



## ESTUDO DO EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE ELÁSTICA DE ARCOS ESBELTOS COM RESTRIÇÕES DE CONTATO

**Laura C. Santos**

**João Felipe A.C. de Abreu**

**Ricardo A. M. Silveira**

lauracamelos@hotmail.com

joaofelipearaujogmail.com

ricardo@em.ufop.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Propec/Deciv/EM), UFOP

Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil

**Resumo.** *As construções subterrâneas, como os elementos de fundações, túneis e tubulações enterradas, são normalmente suportadas pelo meio, no caso solo ou rocha, ou usadas para suportar a carga que vem do próprio meio. O material que compõe o solo ou rocha, em muitas situações, é incapaz de reagir às solicitações de tração, e assim a estrutura, durante o processo de carregamento e deformação, pode perder o contato com o meio circunvizinho, caracterizando um problema de contato unilateral. O presente trabalho apresenta uma metodologia numérica para a análise de arcos com restrições unilaterais de contato impostas por bases elásticas considerando a não linearidade geométrica da estrutura. A solução do problema não linear envolve, portanto, tanto o campo de deslocamentos quanto a extensão e a posição das regiões de contato entre o solo e a estrutura. A abordagem numérica proposta apresenta como principais características: o emprego do método dos elementos finitos para aproximar o comportamento do sistema de suporte (estrutura-base elástica); e o emprego de modelos discreto e contínuo de Winkler para representar as bases elásticas. Três exemplos numéricos envolvendo arcos são analisados e comparados com resultados presentes na literatura com o intuito de averiguar a eficiência das metodologias propostas para solução do problema de contato. Ao final do trabalho, algumas conclusões e observações referentes aos resultados obtidos são estabelecidas.*

**Palavras-chave:** *Arcos, Base elástica, Problemas de contato, Restrições unilaterais, Análise não linear geométrica*

## 1 INTRODUÇÃO

Elementos estruturais em contato com o solo ou rocha funcionam como suporte para o próprio solo ou como elementos a serem suportados pelo solo. Em ambos os casos, é importante avaliar as movimentações do sistema de maneira conjunta para a obtenção de um projeto estrutural-geotécnico mais eficiente e competitivo.

Como exemplos reais desses problemas de contato, pode-se citar uma das soluções mais comuns em infraestrutura urbana: os tubos pré-moldados de concreto. Esses tubos são, atualmente, o principal recurso utilizado para construção de galerias de drenagem e esgoto de todo o mundo. As tubulações enterradas são muito utilizadas também para transporte de gás natural (gasodutos), implementação de sistemas de combate ao incêndio, linhas telefônicas e elétricas, entre outros. Já as construções subterrâneas, como o caso dos túneis, são uma alternativa valiosa para se descongestionar as grandes cidades, transferindo, por exemplo, parte do transporte público para o subsolo. Essas construções podem também servir de alternativa para rodovias e ferrovias, facilitando acessos e encurtando distâncias entre localidades, além de sua aplicação histórica na mineração.

O estudo do comportamento mecânico de estruturas em contato com o solo é naturalmente complexo. No entanto, podem ser desenvolvidos modelos simplificados para aproximar o comportamento do solo. Esses modelos, apesar de não representar com exatidão o comportamento do meio, podem oferecer respostas suficientemente satisfatórias para a solução de diversos problemas da engenharia (Abreu, 2016).

No presente trabalho, o solo é representado como um meio elástico, homogêneo e isotrópico. A partir de modelos de molas discretas conectadas à estrutura, tenta-se simular, de maneira simplificada, a interação entre estrutura e meio. Existem duas formas de contato nesse tipo de simulação: quando a estrutura e o meio não perdem contato, as molas discretas reagem tanto às solicitações de compressão quanto de tração, e o contato é chamado de bilateral; e quando existe a possibilidade de perda de contato entre os corpos, as molas discretas respondem somente à solicitação de compressão, e nessa situação o contato é chamado de unilateral.

As estruturas devem também ser apropriadamente estudadas. A partir do desenvolvimento tecnológico e da necessidade de redução de custos em obras, as estruturas vêm se tornando mais esbeltas e, conseqüentemente, sujeitas a apresentarem problemas de instabilidade. A medida que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna cada vez mais relevante e dá origem a vários fenômenos que não são encontrados em sistemas lineares. Tais fenômenos estão relacionados à existência de múltiplas configurações de equilíbrio (estáveis e instáveis) e de pontos críticos (pontos limites e pontos de bifurcação) ao longo da trajetória não linear de equilíbrio, onde a estrutura pode exibir saltos dinâmicos (Silveira, 1995).

A não linearidade geométrica deve ser incluída nos problemas que envolvem grandes deslocamentos. Para essas condições, a configuração deformada da estrutura deve ser utilizada para dedução das equações de equilíbrio. Esse efeito não linear é introduzido na teoria da elasticidade através das equações de equilíbrio e pela inclusão de termos de ordem superior das relações deformação-deslocamento (Silveira, 1995).

Este trabalho tem como principal objetivo a elaboração de um estudo sobre o equilíbrio e a estabilidade de arcos com restrições unilaterais de contato impostas pelo solo ou rocha. É desenvolvida uma metodologia de solução numérica, via método dos elementos finito (MEF),

com a plataforma computacional ANSYS (2009), para análise desses problemas utilizando a base elástica em sua forma discreta, diferentemente do trabalho de Silveira *et al.* (2013) que usa o modelo de base contínuo de Winkler. Adicionalmente, os efeitos da não linearidade geométrica da estrutura são incluídos nas análises. Não são considerados os efeitos das forças de atrito entre os corpos.

São apresentados três exemplos numéricos envolvendo arcos em contato com o solo ou rocha. Os resultados encontrados foram comparados com outros estudos presentes na literatura para validação da metodologia aqui proposta.

## 2 MODELO PARA REPRESENTAÇÃO DO SOLO

O comportamento real do solo é bastante complexo devido a sua natureza heterogênea, anisotrópica e com características de força-deslocamento não lineares. Ao longo do tempo, foram desenvolvidos diversos modelos matemáticos simplificados para se tentar aproximar do comportamento do solo e, assim, poder obter respostas mais realistas na solução do problema de contato solo-estrutura.

No modelo idealizado por Winkler (Winkler, 1867; Hetényi, 1946), o solo é representado por um colchão de molas independentes e estreitamente espaçadas entre si (Fig. 1). Essa base elástica assume que o solo é homogêneo, isotrópico e com relação força-deslocamento linear. Dessa forma, a intensidade da reação normal da base,  $r_b$ , pode ser definida como:

$$r_b = K w_b \quad (1)$$

em que  $K$  é o parâmetro de rigidez da base elástica no meio contínuo de Winkler e  $w_b$  é o deslocamento normal da base.

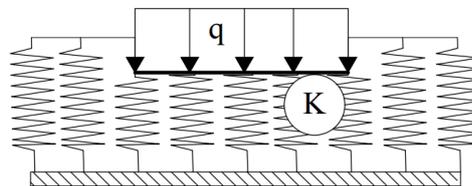


Figura 1. Modelo de Winkler

Devido a sua simplicidade, em que apenas um parâmetro é necessário para a modelagem da base, esse modelo é amplamente utilizado por pesquisadores até os dias de hoje. No trabalho de Stein e Wriggers (1984), por exemplo, é estudada a estabilidade de anéis em contato com uma base do tipo Winkler. Em estudos mais recentes, como o de Ochoa (2013), foram realizadas análises sobre os efeitos das ligações semirrígidas em colunas totalmente ou parcialmente enterradas. Já em Kim *et al.* (2015) pode ser encontrado um elemento finito, baseado na hipótese de Winkler, para análise e monitoramento de túneis.

Este trabalho utiliza molas discretas para representar o modelo contínuo de Winkler, como ilustrado na Fig. 2. Os seguimentos de reta B representam os elementos da base elástica que funcionam como molas discretas, oferecendo rigidez ao sistema. Os segmentos de reta A representam os elementos estruturais.

