



ESTUDO COMPARATIVO DE TUBOS DE MATERIAIS COMPÓSITOS E DE MATERIAIS HOMOGÊNEOS SUBMETIDOS À PRESSÃO HIDROSTÁTICA

Rômulo Montalvão Silva

Márcio André Araújo Cavalcante

rmontalvao94@gmail.com

marcio.cavalcante@ctec.ufal.br

Universidade Federal de Alagoas

Rodovia AL 145, Km 3, Nº 3849, Cidade Universitária, Delmiro Gouveia, Alagoas, Brasil.

Resumo. Nos últimos anos, a busca por materiais com um melhor desempenho mecânico levou ao aumento de pesquisas e ao desenvolvimento de materiais compósitos, com ênfase nos materiais reforçados por fibras longas unidirecionais. Estes materiais têm se destacado devido as suas elevadas relações rigidez/peso e resistência/peso, além de excelente resistência à fadiga e à corrosão. O bom desempenho mecânico destes materiais tem propiciado a sua utilização na confecção de tubos que podem ser submetidos a altas pressões e a condições ambientais severas. Devido às dificuldades encontradas na modelagem computacional de estruturas confeccionadas com estes materiais, devido a heterogeneidade e a anisotropia dos mesmos, recorre-se ao emprego de técnicas de homogeneização e de estratégias de modelagem multi-escala. No presente trabalho, propõe-se a utilização do modelo auto-consistente generalizado e de expressões baseadas na Resistência dos Materiais para avaliação das propriedades elásticas efetivas e dos parâmetros de resistência das lâminas de material compósito. Estas propriedades são utilizadas na análise de tubos de materiais compósitos laminados, respeitando as restrições cinemáticas impostas aos tubos de parede fina e empregando a Teoria Clássica da Laminação e a Teoria da Instabilidade Linear, permitindo a avaliação da pressão externa crítica, que pode levar o tubo à flambagem, e as pressões hidrostáticas interna e externa que levariam o tubo à falha, com base no critério de falha de Tsai-Hill. São realizados estudos comparativos do desempenho mecânico entre tubos de materiais compósitos e de materiais homogêneos, testando diferentes configurações para o laminado que compõe a parede do tubo de material compósito, procurando justificar o seu emprego em substituição aos tubos confeccionados com ligas metálicas.

Palavras-Chave: Materiais Compósitos Reforçados por Fibras; Modelo Auto-Consistente Generalizado; Pressão Externa Crítica; Análise de Resistência; Tubo de Parede Fina.

1 INTRODUÇÃO

Os avanços científicos propiciaram o aparecimento de uma gama de materiais avançados, compósitos, que podem ser aplicados em diversos setores industriais, tais como, indústrias automotiva e de petróleo. Os referidos materiais possuem comportamentos diferenciados quando comparados aos materiais convencionais (homogêneos e isotrópicos), tornando necessária a adoção de técnicas de homogeneização, além de estratégias de modelagem multi-escala.

Nesta nova geração de materiais avançados, pode-se destacar os compósitos reforçados por fibras, que apresentam elevadas relações resistência/peso e rigidez/peso. O bom desempenho mecânico destes materiais tem impulsionado o seu emprego na confecção de tubos industriais submetidos a alta pressão e a condições ambientais desfavoráveis. Como exemplo, pode ser citada a sua aplicação como *riser* na indústria *offshore*, em substituição ao aço (Johnson et al., 2000; Meniconi et al., 2001).

Este trabalho objetiva a realização de estudos paramétricos de tubos de parede fina de materiais compósitos e homogêneos submetidos à pressões hidrostáticas, levando em conta a influência do número e da disposição das lâminas, além das frações volumétricas e das orientações das fibras nas pressões externa crítica e de resistência destes tubos.

2 ANÁLISE DAS LÂMINAS DE MATERIAL COMPÓSITO

2.1 Propriedades Elásticas Efetivas (Modelo de Três Fases)

O Modelo Auto-Consistente Generalizado (ACG) foi originalmente proposto e formulado por Christensen & Lo (1979), e depois analisado por Christensen (1990). Esse modelo considera a interação entre a inclusão e a matriz, assim como a interação entre as inclusões.

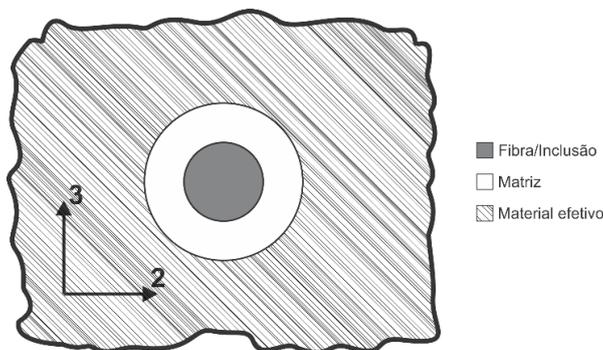


Figura 1. Esquema do Modelo Auto-Consistente Generalizado.

O Modelo ACG fornece os mesmos valores para as propriedades efetivas de lâminas reforçadas por fibras longas do modelo CCA (Hashin & Rosen, 1964), com exceção do módulo de elasticidade transversal angular. Por ser composto por três fases, inclusão, matriz e meio efetivo, esse modelo também é conhecido como o Modelo de Três Fases.

O elemento de volume representativo (EVR) utilizado no modelo CCA, Fig. 2, consiste em um sólido cilíndrico de raio “ a ” (fibra), envolto por uma casca cilíndrica de raio externo “ b ” (matriz). A fração volumétrica de fibras de cada EVR deve ser igual à fração volumétrica de fibras de todo o material compósito, e para cada EVR deve ser mantida a relação:

$$f_f = \frac{a^2}{b^2} \quad (1)$$

onde f_f = fração volumétrica de fibras.

