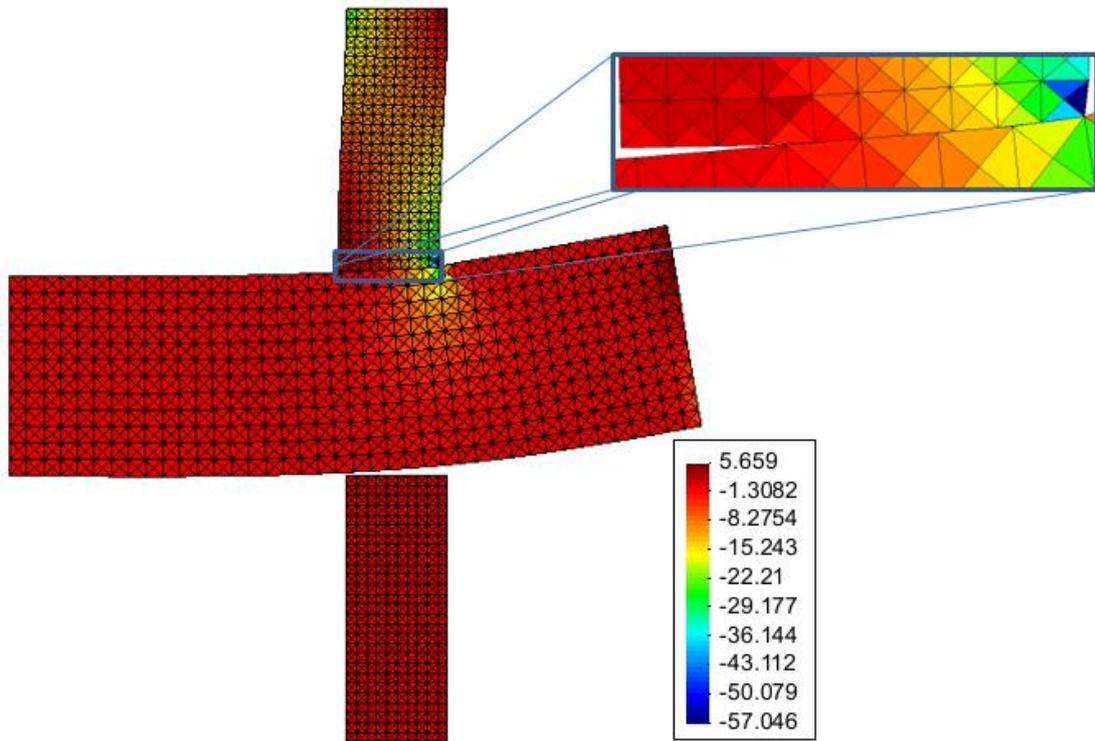


Figura 5 - Representação da interação de compressão e perda de aderência através do campo de tensões normais verticais (MPa).