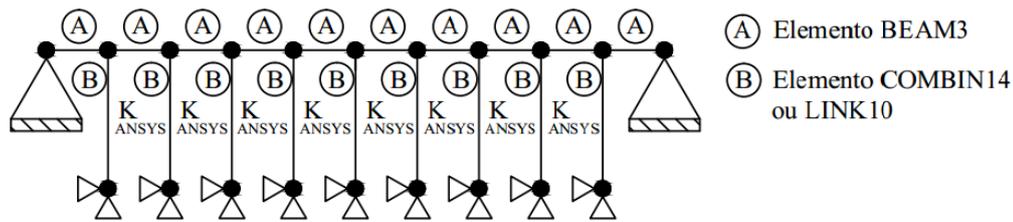


Figura 2. Discretização do Modelo de Winkler no ANSYS

Para o cálculo da rigidez das molas discretas a partir do modelo contínuo de Winkler, deve-se prosseguir da seguinte forma:

$$K_{ANSYS} = K L_{elem} \quad (2)$$

em que  $K_{ANSYS}$  é o valor da rigidez de cada elemento de mola,  $L_{elem}$  representa o comprimento de influência de cada mola em relação a estrutura analisada, que muitas vezes é o comprimento do próprio elemento finito utilizado na modelagem da estrutura, e  $K$  é o valor da rigidez da base elástica do modelo de Winkler.

Ainda sobre a Figura 2, é possível observar que, para representação da base elástica, podem ser utilizados os seguintes elementos finitos presentes na biblioteca de elementos do ANSYS (2009): o *COMBIN14* é o elemento utilizado quando são assumidas as restrições bilaterais de contato, ou seja, para os casos em que a base elástica responde às solicitações de tração e de compressão; e o elemento *LINK10*, que é utilizado quando são assumidas às restrições unilaterais de contato (a base elástica responde apenas às solicitações de compressão). Adicionalmente, o elemento *BEAM3* foi utilizado para a modelagem da estrutura. Neste trabalho foram consideradas apenas as restrições unilaterais de contato e, portanto, apenas os elementos *BEAM3* (para a estrutura) e *LINK10* (para a base elástica).

A maior crítica ao se utilizar o modelo contínuo de Winkler e sua modelagem em molas discretas, se dá pela falta de interação entre as molas e ao fato de se considerar a relação força-deslocamento como linear. Portanto, é importante ressaltar que em muitos tipos de solo essas simplificações não podem se aplicar na prática.

### 3 AS POSSIBILIDADES DE CONTATO

Ao se considerar as restrições bilaterais de contato (Fig. 3(a)), como a base e a estrutura estão fixas, surgirão zonas de compressão e de tração na base. Nessa situação, a região de contato entre os corpos será sempre conhecida. Agora, quando as restrições unilaterais de contato são incluídas na modelagem, que é o caso deste trabalho, zonas de descolamento entre estrutura e base poderão aparecer, como ilustrado na Fig. 3(b), e não se conhece *a priori* a região de contato entre os corpos. Portanto, no caso do problema de contato bilateral, a não linearidade advém apenas da possibilidade de grandes deslocamentos e rotações na estrutura. Entretanto, no caso do problema de contato unilateral, existe adicionalmente a não linearidade associada às condições de contorno.

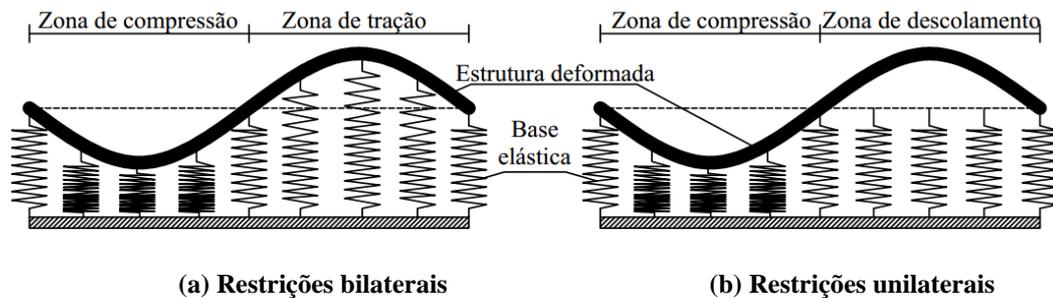


Figura 3. Tipos de restrições de contato (Machado, 2013)

Em problemas práticos da engenharia civil, ambas as formas de contato solo-estrutura podem acontecer dependendo das condições de contorno e de carregamento do sistema de suporte. Por exemplo, no caso de arcos estruturais usados na estabilização de túneis, dependendo do carregamento aplicado e se a estrutura não estiver suficientemente presa ao meio, poderá acontecer a separação entre os corpos. Nesse caso, a modelagem do problema deve incluir a possibilidade de descolamento entre estrutura-meio, ou seja, as restrições unilaterais de contato devem ser consideradas. Já no caso dos pilares-estaca (elementos de fundação profunda) totalmente enterrados no solo, ao serem solicitados, não perdem contato com o meio e, assim, a modelagem desse sistema de suporte deve ser feita considerando as restrições bilaterais de contato.

#### 4 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA ANSYS

Para o problema de contato em estudo, tem-se que, em geral, o primeiro passo para a obtenção da sua solução numérica consiste em reformulá-lo em espaços de aproximação. Para isso recorre-se aqui ao MEF, que é a técnica de discretização usualmente empregada na análise de problemas estruturais complexos, incluindo a classe de problemas tratados neste trabalho.

Após a discretização do sistema solo-estrutura, a atenção é voltada para a seleção e escolha de metodologias que possibilitem o tratamento, de forma adequada, da restrição unilateral imposta à análise, e que normalmente requerem que o problema tenha dimensão finita. Como apresentado em Silveira (1995), entre as alternativas encontradas na literatura, aquela que é seguida neste trabalho é:

- a adaptação de formulações usuais da mecânica estrutural (funcionais diferenciáveis e restrições bilaterais) ao caso do contato envolvendo restrições unilaterais. Os procedimentos resultantes, que são forçosamente de natureza incremental-iterativa, não têm garantias de convergência. Essa classe de procedimentos tem como atrativos: não introduzir conceitos novos; a adaptação de códigos já existentes para análises não-lineares; o tratamento de problema de contato como um tipo particular de problema não-linear; e a economia de tempo computacional se nenhuma mudança na região de contato acontece entre um passo e outro de carga.

Assim, como características mais importantes da estratégia de solução adotada, tem-se:

- o emprego do MEF em que elementos finitos foram convenientemente para modelagem da estrutura e base elástica; e
- o emprego de uma estratégia incremental-iterativa para solucionar o problema de equilíbrio não linear.

Nas subseções seguintes, estão uma breve discussão sobre a obtenção do equilíbrio do problema não linear de contato solo-estrutura de interesse e alguns detalhes sobre a estratégia incremental-iterativa adotada.

#### 4.1 Equação de equilíbrio do sistema

Como já mencionado na Seção 2, através da utilização do *software* ANSYS, após a definição da geometria do problema de contato e do tipo de material da estrutura e base, é necessário a escolha da malha de elementos finitos do sistema. Para isso, o elemento utilizado para a modelagem da estrutura é o *BEAM3* (Fig. 4) e dependendo do tipo de restrição de contato, escolhe-se o elemento para modelagem da base elástica, isto é: no caso do problema de contato bilateral, utiliza-se o elemento *COMBIN14* (Fig. 4(a)); e no caso do problema de contato unilateral, utiliza-se o elemento *LINK10* (Fig. 4(b)).