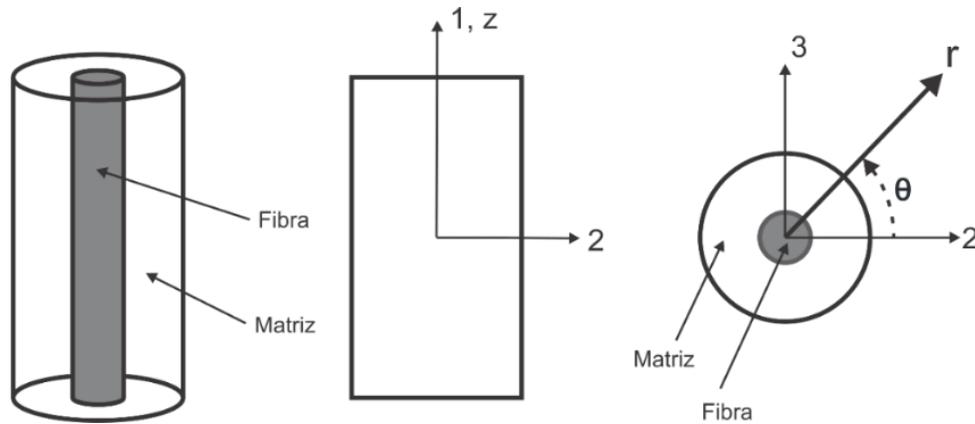


Figura 2. EVR utilizado no modelo CCA.

Os EVRs são elementos constituídos por uma porção de inclusão e outra de matriz, que devem conter as mesmas frações volumétricas de matriz e inclusão encontradas no material compósito e fornecer as mesmas respostas para as propriedades efetivas do material, seja para uma condição de contorno homogênea em tensão ou em deformação.

No modelo CCA, esses EVRs aparecem distribuídos por todo o material, possuindo diferentes dimensões, para que seja possível preencher toda a geometria do mesmo, Fig. 3. Como os EVRs desse modelo possuem comportamento axissimétrico em seu plano de isotropia, podem ser utilizados para estimar as propriedades efetivas de laminados reforçados por fibras longas e contínuas, que possuem a característica de apresentarem comportamento isotrópico no plano transversal ao eixo longitudinal das fibras.

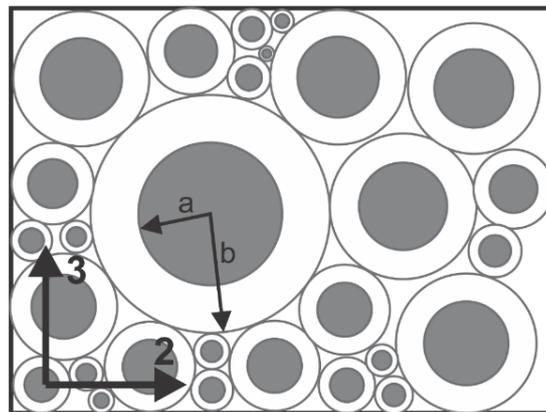


Figura 3. Esquema do modelo CCA.

As expressões obtidas pelo modelo ACG para as propriedades efetivas do material compósito reforçado por fibras longas estão na Tabela 1, onde f representa a fração volumétrica do constituinte, E o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson, μ o módulo de elasticidade de cisalhamento e k o módulo de elasticidade volumétrico no plano de isotropia, considerando um estado plano de deformação. Os subscritos f e m representam as propriedades da fibra e da matriz, respectivamente.

Tabela 1 . Propriedades Elásticas Efetivas do Material Compósito Reforçado por Fibras Isotrópicas

Módulo de Elasticidade Longitudinal (E_{11})

$$E_{11} = f_f E_f + f_m E_m + \frac{4f_f f_m (v_f - v_m)^2 \mu_m}{f_m \mu_m / (k_f + \mu_f / 3) + f_f \mu_m / (k_m + \mu_m / 3) + 1}$$

Coefficiente de Poisson Longitudinal (v_{12})

$$v_{12} = f_f v_f + f_m v_m + \frac{f_f f_m (v_f - v_m) \left[\mu_m / (k_m + \mu_m / 3) - \mu_m / (k_f + \mu_f / 3) \right]}{f_m \mu_m / (k_f + \mu_f / 3) + f_f \mu_m / (k_m + \mu_m / 3) + 1}$$

Módulo de Elasticidade Volumétrico em Estado Plano de Deformação (k_{23})

$$k_{23} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{f_f}{1 / \left[k_f - k_m + \frac{1}{3} (\mu_f - \mu_m) \right] + f_m / \left(k_m + \frac{4}{3} \mu_m \right)}$$

Módulo de Elasticidade de Cisalhamento Longitudinal (μ_{12})

$$\mu_{12} = \mu_m \left[\frac{\mu_f (1 + f_f) + \mu_m f_m}{\mu_f f_m + \mu_m (1 + f_f)} \right]$$

Módulo de Elasticidade de Cisalhamento Transversal (μ_{23})

$$A \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_m} \right)^2 + 2B \left(\frac{\mu_{23}}{\mu_m} \right) + C = 0, \text{ onde:}$$

$$A = 3f_f f_m^2 \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f \right) + \left[\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m + \eta_f \eta_m - \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) f_f^3 \right] \left[f_f \eta_m \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) - \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m + 1 \right) \right]$$

$$B = -3f_f f_m^2 \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) f_f + 1 \right] \times \left[(\eta_m - 1) \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f \right) - 2 \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) f_f^3 \right] + \frac{f_f}{2} (\eta_m + 1) \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) \left[\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f + \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) f_f^3 \right]$$

$$C = 3f_f f_m^2 \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f \right) + \left[\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m + \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} - 1 \right) f_f + 1 \right] \left[\frac{\mu_f}{\mu_m} + \eta_f + \left(\frac{\mu_f}{\mu_m} \eta_m - \eta_f \right) f_f^3 \right],$$

com $\eta_f = 3 - 4v_f$ e $\eta_m = 3 - 4v_m$.

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson transversais podem ser avaliados utilizando as seguintes expressões:

$$E_{22} = \frac{4\mu_{23}k_{23}}{k_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2 \mu_{23} k_{23} / E_{11}} \quad (1)$$

$$v_{23} = \frac{k_{23} - \mu_{23} - 4v_{12}^2 \mu_{23} k_{23} / E_{11}}{k_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2 \mu_{23} k_{23} / E_{11}} \quad (2)$$

Como o material é transversalmente isotrópico no plano 2-3, são válidas as seguintes relações: $E_{33} = E_{22}$, $v_{13} = v_{12}$, $\mu_{13} = \mu_{12}$, $v_{32} = v_{23}$, $v_{21} / E_{22} = v_{12} / E_{11}$ e $v_{31} / E_{33} = v_{13} / E_{11}$.

Para o caso de fibras transversalmente isotrópicas (fibras de carbono), devem ser realizadas as modificações apresentadas na Tabela 2 nas propriedades das fibras (Hashin, 1983).