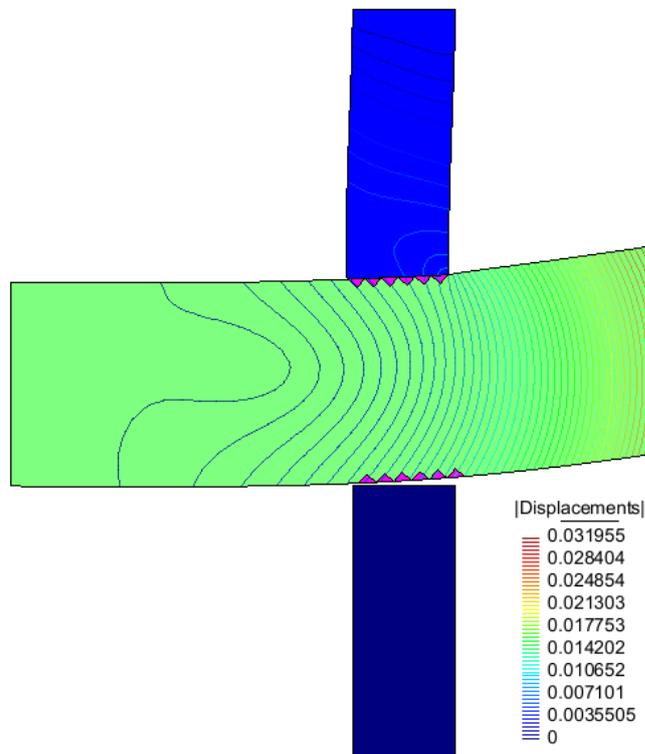


Figura 6 - Isocurvas de deslocamentos totais (mm).

3.2 Placa sobre base não rígida

Neste segundo exemplo a aplicabilidade da estratégia desenvolvida para solucionar problemas de contato é demonstrada através da interação de uma placa apoiada sobre uma base não rígida engastada na sua extremidade inferior (ver Figura 7).

Como o foco é a representação da interação entre as regiões, ambas foram consideradas com comportamento elástico linear com módulo de elasticidade de 210GPa e coeficiente de Poisson 0,31. Desta forma, novamente é considerada que toda a não-linearidade do problema se concentra na região da interface.

Na Figura 7 são ilustradas as condições de contorno e carregamento aplicado. A placa é submetida à ação de um carregamento de intensidade 1500N vertical para baixo em seu centro, distribuído em 1/5 de seu contorno superior, produzindo um efeito de compressão sobre o bloco não rígido nesta região, e devido à flexão, uma perda de aderência entre o bloco e a placa nas extremidades.

Placa e base foram discretizados com elementos finitos triangulares com 3 nós (T3) de forma totalmente independentes. Uma malha mais grosseira com 480 elementos finitos foi empregada na região da base, enquanto que 336 elementos foram criados na discretização da placa. Os elementos da base possuem o dobro do tamanho dos elementos da região da placa.

Foram inseridos 29 elementos de acoplamento triangulares com 4 nós (T4) para acoplar as malhas não conformes (ver elementos na cor rosa da Figura 7).

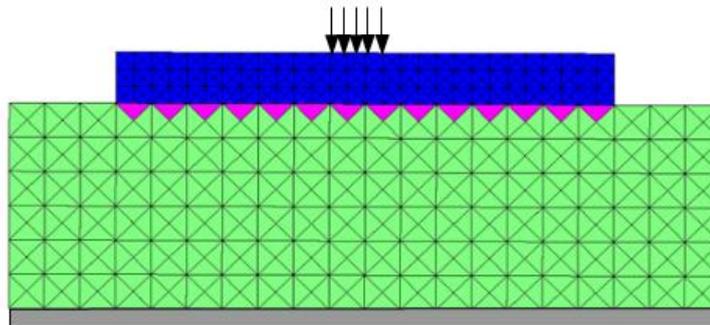


Figura 7 - Geometria e condições de contorno e discretização em elementos finitos.

As Figuras 8 e 9 apresentam os resultados obtidos em termos de tensão normal vertical e isocurvas de deslocamentos totais, respectivamente. Pode-se observar que para movimentos verticais ascendentes da placa, a mesma se afasta da base rígida, representada através do modelo de acoplamento não rígido com perda de aderência completa. Em contrapartida, nas regiões em que as peças foram comprimidas uma contra a outra, não houve penetração, ou seja, os elementos finitos especiais de acoplamento evitaram a interpenetração das malhas, restringindo o deslocamento relativo entre os subdomínios.