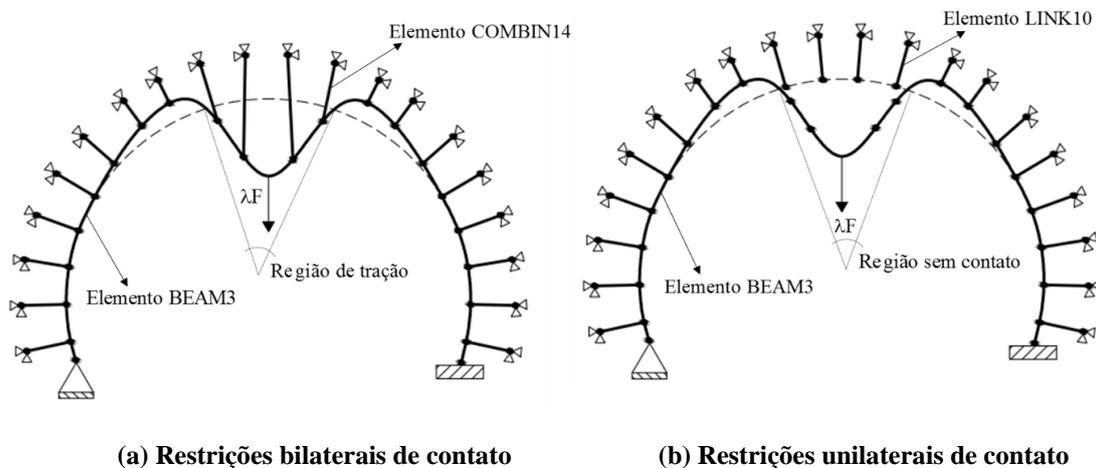


Figura 4. Elementos finitos escolhidos no software ANSYS (2009) para modelagem dos problemas de contato

Para ambos os problemas, após se considerar a contribuição de cada elemento (da estrutura e da base), a condição a ser satisfeita na configuração de equilíbrio  $t + \Delta t$  pode ser descrita genericamente pela equação:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i(\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{S}_c) \cong {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_r \quad (3)$$

em que  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i$  é o vetor de forças internas generalizadas na configuração  $t + \Delta t$ , que é função não linear dos deslocamentos nodais  $\mathbf{U}$ , das forças internas resultantes  $\mathbf{P}$  de cada elemento finito do sistema e de  $\mathbf{S}_c$ , que fornece a contribuição das regiões de contato entre os corpos, ou seja, a contribuição da base elástica.  $\mathbf{F}_r$  é o vetor unitário de referência correspondente ao carregamento externo e, finalmente,  ${}^{t+\Delta t} \lambda$  é uma grandeza escalar que representa a intensidade do carregamento externo aplicado.

#### 4.2 Estratégia de solução não linear

O procedimento numérico usado na solução de problemas de contato não linear descrito pela Eq. (3) segue uma estratégia incremental-iterativa. Nessa abordagem, são identificadas duas fases distintas no processo, para cada incremento de carga: a primeira delas é chamada de fase predita e a segunda, a fase corretiva.

A fase predita envolve a obtenção dos deslocamentos nodais incrementais,  $\Delta \mathbf{U}^0$ , a partir de um determinado acréscimo de carga,  $\Delta \lambda^0$ . Caso a técnica do comprimento de arco seja acoplada ao processo de Newton-Raphson, como ilustrado na Fig. 5, esse acréscimo de carga deve ser calculado obedecendo a seguinte equação (Crisfield, 1991; Silva, 2009; Pires, 2012):

$$\Delta \lambda^0 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \mathbf{U}_t^T \delta \mathbf{U}_t + \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}} \quad (4)$$

sendo  $\Delta l$  o incremento do comprimento de arco;  $\delta \mathbf{U}_t$  o vetor de deslocamento tangenciais, ou seja,  $\delta \mathbf{U}_t = \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{F}_r$ , com  $\mathbf{K}_T$  definida como a matriz de rigidez tangente do sistema solo-estrutura, e  $\mathbf{F}_r$ , como já informado, é o vetor de carregamento nodal de referência.

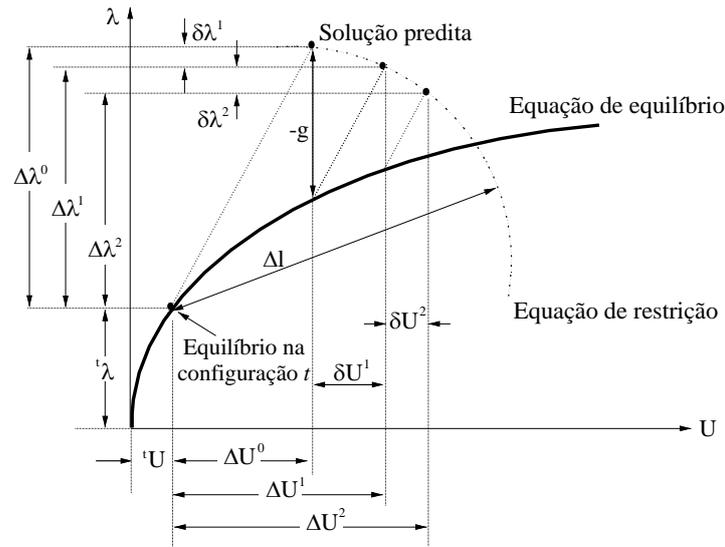


Figura 5. Solução incremental-iterativa acoplado o método do comprimento de arco (Silva, 2009)

Após o cálculo de  $\Delta \lambda^0$  através da equação anterior, chega-se no vetor de deslocamentos nodais incrementais,  $\Delta \mathbf{U}^0$ , simplesmente escalonando-se  $\delta \mathbf{U}_t$ , isto é:

$$\Delta \mathbf{U}^0 = \Delta \lambda^0 \delta \mathbf{U}_t \quad (5)$$

Ainda no processo de definição da solução predita, para o caso do problema de contato unilateral, é possível obter, após o cálculo de  $\Delta \mathbf{U}^0$ , uma boa aproximação da região de contato entre os corpos ( $S_c^0$ ) através da avaliação dos elementos de mola — a base elástica — que estão submetidos à compressão.

Após a definição da solução predita e dos elementos da base que estão comprimidos, entra-se na segunda fase de solução do problema, isto é, a fase corretiva da solução. Nessa fase será necessário corrigir as forças internas que serão obtidas através dos acréscimos dos deslocamentos nodais ao longo do processo iterativo. Esses acréscimos dos deslocamentos nodais são obtidos através de sucessivas correções, dada pela expressão:

$$\delta \mathbf{U}^k = \delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad (6)$$

em que  $k$  é o contador do número de iterações,  $\delta \mathbf{U}_g^k = \mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{g}^{(k-1)}$  e  $\delta \mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}_T^{-1(k-1)} \mathbf{F}_r$ , com o vetor gradiente  $\mathbf{g}$  sendo a diferença entre os vetores das forças externa e internas. A correção

do parâmetro de carga  $\delta\lambda^k$ , caso seja usada a restrição do Comprimento de Arco, é calculada resolvendo a equação do segundo grau:

$$A(\delta\lambda^k)^2 + B\delta\lambda^k + C = 0 \quad (7)$$

com a definição dos coeficientes A, B e C, na equação anterior, podendo ser encontrada, por exemplo, nas seguintes referências: Crisfield (1991), Silva (2009) e Pires (2012).

Em cada iteração, o equilíbrio do sistema de suporte é verificado comparando-se as forças internas obtidas na configuração  $t+\Delta t$  com o carregamento externo aplicado nessa configuração, ou seja, através da magnitude do vetor gradiente  $\mathbf{g}$ . Esse processo corretivo se repete até que o critério de convergência adotado seja satisfeito e o problema de contato esteja, portanto, em equilíbrio (ou seja,  $\mathbf{g} \cong \mathbf{0}$ ). Adicionalmente, no caso de contato unilateral, é verificada a cada iteração a participação da base elástica no processo de solução através do mapeamento dos elementos de mola que estão comprimidos, com a consequente atualização da região ou regiões de contato entre os corpos  $S_c$ .

## 5 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Serão analisados a seguir três problemas de estabilidade de arcos com características geométricas fortemente não lineares. São consideradas as restrições unilaterais de contato entre a base e a estrutura.