Tabela 2. Modificações necessárias para a estimativa das propriedades elásticas de lâminas constituídas por fibras transversalmente isotrópicas

Propriedade efetiva	Fibras isotrópicas	Fibras transversalmente isotrópicas
$k_{23}, \mu_{23}, E_{22}, \nu_{23}$	k_f	k_f
	μ_f	$\mu_{23,f}$
	E_f	$\mu_{23,f}(3 - \mu_{23,f} / k_f)$
	ν_f	$0.5 \times (1 - \mu_{23,f} / k_f)$
μ_{12}	μ_f	$\mu_{12,f}$
E_{11}	E_f	$E_{11,f}$

2.2 Parâmetros de Resistência (Resistência dos Materiais)

No processo de estimativa dos parâmetros de resistência das lâminas de material compósito, foram utilizadas expressões desenvolvidas com base na Resistência dos Materiais (Kaw, 2006), sendo realizadas as devidas modificações para o caso de lâminas reforçadas por fibras transversalmente isotrópicas (Tabela 3), onde $(\varepsilon)_{ult}$ e $(\gamma)_{ult}$ representam as deformações normais e angulares últimas dos constituintes.

Tabela 3. Parâmetros de resistência das lâminas

Resistência à tração na direção paralela às fibras:

$$X_T \leq \begin{cases} E_{11} \times (\varepsilon_{11,f})_{ult} \\ E_{11} \times (\varepsilon_m)_{ult} \end{cases}$$

Resistência à tração na direção perpendicular às fibras:

$$Y_T \leq \begin{cases} E_{22} \times \left[\frac{d}{s} \times \frac{E_m}{E_{22,f}} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] \times (\varepsilon_m)_{ult} \\ E_{22} \times \left[\frac{d}{s} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \times \frac{E_{22,f}}{E_m} \right] \times (\varepsilon_{22,f})_{ult} \end{cases}$$

Resistência ao cisalhamento no plano da lâmina:

$$S \leq \begin{cases} \mu_{12} \times (\gamma_m)_{ult} \times \left[\frac{d}{s} \times \frac{\mu_m}{\mu_{12,f}} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \right] \\ \mu_{12} \times (\gamma_{12,f})_{ult} \times \left[\frac{d}{s} + \left(1 - \frac{d}{s} \right) \times \frac{\mu_{12,f}}{\mu_m} \right] \end{cases}$$

A relação d/s está relacionada à forma como as fibras estão distribuídas ao longo do plano de isotropia da lâmina (Kaw, 2006). A Figura 4 ilustra dois possíveis arranjos de fibra encontrados na literatura, onde s representa o espaçamento entre os centroides de cada fibra, e

d o diâmetro das fibras. Neste trabalho, a relação d/s foi obtida assumindo que as fibras apresentam um arranjo hexagonal, já que o mesmo reproduz melhor a forma como as fibras se distribuem no compósito, além de apresentar um plano de isotropia transversalmente às fibras, o que não acontece no arranjo quadrático. Para o caso de arranjos quadráticos, tem-se $d/s = \left(\frac{4 \times f_f}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$, enquanto que para arranjos hexagonais, tem-se $d/s = \left(\frac{2 \times \sqrt{3} \times f_f}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$.

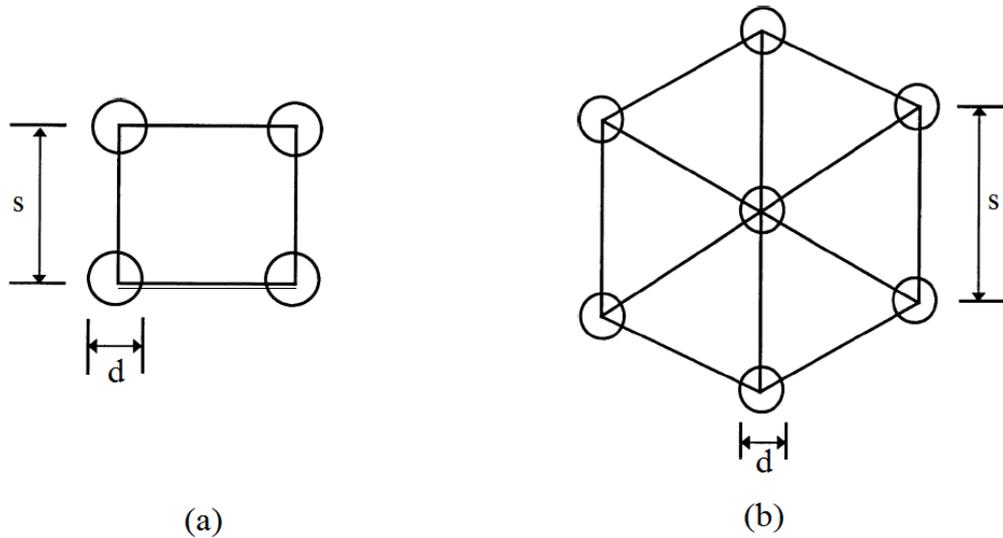


Figura 4. Espaçamento entre fibras para arranjos quadrático (a) e hexagonal (b). Fonte: Kaw (2006)

2.3 Critério de Falha Macroscópico (Critério de Tsai-Hill)

O *Critério de Tsai-Hill* é um caso particular do critério da máxima energia de distorção aplicado à materiais ortotrópicos, para situações onde o componente estudado encontra-se em *Estado Plano de Tensões*, que é o caso de lâminas e laminados de materiais compósitos (Kaw, 2006), onde tem-se a seguinte expressão para a formulação clássica deste critério:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y_T}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_T^2}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \quad (3)$$

onde X_T , Y_T e S representam os parâmetros de resistência longitudinal, transversal e de cisalhamento no plano da lâmina, respectivamente, e σ_1 , σ_2 e σ_{12} são as tensões nas direções principais da lâmina. Assim, caso $f(\boldsymbol{\sigma}) < 1$ o material não apresentará falhas, e caso $f(\boldsymbol{\sigma}) \geq 1$ o material terá falhado. Para a realização da análise de primeira falha (*First Ply Failure*) de um laminado, faz-se necessária a avaliação do campo de tensões ao longo da espessura de todas as lâminas que compõem o laminado.

3 ANÁLISE DE TUBOS DE PAREDE FINA DE MATERIAL COMPÓSITO SUBMETIDOS À PRESSÃO HIDROSTÁTICA

3.1 Teoria Clássica da Laminação

Geralmente, os materiais compósitos reforçados por fibras são utilizados na forma de laminados multidirecionais, constituídos por lâminas empilhadas e orientadas de formas distintas. A Teoria Clássica da Laminação utiliza uma abordagem macromecânica para analisar o comportamento mecânico do laminado (Daniel & Ishai, 1994).