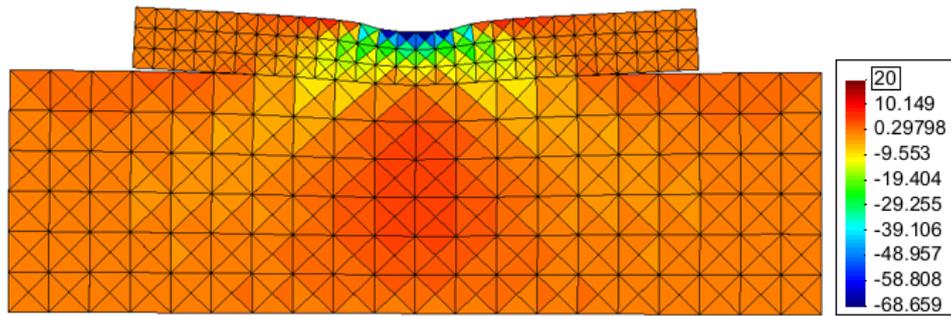


Figura 8 - Representação da interação de compressão e perda de aderência através do campo de tensões normais verticais (MPa).

As isocurvas de deslocamentos ilustradas na Figura 9 demonstram claramente que a interação entre os subdomínios ocorre de forma acentuada na região central.

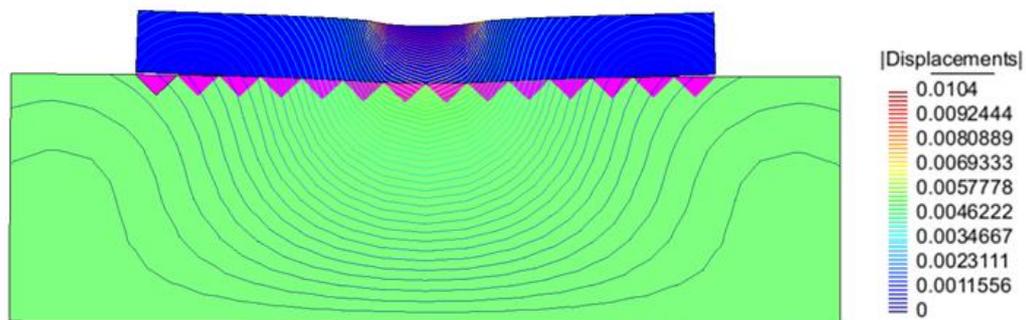


Figura 9 - Isocurvas de deslocamentos totais (mm).

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma nova técnica para representar o contato entre partes de um sólido através do método dos elementos finitos. A técnica consiste em discretizar regiões do sólido de forma independente e posteriormente adicionar elementos finitos de acoplamento para descrever o contato entre essas partes através de uma formulação não rígida.

Para ilustrar os resultados obtidos até o momento nesta pesquisa, foram escolhidos dois exemplos, através dos quais é demonstrada a capacidade do modelo em permitir a separação das faces quando submetidas a forças de tração (forças perpendiculares e opostas as faces), ao mesmo tempo em que impede a interpenetração das malhas independentes quando submetidas a forças de compressão (forças perpendiculares que apontam para a face oposta).

Em ambos os exemplos, a técnica demonstrou ser capaz de representar a interação entre as partes de um sólido através do tratamento dos casos de separação e interpenetração das malhas. A separação foi tratada como perda de contato, sem oferecer resistência de atrito entre os subdomínios, enquanto que nas regiões que apresentavam tendência para sobreposição de

malhas, um acoplamento rígido foi aplicado para garantir a transferência de esforços entre as faces.

Os exemplos apresentados foram importantes para validação da técnica, uma vez que uma mesma interface apresenta tanto tendência de separação quanto de sobreposição de malhas.

Por fim é importante destacar que através desta técnica nenhum grau de liberdade adicional foi introduzido ao problema, apesar da matriz de rigidez se tornar mais densa com a introdução dos elementos de acoplamento, que podem ser adicionados facilmente em qualquer programa de análise estrutural por elementos finitos.

5 AGRADECIMENTOS

Este trabalho é o resultado da colaboração em pesquisa entre a Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) e Universidade Estadual Paulista (UNESP). Os autores agradecem as principais agências de fomento à pesquisa do país que vem financiando projetos nesta linha de pesquisa: FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

6 REFERÊNCIAS

A. Pantano, R.C. Averill, A penalty-based finite element interface technology, *Comput. Struct.* 80 (22) (2002) 1725–1748. [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00056-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00056-1).