A análise de arcos com restrições unilaterais com o meio adjacente é objeto recorrente de estudo de pesquisadores das áreas de estruturas e geotecnia. O estudo realizado por Silveira *et al.* (2013) abordou uma solução numérica para a análise do equilíbrio e estabilidade de estruturas esbeltas, tais como arcos e anéis, em contato unilateral com o meio. Os exemplos numéricos realizados ressaltam a influência da posição da base elástica e sua rigidez no comportamento não linear de estruturas curvas. Os problemas envolvendo arcos apresentados por Silveira *et al.* (2013) foram reproduzidos no presente trabalho e são detalhados nas subseções 5.1 e 5.2.

Pires (2012) descreveu uma metodologia numérica para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal proposta por Krenk (1995). Com essa metodologia, a autora apresenta diversos exemplos numéricos envolvendo a estabilidade de arcos com comportamento geometricamente não linear. Na subseção 5.3 um desses exemplos é reproduzido com a adição da base elástica, admitindo-se as restrições unilaterais de contato.

### 5.1 Estrutura de suporte da base elástica

Na Figura 6 é apresentado o problema de contato a ser resolvido. Trata-se de um arco esbelto com as seguintes propriedades geométricas:  $R = 100$ ,  $\theta = 10^\circ$ ,  $EI = 1,40$  e  $EA = 420$  (unidades compatíveis). Esse arco encontra-se em contato com a base elástica de Winkler, suportando essa base. O problema estrutural real, representando um túnel, é mostrado na Fig. 6(a) e a representação do solo seguindo o modelo de Winkler é feito na Fig. 6(b). Finalmente, a Fig. 6(c) ilustra a modelagem matemática em elementos finitos (EFs) aqui utilizada.

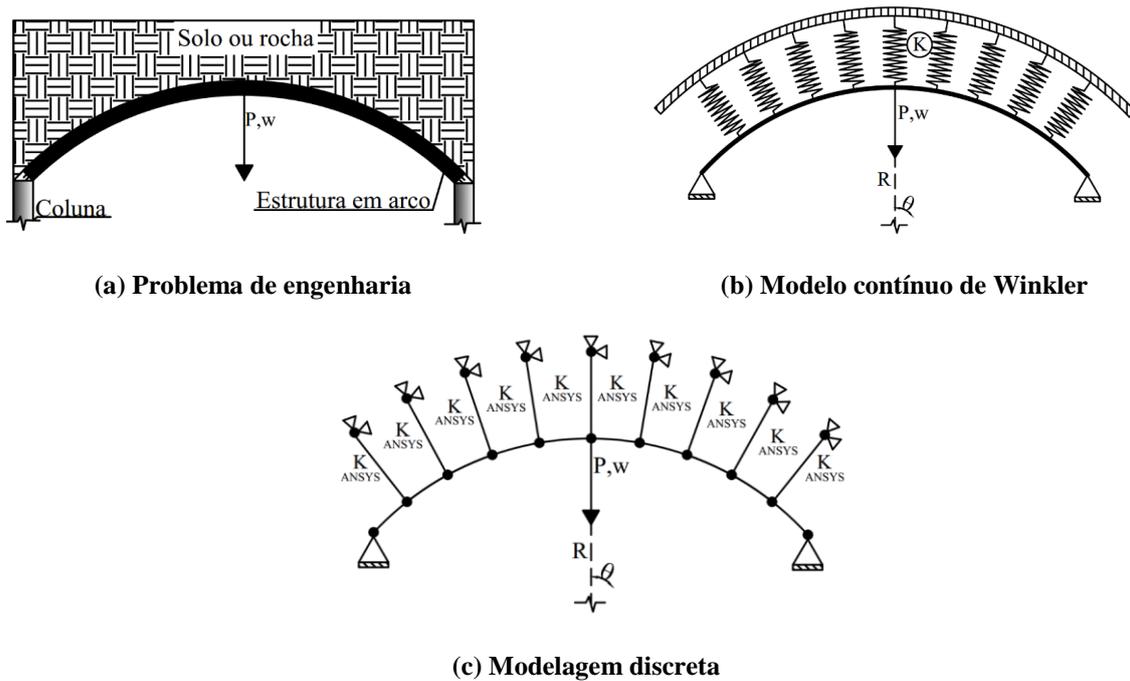


Figura 6. Arco suportando a base elástica

O padrão de deformação que se espera para o problema encontra-se na Fig. 7. A medida que se aplica um carregamento concentrado  $P$  no centro desse arco, surgem duas regiões de compressão da base elástica e uma região central de descolamento entre os corpos. Essa possibilidade de descolamento é característica das restrições de contato unilaterais, ou seja, a base elástica só reage às solicitações de compressão e a região de contato não é conhecida previamente.

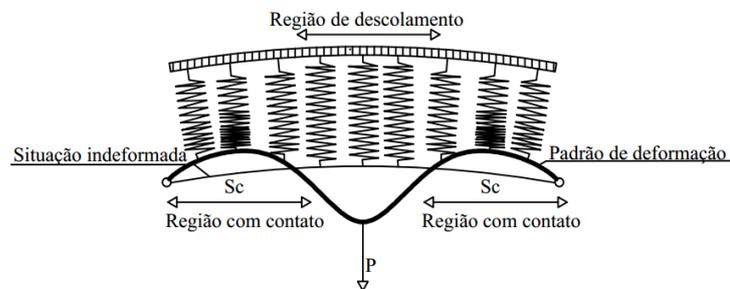


Figura 7. Padrão de deformação do arco

Como já visto nas seções anteriores deste artigo,  $K$  representa a rigidez da base elástica no modelo contínuo de Winkler e  $K_{ANSYS}$  é a rigidez de cada elemento de mola adotado. Optou-se pelo tratamento de resultados em formato adimensional, de modo que o valor da rigidez da base elástica no modelo de Winkler e a carga aplicada no centro do arco são representados da seguinte forma:

$$k = \frac{KR^4}{EI} \quad (8)$$

$$\Lambda = \frac{PR^2}{EI} \quad (9)$$

Adotando-se uma rigidez adimensional  $k = 10^5$  realizou-se uma análise paramétrica através da variação do número de elementos finitos (EFs). As trajetórias de equilíbrio são apresentadas na Fig. 8.

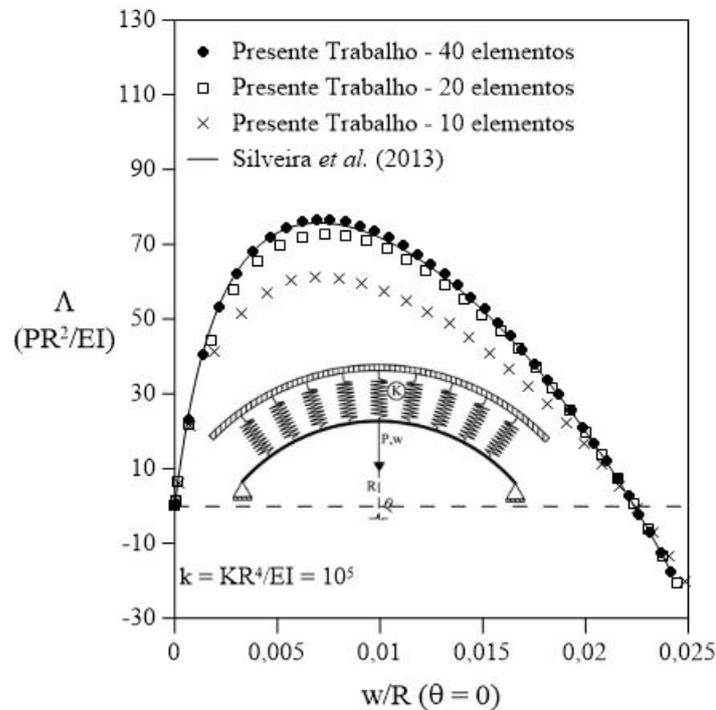


Figura 8. Influência da discretização na trajetória de equilíbrio do arco

Na Tab. 1 são apresentados os valores para a carga limite máxima ( $\Lambda_{\text{máx}}$ ) com as diferentes malhas adotadas. Os resultados obtidos aqui são comparados com o obtido por Silveira *et. al* (2013) que encontrou o valor da carga crítica  $\Lambda_{\text{máx}} = 75,60$ . Como pode ser observado, a malha com 40 EFs apresentou a melhor resposta.