Devido ao fato dos laminados apresentarem lâminas multidirecionais, é necessária a utilização de uma nomenclatura específica que possibilite a identificação adequada de cada lâmina que compõe o laminado, informando características como a localização de cada uma delas no laminado, seus materiais constituintes e o seu ângulo de orientação com relação a um eixo de referência. Esses itens são especificados pelo SLC (Standard Laminate Code).

Por exemplo, um laminado com ângulo de orientação de fibras iguais a $+\alpha$, $+\beta$, $-\beta$ e $-\alpha$ pode ser representado das seguintes formas: $[+\alpha/+\beta/-\beta/-\alpha]$ ou $[+\alpha/\pm\beta_2/-\alpha]$. É possível ainda indicar os materiais que compõem cada camada utilizando a seguinte representação: $[+\alpha^{Mat1}/+\beta^{Mat2}/-\beta^{Mat2}/-\alpha^{Mat1}]$ ou $[+\alpha^{Mat1}/\pm\beta^{Mat2}/-\alpha^{Mat1}]$.

Para o desenvolvimento de expressões que relacionam deformações com deslocamentos e tensões para cada lâmina que compõe o laminado, que está submetido à ação de momentos fletores (M_x e M_θ), momentos torçores ($M_{x\theta}$ e $M_{\theta x}$), esforços cisalhantes ($N_{x\theta}$ e $N_{\theta x}$) e carregamentos uniaxiais (N_x e N_θ), conforme a Figura 5, são adotadas algumas hipóteses simplificadoras (Daniel & Ishai, 1994):

- Cada lâmina é ortotrópica, estatisticamente homogênea e apresenta um comportamento elástico linear.
- Pode-se admitir que a deformação e a tensão normal na direção da espessura do laminado são nulas ($\sigma_r = 0$ e $\varepsilon_r = 0$), pois a espessura é muito pequena.
- Não há deslocamento relativo entre as lâminas (aderência perfeita).
- Uma linha reta e perpendicular à superfície média do laminado permanece reta e perpendicular a esta superfície durante o processo de deformação ($\gamma_{xr} = \gamma_{\theta r} = 0$).
- Os esforços acontecem somente no plano do laminado ($\sigma_r = \tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$).

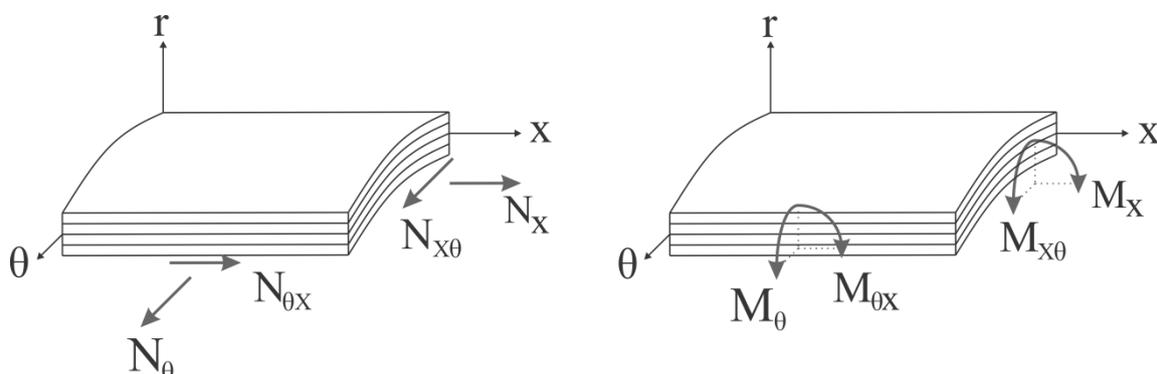


Figura 5. Esforços atuantes no plano do laminado.

Com base nas hipóteses cinemáticas mencionadas acima, é possível encontrar a seguinte expressão matricial para as deformações de um laminado:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} (r - r_0) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\kappa}(r - r_0) \quad (4)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ representa as deformações e $\boldsymbol{\kappa}$ as curvaturas apresentadas pela superfície média do laminado. A superfície média do laminado localiza-se em $r = r_0$.

A partir da lei de Hooke e com base nas hipóteses cinemáticas e estáticas apresentadas acima, chega-se na seguinte relação entre as tensões e as deformações para cada lâmina que compõem o laminado:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{Q}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz constitutiva da lâmina, que pode ser avaliada a partir da matriz constitutiva da lâmina nas suas direções principais da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \mathbf{T}, \quad \text{com} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que $m = \cos(\alpha)$ e $n = \sin(\alpha)$, sendo α o ângulo formado entre a direção longitudinal da lâmina e o eixo-x. As componentes da matriz constitutiva da lâmina nas suas direções principais são avaliadas a partir das propriedades da lâmina como segue:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad \text{e} \quad Q_{66} = \mu_{12} \quad (7)$$

Como as lâminas são empilhadas possuindo orientações distintas, é necessário avaliar como cada uma delas irá trabalhar ao serem solicitadas nas direções principais do laminado (direções longitudinal e circunferencial do tubo), Fig. 6.

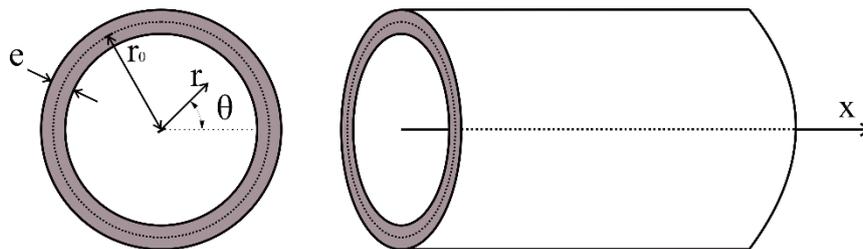


Figura 6. Eixos Longitudinal e Circunferencial do Tubo.

Integrando a Eq. 3 ao longo de toda espessura do laminado, é possível obter a relação entre forças e momentos resultantes com as deformações e curvaturas da superfície média:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_{xx}^0 \\ \kappa_{\theta\theta}^0 \\ \kappa_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Em que, \mathbf{A} é a Matriz de Rigidez Extensional, \mathbf{B} é a Matriz de Rigidez Extensional-Flexional e \mathbf{D} é a Matriz de Rigidez Flexional. Além disso, tem-se $t_k = r_k - r_{k-1}$ (espessura da k -ésima lâmina).