A. Pantano, R.C. Averill, A penalty-based interface technology for coupling independently modeled 3D finite element meshes, *Finite Elem. Anal. Des.* 43 (4) (2007) 271–286. <http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2006.10.001>.

A. Sellitto, R. Borrelli, F. Caputo, A. Riccio, F. Scaramuzzino, Methodological approaches for kinematic coupling of non-matching finite element meshes, *Procedia Eng.* 10 (0) (2011) 421–426. <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2011.04.071>. Published by Elsevier Ltd. Selection and peer-review under responsibility of 11th International Conference on the Mechanical Behavior of Materials (ICM11).

B. Lamichhane, B. Wohlmuth, Mortar finite elements for interface problems, *Computing* 72 (3–4) (2004) 333–348. <http://dx.doi.org/10.1007/s00607-003-0062-y>.

B. Wohlmuth, A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier, *SIAM J. Numer. Anal.* 38 (3) (2001) 989–1012. URL: <http://www.jstor.org/stable/3061996>.

D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (5) (2002) 1749–1779. <http://dx.doi.org/10.1137/S0036142901384162>.

D. Dureisseix, H. Bavestrello, Information transfer between incompatible finite element meshes: application to coupled thermo-viscoelasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195 (44–47) (2006) 6523–6541. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2006.02.003>.

G. Haikal, K. Hjelmstad, An enriched discontinuous Galerkin formulation for the coupling of non-conforming meshes, *Finite Elem. Anal. Des.* 46 (6) (2010) 496–503.

H. Dhia, Problèmes mécaniques multi-échelles: la methode Arlequin, *C. R. Acad. Sci. - Ser. IIB - Mech.-Phys.-Astron.* 326 (12) (1998) 899–904. [http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8069\(99\)80046-5](http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8069(99)80046-5).

H. Dhia, G. Rateau, The Arlequin method as a flexible engineering design tool, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 62 (11) (2005) 1442–1462. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.1229>.

H. Peters, S. Marburg, N. Kessissoglou, Structural-acoustic coupling on non-conforming meshes with quadratic shape functions, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 91 (1) (2012) 27–38. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4251>.

J.F. Unger, S. Eckardt, Multiscale modeling of concrete. From mesoscale to macroscale, *Arch. Comput. Methods Eng.* 18 (3) (2011) 341–393. <http://dx.doi.org/10.1007/s11831-011-9063-8>.

J. Nitsche, Uber ein variationsprinzip zur losung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilraumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 36 (1) (1971) 9–15. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02995904>.

L.A.G. Bitencourt Jr., O.L. Manzoli, P.G.C. Prazeres, E.A. Rodrigues, T.N. Bittencourt, A coupling technique for non-matching finite element meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* (2015), <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.02.025>.

O. Lloberas-Valls, D. Rixen, A. Simone, L. Sluys, On micro-to-macro connections in domain decomposition multiscale methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 225–228 (0) (2012) 177–196. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.022>.

P.G.C. Prazeres, L.A.G. Bitencourt Jr., T.N. Bittencourt, O.L. Manzoli, A modified implicit–explicit integration scheme: an application to elastoplasticity problems. *J Braz Soc Mech Sci Engrg* 2016;38(1):151–61. <http://dx.doi.org/10.1007/s40430-015-0343-3>.

S. Hueber, B. Wohlmuth, Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (15–16) (2009) 1338–1350. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2008.11.022>.

S. Thirunavukkarasu, M.N. Guddati, A domain decomposition method for concurrent coupling of multiscale models, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 92 (11) (2012) 918–939. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.4362>.

Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, M. Scott, Isogeometric fluid–structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 249–252 (0) (2012) 28–41.