Tabela 1. Influência da discretização no valor da carga limite máxima

Nº EFs	$\Lambda_{\text{máx}}$	Variação (%)
	Presente Trabalho	
10	61,15	19,11%
20	72,47	4,14%
40	76,63	0,85%

Valor de referência:  $\Lambda_{\text{máx}} = 75,60$  (Silveira *et al.*, 2013)

Adotando a discretização com 40 EFs, variou-se a rigidez da base da seguinte forma:  $k = 0$  (inexistência de base elástica);  $k = 10^5$  (base elástica flexível);  $k = 10^7$  (base elástica semi-rígida); e  $k = 10^9$  (base elástica rígida). A Fig. 9 apresenta as respectivas trajetórias de equilíbrio.

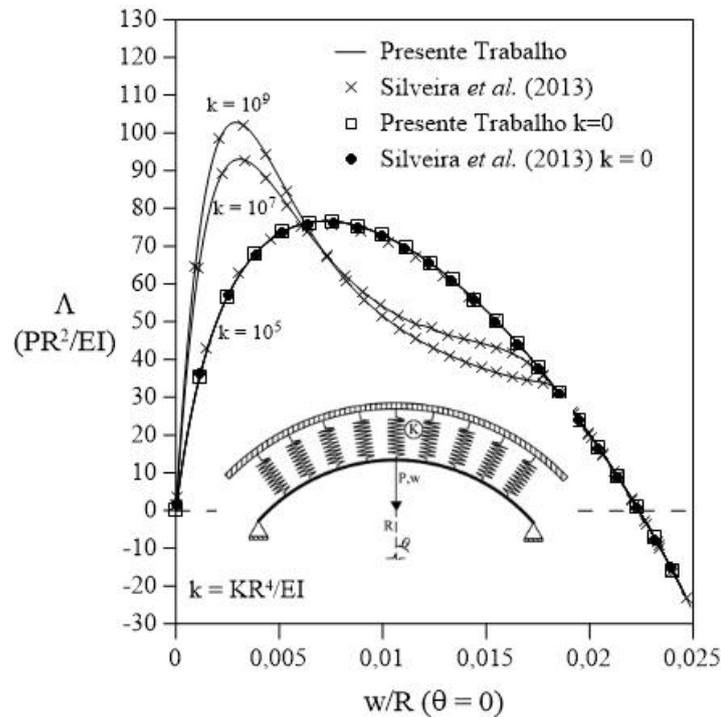


Figura 9. Caminhos de equilíbrio do arco para diferentes valores de rigidez  $k$  da base

Para bases elásticas flexíveis ( $k = 10^5$ ), os resultados encontrados foram bastante próximos daqueles encontrados para o caso de base nula ( $k = 0$ ). As cargas limites máximas são apresentadas na Tab. 2. Para valores de rigidez superiores a  $10^9$  não foi observada variação da carga limite máxima. Os resultados obtidos neste trabalho estão próximos daqueles obtidos por Silveira *et al.* (2013).

Tabela 2. Carga limite máxima – influência da rigidez da base

$k$	$\Lambda_{\text{máx}}$	$\Lambda_{\text{máx}}$	Variação (%)
	Presente Trabalho	Silveira <i>et al.</i> (2013)	
0	76,63	76,20	0,56%
$10^5$	76,24	75,60	0,85%
$10^7$	94,04	93,00	1,12%
$10^9$	104,17	103,00	1,14%

As configurações deformadas do arco para valores diferentes de carga e rigidez da base são mostradas na Fig. 10. Como pode ser observado, a dimensão da região de contato entre os corpos,  $S_c$ , se altera bastante para a situação do arco em contato com uma base flexível e rígida. Observa-se ainda a influência do carregamento na configuração deformada da estrutura. Ao se atingir a carga limite máxima ( $\Lambda_{\text{máx}} = P_{\text{máx}}R^2/EI$ ), segue-se para carregamentos cada vez menores ( $\Lambda = PR^2/EI$ ), com um aumento significativo da configuração deformada do arco. A região de contato  $S_c$  tende a diminuir cada vez mais até que se atinja o completo descolamento dos corpos.

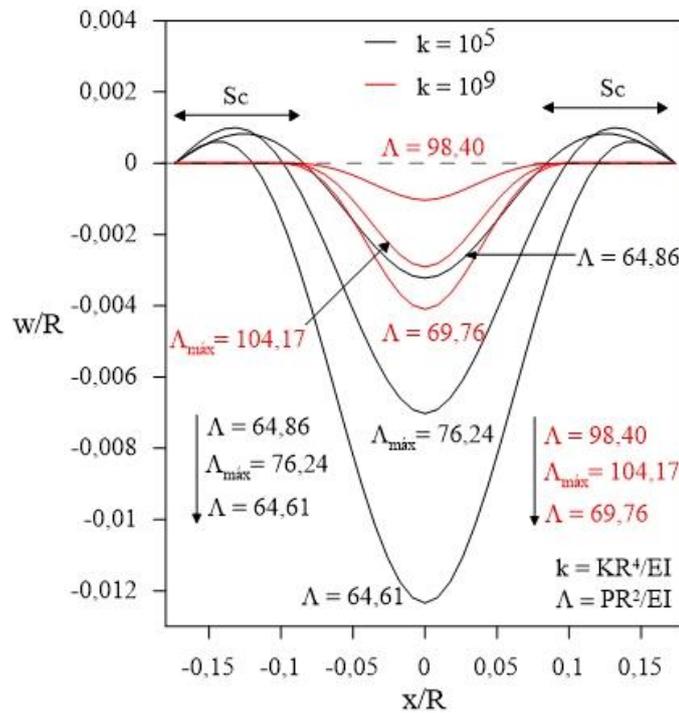


Figura 10. Configurações deformadas do arco

## 5.2 Estrutura suportada pela base elástica

O arco estudado possui as mesmas propriedades geométricas que aquele da subseção anterior, porém agora ele é suportado pela base elástica. A Fig. 11(a) traz o problema de engenharia envolvendo o elemento estrutural e o solo ou rocha que, na Fig. 11(b), é representado pelo modelo contínuo de Winkler. O modelo de elementos finitos adotado encontra-se na Fig. 11(c).

A estabilidade e as deformações desse arco foram avaliadas considerando a não linearidade geométrica da estrutura e as restrições unilaterais de contato entre os corpos. As respostas obtidas nesta subseção foram comparadas, mais uma vez, com os resultados obtidos por Silveira *et al.* (2013). Comparou-se também os resultados com a solução modal proposta por Silveira (1995).