3.2 Análise de Tensões

Ressalta-se que a formulação abaixo só se aplica para o caso de tubos de paredes finas submetido à pressões hidrostáticas interna e/ou externa. Nesse sentido, a matriz de flexibilidade de um laminado, contendo as submatrizes \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{d} , pode ser expressa por:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \quad (9)$$

A deformação e a curvatura na direção circunferencial podem ser encontradas a partir das Equações (10), tornando-se possível encontrar o esforço normal e o momento fletor nessa direção, e, conseqüentemente, as demais componentes das deformações e curvaturas no plano médio do laminado (Equação 11).

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{u_r}{r_0} \quad \text{e} \quad \kappa_\theta = -\frac{u_r}{r_0^2} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{26} & b_{26} \\ b_{12} & d_{12} \\ b_{26} & d_{26} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix}, \quad \text{onde} \quad \begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{22} \times d_{22} - b_{22}^2} \begin{bmatrix} d_{22} & -b_{22} \\ -b_{22} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta^0 \\ \kappa_\theta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Conhecendo as deformações e curvaturas no plano médio do laminado, pode-se obter as tensões atuantes nas direções principais do tubo ao longo de toda a sua espessura por meio da equação abaixo.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} (r - r_0) \quad (12)$$

Onde r representa a coordenada radial que parte do centro do tubo, e r_0 representa o raio médio do mesmo.

A depender das condições de vinculação do tubo, o mesmo pode ser classificado como longo ou curto (anel), algo que causa interferência no deslocamento radial do tubo (u_r).

Para tubos longos. Nessa situação, as curvaturas e deformações ao longo da direção longitudinal do tubo são nulas, $\varepsilon_x^0 = \gamma_{x\theta}^0 = \kappa_x = \kappa_{x\theta} = 0$, o que implica em:

$$u_r = \frac{(P_i \times r_i - P_e \times r_e) \times r_0}{A_{22} - B_{22} / r_0} \quad (13)$$

Para tubos curtos. Nessa situação, os esforços atuantes nas extremidades do tubo são admitidos nulos, $N_x = N_{x\theta} = M_x = M_{x\theta} = 0$, ou seja, o tubo possui suas extremidades livres, o que implica em:

$$u_r = \frac{a_{22} \times d_{22} - b_{22}^2}{d_{22} + b_{22} / r_0} \times (P_i \times r_i - P_e \times r_e) \times r_0 \quad (14)$$

Nas expressões acima, r_i e r_e são os raios interno e externo do tubo, respectivamente.

3.3 Análise de Resistência

No procedimento de análise de resistência, são avaliados os níveis de tensão nas lâminas do laminado para uma determinada pressão atuante ($P_{atuante}$) nas direções principais do tubo. Então são avaliadas as componentes de tensão atuantes nas direções principais de cada lâmina, por meio da equação abaixo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

A partir dessas componentes de tensão, é possível avaliar o índice de falha por meio da Eq. 3, e assim obter um valor para a razão de resistência (λ), como segue:

$$\lambda(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{f(\sigma)}} \quad (16)$$

Para a estimativa da pressão de ruptura ($P_{ruptura}$), associada à primeira falha (*First Ply Failure*), deve ser utilizado o menor valor de λ , obtido ao longo da espessura do laminado.

$$P_{ruptura} = \lambda_{mínimo} \times P_{atuante} \quad (17)$$

3.4 Pressão Externa Crítica

Em uma situação que o tubo estaria submetido a ação de uma pressão externa uniforme, deve-se considerar que a falha pode ocorrer sem que haja uma falha do material, devido ao fenômeno da flambagem. Esse tipo de falha levará o tubo ao colapso e fará com que ele assuma uma nova seção transversal, devido a um processo de deflexão provocado pela flambagem.

A expressão analítica mostrada abaixo para o cálculo da pressão externa crítica de tubos laminados de materiais compósitos foi proposta por Rasheed & Yousif (2005). Esta expressão baseia-se na Teoria Clássica da Laminação e na Teoria da Instabilidade Linear (Bazant and Cedolin, 1991), logo, só se aplica a tubos de parede fina e não considera a existência de imperfeições geométricas ou nos materiais que compõem a parede do tubo.

$$p_{cr} = 3 \left(\frac{D_{ani}}{r_0^3} \right) \left(\frac{1 - \psi^2 / \alpha}{1 + \alpha + 2\psi} \right), \text{ onde } \psi = \left(\frac{1}{r_0} \right) \left(\frac{B_{ani}}{A_{ani}} \right) \text{ e } \alpha = \left(\frac{1}{r_0^2} \right) \left(\frac{D_{ani}}{A_{ani}} \right) \quad (18)$$

Assim como na formulação para análise de tensões apresentada na sessão 3.2, são impostas as mesmas condições de vinculação para tubos longos e curtos no processo de análise da pressão crítica, o que implica nas expressões mostradas abaixo:

Para tubos longos.

$$\begin{bmatrix} A_{ani} & B_{ani} \\ B_{ani} & D_{ani} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & B_{22} \\ B_{22} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para tubos curtos.

$$\begin{bmatrix} A_{ani} & B_{ani} \\ B_{ani} & D_{ani} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & B_{22} \\ B_{22} & D_{22} \end{bmatrix} - [S_2]^T [S_1]^{-1} [S_2] \quad (20)$$

onde:

$$[S_1] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} \\ A_{16} & A_{66} & B_{16} & B_{66} \\ B_{11} & B_{16} & D_{11} & D_{16} \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S_2] = \begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{26} & B_{26} \\ B_{12} & D_{12} \\ B_{26} & D_{26} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Na prática, os tubos sem a atuação de carregamentos externos nos bordos livres, encontram-se em condições intermediárias as admitidas acima para tubos curtos (anéis) e longos.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Na Tabela 5, encontram-se as propriedades dos materiais constituintes, que são utilizadas nas análises de resistência e de pressão crítica para tubos de parede fina de materiais compósitos e homogêneos.

Tabela 4. Propriedades mecânicas dos materiais constituintes

	Vidro-E	Carbono T800	Epoxy 8551-7	Aço J55
$\rho(\text{kg/m}^3)$	2540	1800	1273,3	7850
$E_{11}(\text{MPa})$	72395	234500	4080	216000
$E_{22}(\text{MPa})$	72395	14120	4080	216000
$\mu_{12}(\text{MPa})$	30336,9	14700	1478	83076,92
$\mu_{23}(\text{MPa})$	30336,9	6418	1478	83076,92
ν_{12}	0,2	0,246	0,38	0,3
ν_{23}	0,2	0,1	0,38	0,3
$(\sigma_{11})_{ult}(\text{MPa})$	2150	5685	98,9	250
$(\sigma_{12})_{ult}(\text{MPa})$	–	–	110,8	144,34
$(\epsilon_{11})_{ult}(\%)$	2,97	2,42	2,42	0,116
$(\gamma_{12})_{ult}$	-	-	0,075	0,001737

Por meio das expressões apresentadas nas Sessões 2.1 e 2.2, foram estimadas as propriedades elásticas efetivas e os parâmetros de resistência das lâminas de material compósito. As mesmas propriedades para a liga de aço carbono do tipo J55 já foram mostradas na Tabela 5.

Tabela 5. Parâmetros elásticos e de resistência dos materiais constituintes do tubo

	Vidro-E / Epoxy 8551-7			Carbono T800 / Epoxy 8551-7		
	20	40	60	20	40	60
$f_f(\%)$	20	40	60	20	40	60
$e(mm)$	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55	0,55
$E_{11}(MPa)$	17771,8	31447,7	45109,2	50179,7	96270,9	142354,1
$E_{22}(MPa)$	6338,4	9438,11	15241,3	5759,3	7091,3	8745,9
$G_{12}(MPa)$	2133,0	3160,34	5004,5	1901,1	2465,0	3254,8
$\nu_{12}(MPa)$	0,338	0,3	0,264	0,35	0,321	0,295
$X_T(MPa)$	430,8	732,3	1093,4	1216,4	2333,6	3450,7
$Y_T(MPa)$	85,6	85,4	85,9	93,0	90,7	89,4
$S(MPa)$	88,5	87,241	84,9	82,3	74,4	65,5

Nas Figuras 7, 8 e 9 são exibidas as análises de resistência e de pressão crítica para tubos de materiais compósitos e de aço, com diâmetro interno igual a 508 mm, considerando a aplicação de pressões hidrostáticas interna e externa. Como as expressões apresentadas nas seções anteriores para análise de resistência e de pressão crítica estão baseadas nas hipóteses cinemáticas e estáticas empregadas na Teoria Clássica da Laminação, as análises que se seguem se aplicam para tubos de parede fina, onde deve-se considerar uma relação entre o raio médio e a espessura igual ou superior a **10** (Maalawi, 2011). Desta forma, os gráficos apresentados nas Fig. 7, 8 e 9 são interrompidos ao atingir esta restrição, o que fica bastante evidente na análise de pressão crítica para tubos de material compósito em relação aos tubos de aço, uma vez que uma menor rigidez dos primeiros leva a um tubo mais espesso de forma mais rápida.

Com base nas análises de resistência para pressões internas apresentadas na Fig. 7, para uma fração volumétrica de fibras igual a 20%, a configuração de $[30^\circ/-30^\circ]_n$ do tubo longo confeccionado com fibra de carbono apresenta 25% do peso do tubo de aço. Considerando a configuração de $[60^\circ/-60^\circ]_n$, o tubo longo confeccionado com fibra de carbono apresenta 10% do peso do tubo de aço. Para a configuração *cross-ply*, $[0^\circ/90^\circ]_n$, esta relação vai para 12%.

Com base nas análises de resistência para pressões internas apresentadas nas Fig. 8 e 9, para frações volumétricas de fibras iguais a 40% e 60%, a configuração de $[30^\circ/-30^\circ]_n$ do tubo longo confeccionado com fibra de carbono apresenta 20% do peso do tubo de aço. Considerando a configuração de $[60^\circ/-60^\circ]_n$, o tubo longo confeccionado com fibra de carbono apresenta 6% do peso do tubo de aço. Para a configuração *cross-ply*, $[0^\circ/90^\circ]_n$, esta relação vai para 7%.