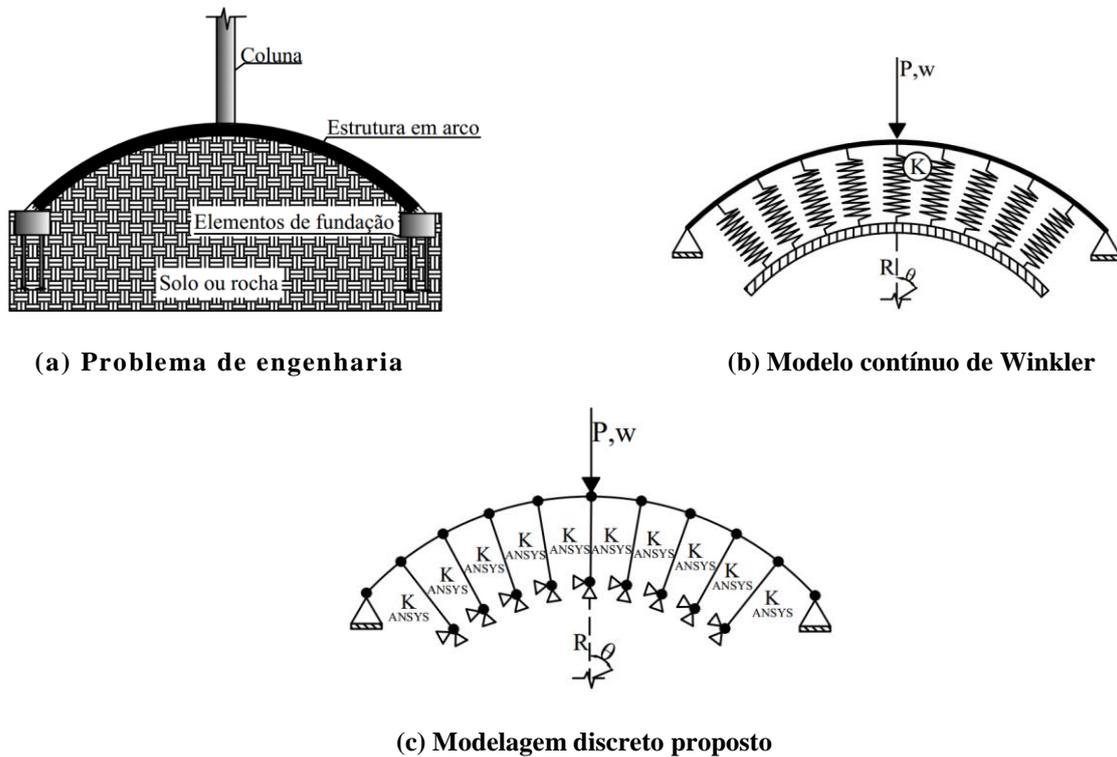


Figura 11. Arco suportado pela base elástica

O comportamento esperado da deformada da estrutura encontra-se na Fig. 12. As respostas às solicitações de carregamento ocorrem de maneira inversa daquela observada na subseção 5.1. Surgem, portanto, duas regiões de descolamento entre os corpos e uma região central em que a base elástica sofre compressão.

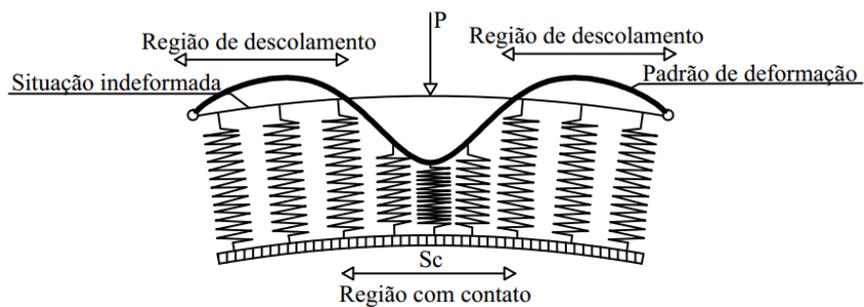


Figura 12. Padrão de Deformação

A Figura 13 apresenta as trajetórias de equilíbrio do arco para diferentes valores de rigidez adimensional (Eq. (8)). Pode-se observar que para valores de  $k$  inferiores a  $10^4$  não ocorrem mudanças no comportamento pré e pós-flambagem do arco, seguindo basicamente o que acontece no sistema sem fundação ( $k = 0$ ). A Tab. 3 apresenta as cargas limites máximas de cada trajetória e os resultados obtidos por Silveira et al. (2013) e Silveira (1995), indicando uma boa concordância entre os resultados.

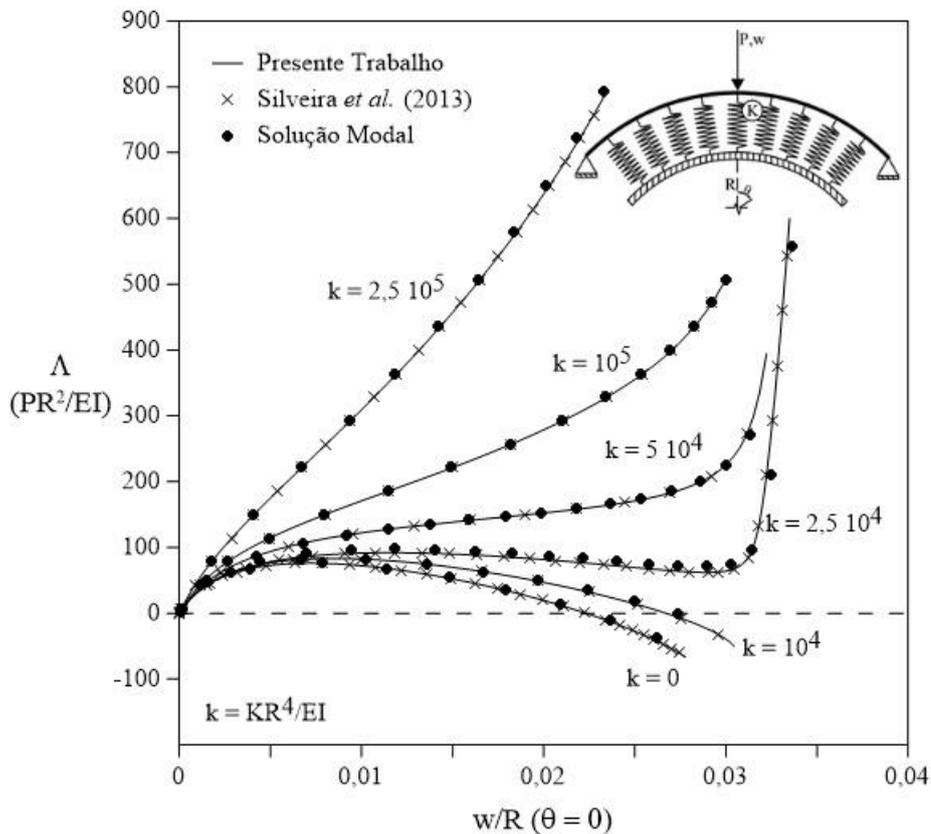


Figura 13. Caminhos de equilíbrio do arco para diferentes valores de  $k$  da base

É importante ressaltar, de acordo com a Fig. 13, o ponto de mínimo da trajetória de equilíbrio para  $k = 2,5 \cdot 10^4$  ( $\Lambda_{\min} = 66,57$ ). Nesse caso, ao se atingir o ponto de mínimo, o arco salta dinamicamente para uma nova configuração de equilíbrio estável. Vale destacar que foram realizadas análises das trajetórias de equilíbrio para rigidez da base elástica  $k$  com valores superiores a  $10^5$ , porém, não foram observados quaisquer pontos críticos ao longo do caminho de equilíbrio, que passou a ter comportamento próximo do linear.

Tabela 3. Carga limite máxima – influência da rigidez da base

k	$\Lambda_{\max}$	$\Lambda_{\max}$	Variação (%)	$\Lambda_{\max}$	Variação (%)
	Presente Trabalho	Silveira et al. (2013)		Solução Modal	
0	76,63	76,20	0,56%	76,01	0,82%
$10^4$	83,93	83,50	0,51%	83,35	0,70%
$2,5 \cdot 10^4$	98,56	98,20	0,37%	98,03	0,54%

A análise da configuração deformada do arco em contato com uma base elástica flexível ( $k = 10^4$ ) é apresentada na Fig. 14. É possível observar o comportamento pré e pós-flambagem da estrutura, com a região de contato  $S_c$  cada vez maior a medida que se aumenta a carga. Após o ponto limite de carga, observa-se o contato quase que total entre os corpos.