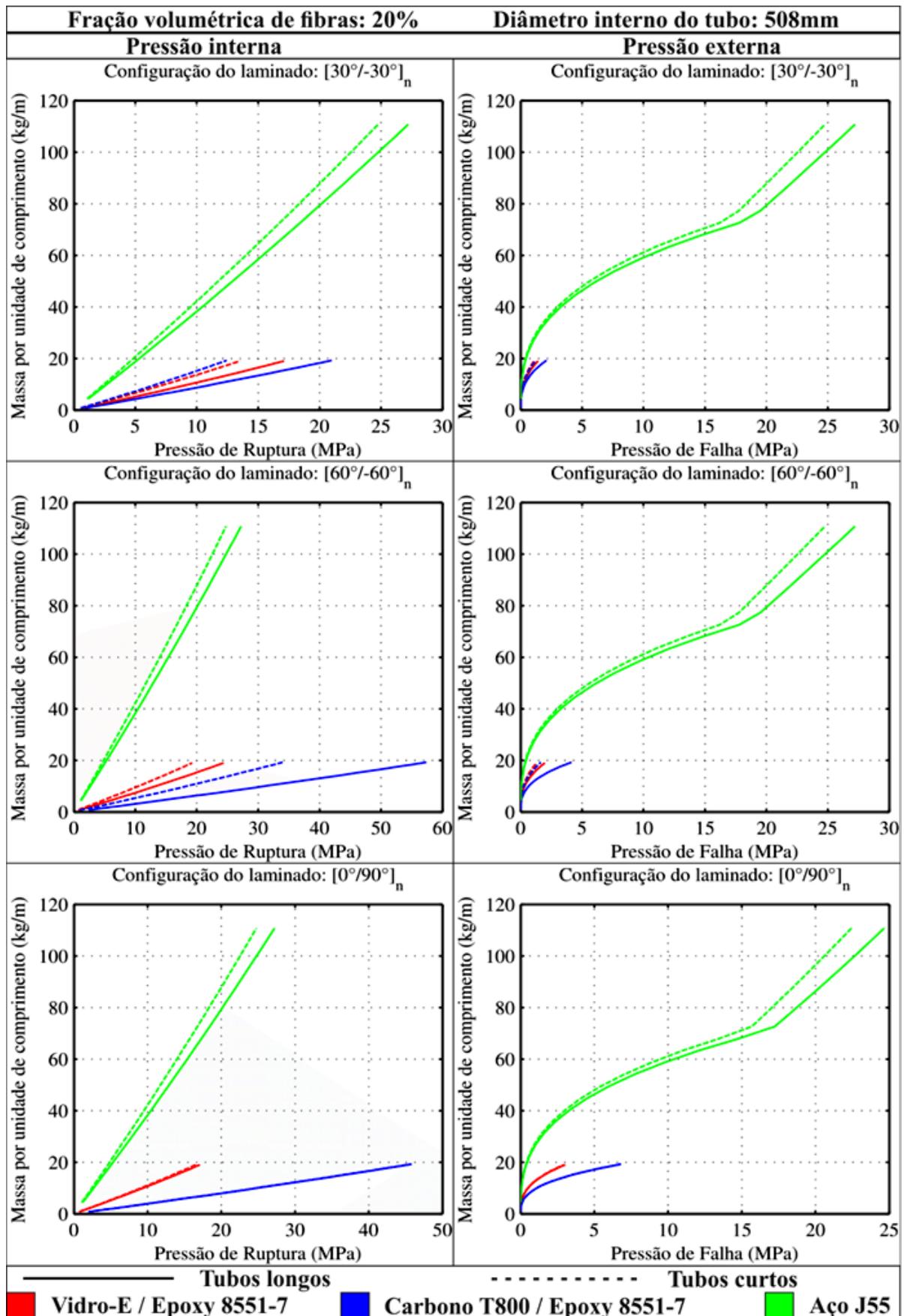


Figura 7. Análises de resistência e de pressão crítica para $f_f = 20\%$.

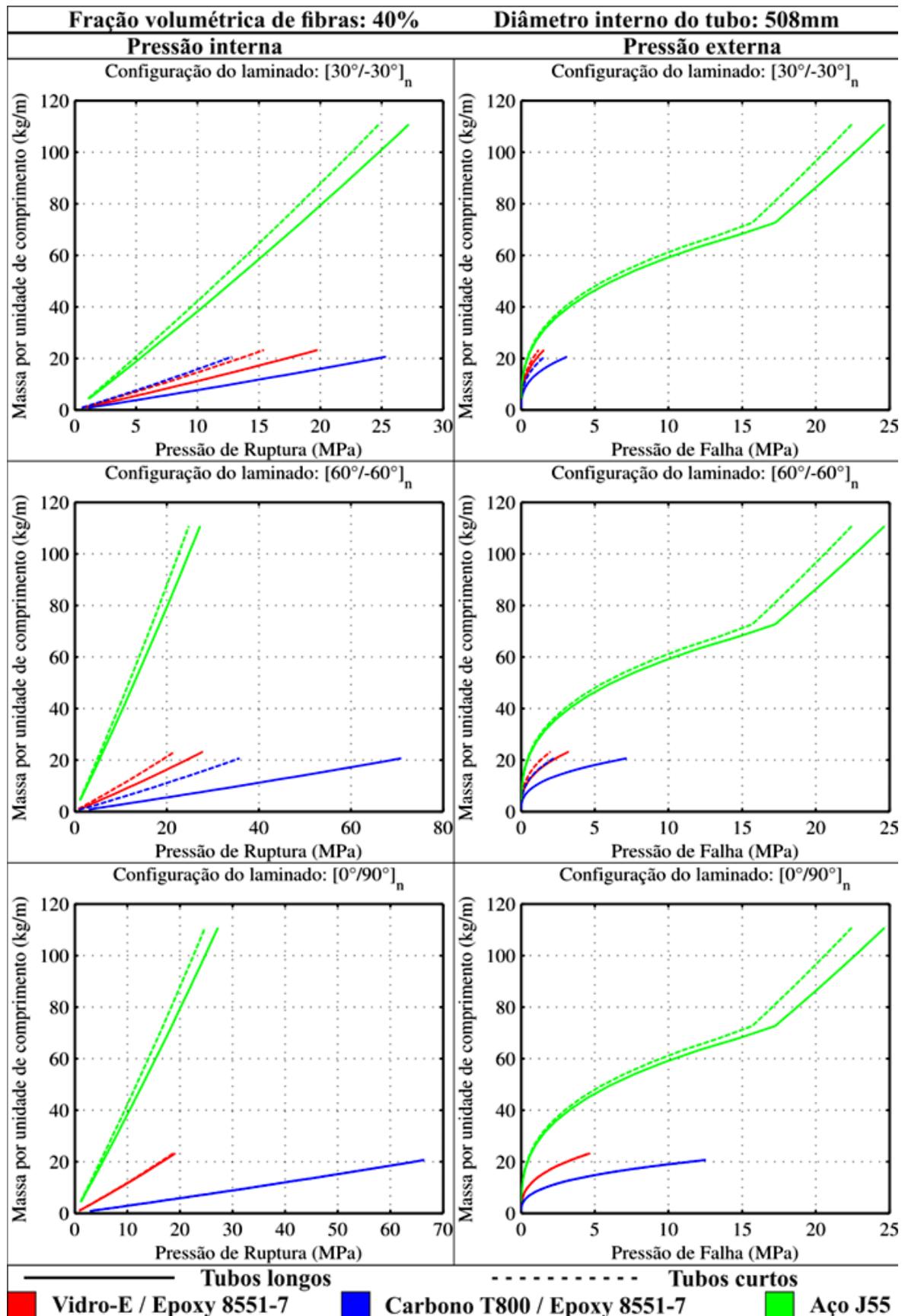


Figura 8. Análises de resistência e de pressão crítica para $f_f = 40\%$.

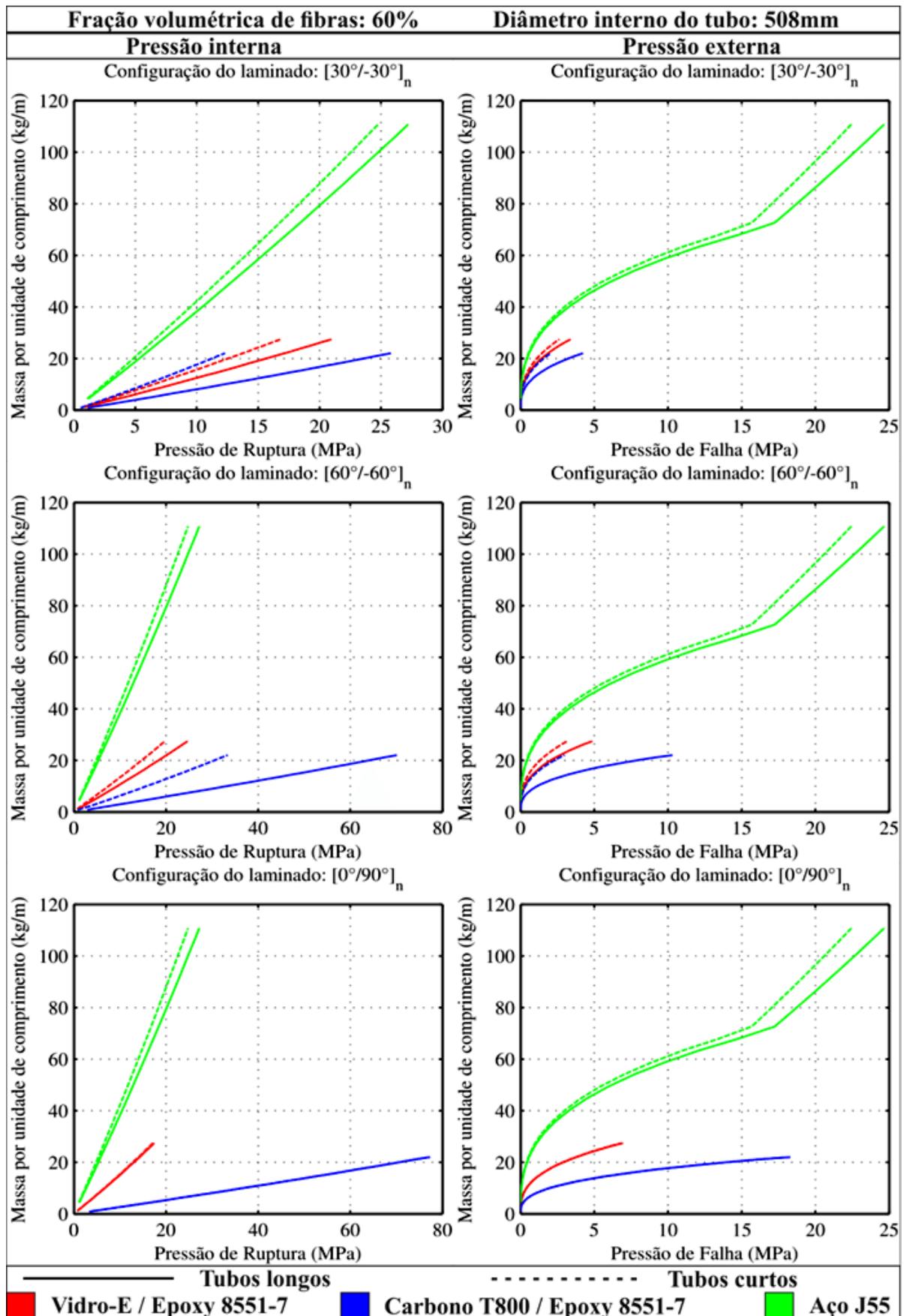


Figura 9. Análises de resistência e de pressão crítica para $f_f = 60\%$.

Quando o tubo se encontra sujeito à pressões hidrostáticas externas, um aumento na fração volumétrica de fibras sempre resulta em aumento de desempenho. Quanto mais próximo de 90° for o ângulo de orientação das fibras, maior será a capacidade portante dos tubos nessas situações, sendo a configuração ótima para esse tipo de esforço a configuração $[90^\circ / -90^\circ]_n$ (todas as fibras dispostas na direção circunferencial do tubo), porém, o tubo com esta configuração apresentaria um comportamento frágil quando submetido a esforços longitudinais.

Para o caso de pressão externa, a restrição de 10 para 1, imposta para os tubos de parede fina, é atingida para os tubos confeccionados com material compósito antes da transição da falha por flambagem para a falha por resistência das lâminas, o que não acontece para o tubo de aço, onde esta transição pode ser visualizada na mudança súbita no comportamento exibido nos gráficos. Desta forma, os tubos metálicos apresentam uma menor espessura para uma mesma pressão crítica quando comparados com os tubos de material compósito, no entanto, são cerca de três vezes mais pesados quando comparados aos tubos de material compósito que apresentam o melhor desempenho.

5 CONCLUSÕES

Com base nos resultados apresentados, percebe-se, de forma geral, um melhor desempenho dos tubos de material compósito em relação aos tubos de aço, uma vez que é possível confeccionar tubos em material compósito com um menor peso, apresentando a mesma resistência ou pressão crítica dos tubos de aço. Como era esperado, os tubos confeccionados com fibras de carbono apresentaram um melhor desempenho do que aqueles confeccionados com fibras de vidro. Os tubos longos apresentaram um melhor desempenho quando comparados aos tubos curtos, por conta do acréscimo de rigidez provocado pelas restrições cinemáticas impostas na direção longitudinal.

Tais resultados justificam o emprego destes materiais nas indústrias aeronáutica e *offshore*, pois possibilitam uma maior capacidade de carga e/ou menor potência exigida das aeronaves, e a construção de plataformas menores, levando-se em consideração a sua flutuabilidade, uma vez que as tubulações confeccionadas com estes materiais apresentam um menor peso agregado por metro linear.

Agradecimentos

Ao LCCV (Laboratório de Computação Científica e Visualização) do Campus do Sertão, por disponibilizar a infra-estrutura necessária à realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bazant, Z. P. & Cedolin, L., 1991. *Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. New York, Oxford University Press.

Christensen, R. & Lo, K., 1979. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 27, pp. 315-330.

Christensen, R., 1990. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 38 (3), pp. 379-404.

- Daniel, I. M. & Ishai, O., 1994. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. New York, Oxford University Press.
- Johnson, B. D., Baldwin, D. D. & Lo, K. H., 2000. Composite Production Riser Development and Qualification Test Results, Third International Conference on Composite Materials for Offshore Operations, Houston, TX.
- Kaw, A.K., 2006. *Mechanics of Composite Materials, Second Edition*, Mechanical and Aerospace Engineering Series.
- Meniconi, L. C. M., Reid, S. R. & Soden, P. D., 2001. Preliminary design of Composite riser stress joints. *Composites – Part A: applied science and manufacturing*, vol. 32, pp. 597-605.
- Hashin, Z. & Rosen, B. W., 1964. The elastic moduli of fiber-reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31, pp. 223-232.
- Hashin, Z., 1983. Analysis of Composite Material - A Survey. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 481-505.
- Maalawi, K. Y., 2011. Use of material grading for enhanced buckling design of thin-walled composite rings/long cylinders under external pressure. *Composite Structures*, vol. 93, pp. 351-359.
- Rasheed, H. A. & Yousif, O. H., 2005. Stability of anisotropic laminated rings and long cylinders subjected to external hydrostatic pressure. *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 18 (3), pp. 129-38.