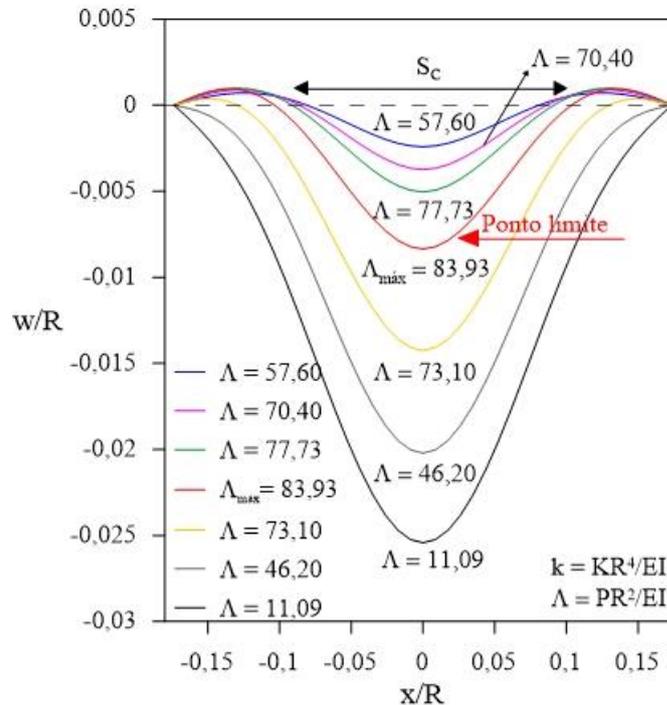


Figura 14. Configurações deformadas do arco,  $k = 10^4$

### 5.3 Arco circular suportando a base elástica

O arco estudado nesta subseção é apresentado na Fig. 15. Suas propriedades geométricas, em unidades compatíveis, são:  $R = 100$ ,  $\theta = 235^\circ$ ,  $EA = 1200$  e  $EI = 100$ . Esse mesmo problema foi estudado anteriormente por Pires (2012), Kouhia e Mikkola (1989) e Wood e Zienkiewicz (1977), mas sem considerar a base elástica. Os resultados apresentados por esses autores foram utilizados para a calibração do modelo e são mostrados na Fig. 16.

No presente trabalho, utilizou-se uma malha de 40 elementos finitos para a modelagem do arco rotulado-engastado. Inicialmente, um estudo sem a base elástica ( $k = 0$ ) foi realizado para validação dos resultados. Por fim, foram realizadas análises considerando o arco circular como sendo a estrutura de suporte da base elástica, para diferentes valores de rigidez adimensional  $k$  ( $10^2$ ;  $10^3$ ;  $10^4$  e  $10^5$ ).

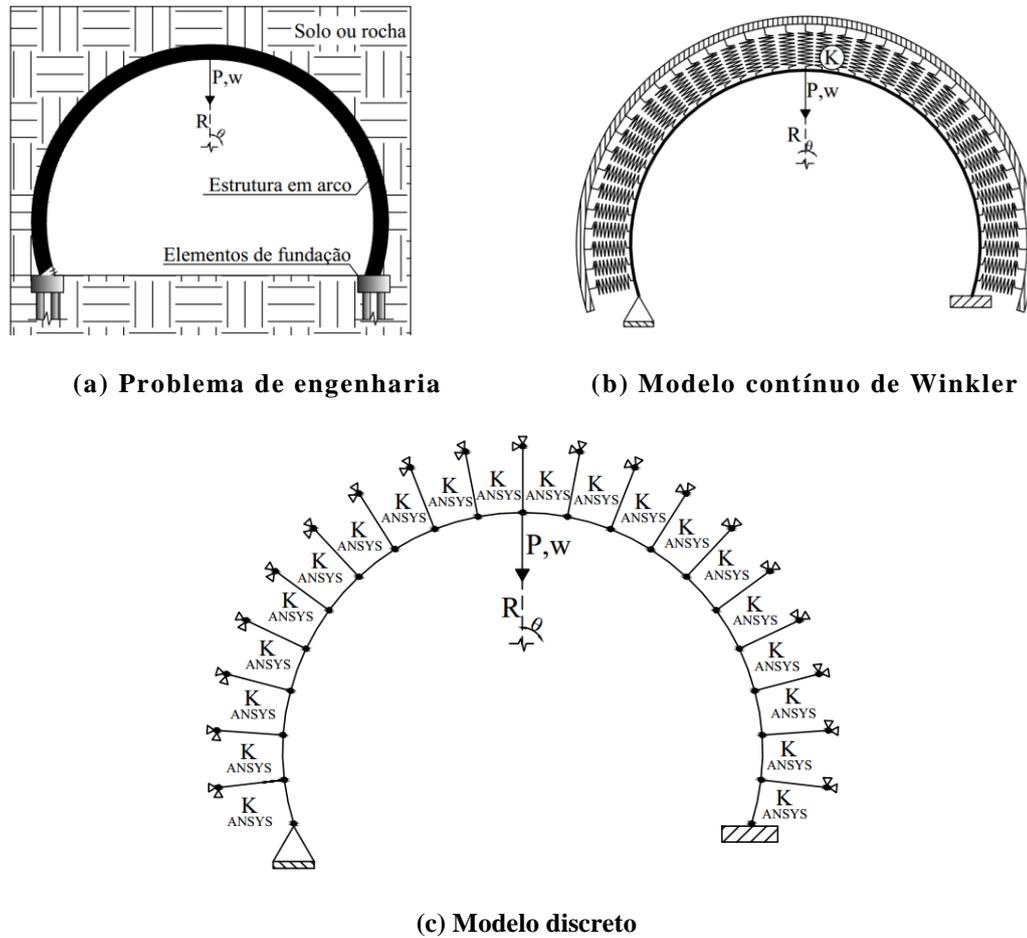


Figura 15. Arco circular suportando a base elástica

De acordo com a Figura 16, pode ser observada a boa concordância dos resultados aqui obtidos com aqueles estudos realizados anteriormente, sem considerar a base elástica ( $k = 0$ ). Os pontos limites de carga (pontos A e B indicados na figura) são ultrapassados de forma eficiente, e o traçado completo da trajetória de equilíbrio é obtido, assim como apresentado em Pires (2012). Na curva carga-deslocamento é possível observar que os valores obtidos para o ponto crítico foram inferiores aos dos outros autores.

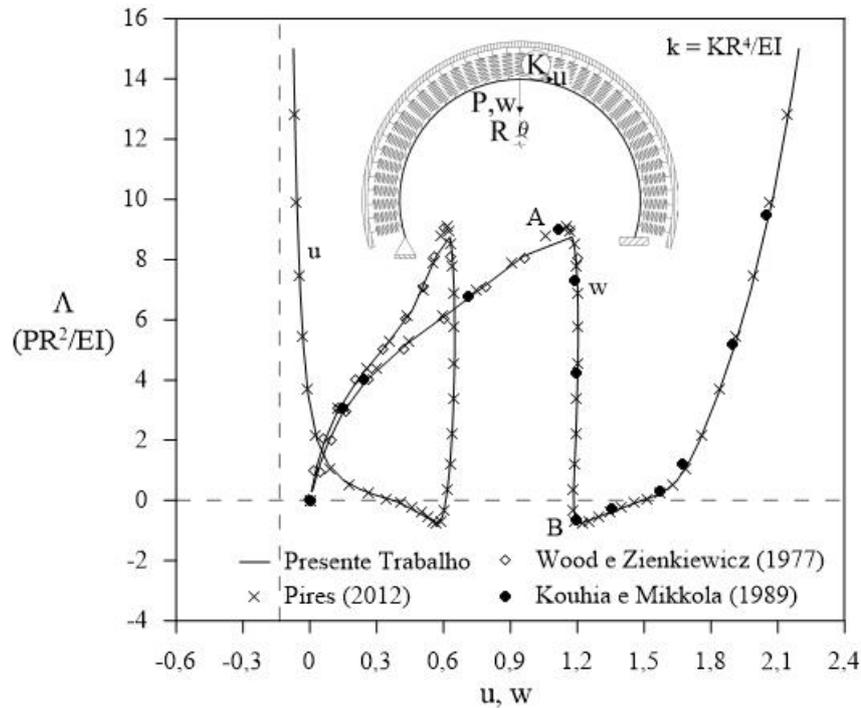


Figura 16. Trajetórias de equilíbrio do arco circular para  $k = 0$

Com a introdução da base elástica, a resposta do arco é alterada de forma considerável, tal como é ilustrado na Fig. 17, onde são apresentadas as trajetórias de equilíbrio da estrutura para diferentes valores de rigidez da base.

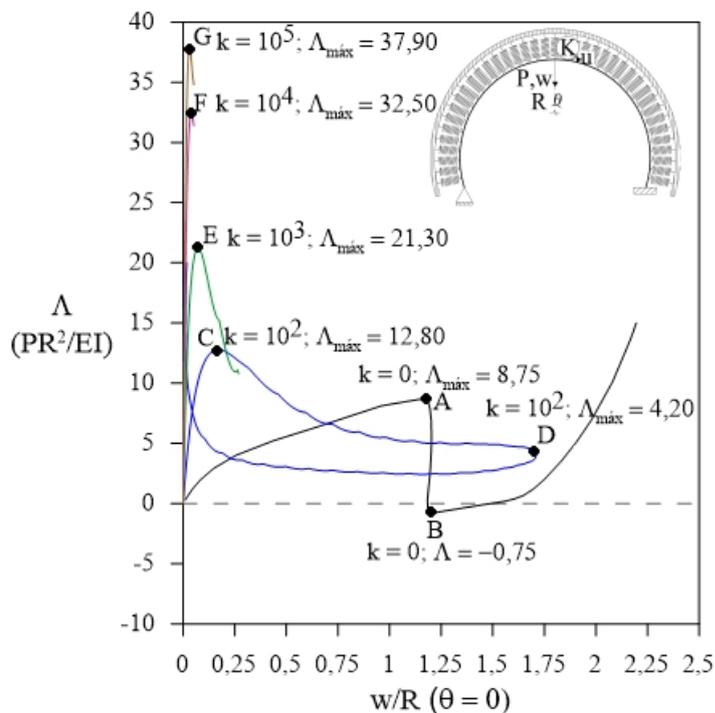


Figura 17. Trajetórias de equilíbrio do arco circular – influência da rigidez da base

Note, através da Figura 17, que para a rigidez da base elástica igual a  $10^2$  são identificados dois pontos limites: o ponto C, correspondente a  $\Lambda_{\text{máx}} = 12,8$ ; e o ponto D,  $\Lambda_{\text{máx}}$

= 4,20. A partir de uma rigidez de  $10^3$ , as trajetórias de equilíbrio se caracterizam por apresentarem apenas um ponto limite, sendo o ponto E referente a  $\Lambda_{\text{máx}} = 21,30$  ( $k = 10^3$ ), o ponto F a  $\Lambda_{\text{máx}} = 32,50$  ( $k = 10^4$ ) e o ponto G a  $\Lambda_{\text{máx}} = 37,90$  ( $k = 10^5$ ).

A Figura 18 apresenta as configurações deformadas da estrutura no momento em que o ponto limite de máximo é atingido para os diferentes valores de  $k$  (pontos A, C, E, F e G na Fig. 17). Quando  $k = 0$ , a estrutura sofre grandes deslocamentos. Com a introdução da base elástica, a região central do arco passa a perder contato com a base enquanto surgem pequenas regiões de compressão nas extremidades, com comportamento similar àquele observado na subseção 5.1.

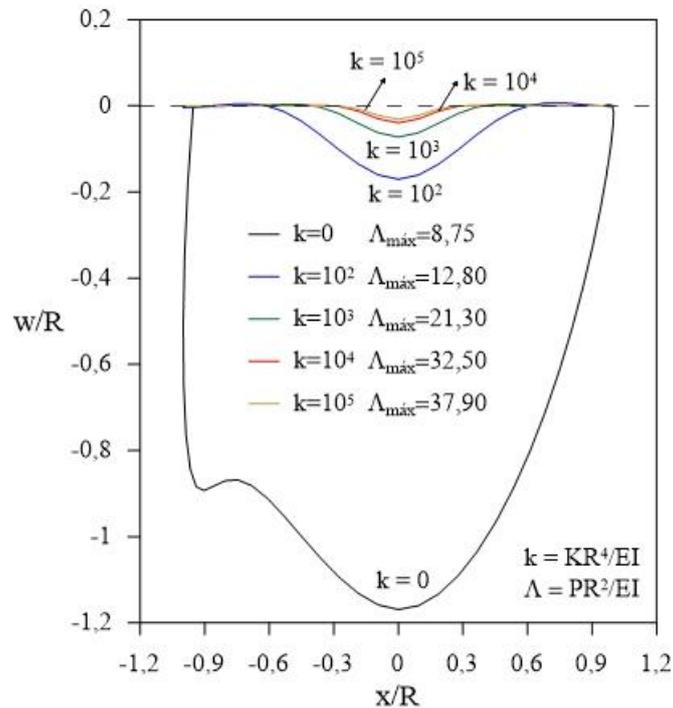


Figura 18. Configurações deformadas do arco circular – influência da rigidez da base

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentar uma abordagem discreta via MEF, utilizando a plataforma ANSYS (2009), para a modelagem numérica do problema de equilíbrio e estabilidade de arcos esbeltos foi o objetivo principal deste trabalho. Para aproximação do comportamento do solo, utilizou-se o emprego de molas discretas com rigidez equivalente ao proposto pelo modelo contínuo de Winkler.

Nos problemas estudados foram consideradas as restrições unilaterais de contato entre os corpos. Considerou-se também a não linearidade geométrica da estrutura. Sabe-se que a medida que as estruturas se tornam cada vez mais esbeltas essa não linearidade se torna relevante, dando origem a fenômenos inexistentes em sistemas lineares.

Para se obter a solução de todos os problemas, utilizou-se o método incremental-iterativo, sendo as iterações em cada passo de carga seguindo o método de Newton-Raphson Padrão acoplado à técnica de comprimento de arco, que permite a variação do parâmetro de carga durante o ciclo iterativo. Com essa estratégia, foi possível obter as diversas configurações de equilíbrio das estruturas de maneira bastante satisfatória.

Os resultados obtidos validam o emprego da abordagem discreta para solução dos problemas de equilíbrio e estabilidade de arcos.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES, CNPq, Fapemig, PROPP/UFOP e PROPEC/UFOP o apoio fornecido para o desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Abreu, J.F.A.C., 2016. *Estudo computacional via ANSYS de vigas, arcos e anéis com restrições de contato impostas por bases elásticas*. Dissertação de Mestrado, PROPEC/Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto/MG, Brasil.
- ANSYS, 2009. User's Manual for revision 12. *Swanson Analysis Systems Inc.*, Houston, PA.
- Crisfield, M.A., 1991. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. *John Wiley and Sons Inc.*, vol. 1, USA.
- Hetényi, M., 1946. Beams on Elastic Foundation. *University of Michigan Press*, Mich.
- Kim, J.S., Kim, M.K., Jung, S.D., 2015. Two-dimensional numerical tunnel model using a Winkler-based beam element and its application into tunnel monitoring systems. *Cluster Comput*, Springer.
- Kouhia, R. & Mikkola, M., 1989. Tracing the Equilibrium Path Beyond Simple Critical Points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 28, pp. 2923-2941.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual Procedure for non-linear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, pp. 823-839.
- Machado, F.C.S., 2013. *Análise computacional via MDF de cascas cilíndricas com restrições bilaterais e unilaterais de contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Ochoa, J.D.A., 2013. Stability of slender columns on an elastic foundation with generalised end conditions. *Ingeniería e Investigación*, v. 33, No. 3, pp. 34-40.
- Pires, D., 2012. *Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silva, A.R.D., 2009. *Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Silveira, R.A.M., 1995. *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/PUC-Rio, Rio de Janeiro/RJ, Brasil.
- Silveira, R.A.M., Nogueira, C.L., Gonçalves, P.B., 2013. A numerical approach for stability analysis of slender arches and rings under contact constraints. *International Journal of Solids and Structures*, v.50, p. 147-159.
- Stein, E. & Wriggers, P., 1984. Stability of rods with unilateral constraints, a finite element solution. *Computers and Structures*, v.19, p. 205–211.

Winkler E., 1867. Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit. Prag, Dominicus.

Wood, R.D. & Zienkiewicz, O.C., 1977. Geometrically nonlinear finite element analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells. *Computers and Structures*, v. 7, pp. 725-735.