



MODELAGEM DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO UTILIZANDO O MÉTODO ESTENDIDO DOS ELEMENTOS FINITOS (XFEM)

Castañeda, Jaime A. ¹

Bendezu, Marko A. L. ²

Romanel, Celso ¹

Roehl, Deane ^{1,2}

jaimeandres1791@gmail.com

markini@tecgraf.puc-rio.br

romanel@puc-rio.br

deane@tecgraf.puc-rio.br

¹ Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

² Instituto Tecgraf, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Rua Marquês de São Vicente, 225, 22451-900, Gávea, Rio de Janeiro/RJ, Brazil.

Resumo: *Um dos principais objetivos da engenharia de petróleo é desenvolver e aplicar técnicas capazes de aumentar a produtividade de poços de petróleo, incluindo a estimulação do maciço rochoso através de operações de fraturamento hidráulico. Estudos sobre a propagação de fraturas podem ser feitos analiticamente para situações simplificadas envolvendo homogeneidade, isotropia e condições de contorno simples, ou por meio de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos para casos mais complexos. A aplicação da formulação convencional do método dos elementos finitos tem a desvantagem de necessitar a atualização da malha de elementos à medida que a fratura se propaga, o que implica em maior esforço computacional e perda de precisão numérica na transferência de resultados da antiga para a nova malha. A aplicação do método estendido dos elementos finitos, em conjunto com o modelo de zona coesiva, apresenta a vantagem da fratura não ser fisicamente modelada, dispensando sucessivas gerações de malha. Neste artigo é apresentada uma simulação de fraturamento hidráulico comparando resultados analíticos com soluções numéricas obtidas pelo método estendido dos elementos finitos em modelagens bidimensionais (estado plano de deformação) e tridimensionais.*

Palavras chave: *Geomecânica, Fraturamento Hidráulico, Método Estendido dos Elementos Finitos, Modelo de Zona Coesiva, Método dos Nós Fantasmas*

1. INTRODUÇÃO

A exploração de petróleo em rochas de folhelho passa por uma rápida expansão devido à demanda global de energia, mudando o cenário energético em algumas regiões do mundo. Através da geração de uma rede de fraturas hidráulicas na matriz rochosa é possível extrair o petróleo. O fraturamento hidráulico é um processo pelo qual uma fratura se inicia e propaga devido a carregamentos aplicados por um fluido no interior da fratura (Adachi et al., 2007; Guangming et al., 2011; Li et al., 2012; Sarris & Papanastasiou, 2012).

A modelagem da propagação da fratura é de grande interesse na indústria do petróleo para se definir a pressão de injeção e a vazão do fluido, de modo a prever a eficácia do tratamento. Trata-se de um problema complexo, tridimensional, de natureza não linear com acoplamento hidromecânico entre as pressões induzidas na formação e as deformações experimentadas pela rocha. Grande parte dos simuladores de fraturamento hidráulico utilizados na indústria de petróleo é baseada em métodos empíricos ou em teorias de mecânica da fratura linear. Para rochas duras, onde o mecanismo de fraturamento frágil prevalece, resultados razoáveis podem ser obtidos, mas para rochas dúcteis os resultados previstos são bastantes conservadores (Papanastasiou *et al.*, 1999).

Uma das razões para esta discrepância é que para rochas dúcteis o processo de fraturamento está associado ao desenvolvimento de uma região ao redor da ponta que apresenta ocorrência de deformações plásticas. Esta região é chamada zona de processo da fratura e geralmente apresenta duas subregiões não lineares. Uma caracterizada por um comportamento de amolecimento do material e outra subjacente que pode apresentar comportamento perfeitamente plástico ou mesmo endurecimento. Para materiais frágeis a zona de processo é pequena, justificando a utilização da mecânica da fratura linear.

Para rochas dúcteis é necessária a aplicação da mecânica da fratura elastoplástica cuja solução requer o emprego de um método numérico, como o método dos elementos finitos. O fraturamento pode ser simulado pelo método convencional dos elementos finitos (FEM), mas modificações na topologia da fratura com o tempo requer atualizações sucessivas da malha, o que constitui em uma severa limitação quando a propagação da fratura envolve geometrias complexas. O uso de esquemas adaptativos também é tarefa difícil devido ao grande esforço computacional no mapeamento entre as quantidades calculadas na antiga para a nova malha.

O método estendido dos elementos finitos (XFEM) é um procedimento alternativo que é particularmente útil para a solução de problemas com características irregulares em pequenas partes do domínio. A formulação é enriquecida com funções descontínuas que lhe conferem maior precisão e eficiência computacional em comparação com a aplicação convencional do método. Adicionalmente, a malha não necessita ser atualizada com o fraturamento, pois a fratura em si não é fisicamente representada.

Neste estudo o método dos elementos finitos é empregado para simulação do fraturamento hidráulico em problemas 2D (estado plano de deformação) e 3D, comparando os resultados obtidos com as formulações analíticas mais frequentemente utilizadas na indústria do petróleo: o modelo KGD (Geertsma & Klerk, 1969), o modelo PKN (Perkins & Kern, 1961) e o modelo radial.

2. MÉTODO ESTENDIDO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método estendido dos elementos finitos (XFEM) é baseado na utilização de graus de liberdade adicionais que permitem simular a abertura da fratura com grande precisão com funções de enriquecimento expressas pela Eq. 1 (Moes et al., 1999):

$$u(x) = \sum_i u_i \varphi_i(x) + \sum_j b_j \varphi_j(x)H(x) + \sum_k \varphi_k(x) \left(\sum_{\ell=1}^4 c_k^\ell F_\ell(r(x), \theta(x)) \right) \quad (1)$$

onde $\{\varphi_i\}$ são as funções de interpolação convencionais, $H(x)$ a função de Heaviside associada com a geometria da fratura, $\{b_j\}$ os graus de liberdade associados com o enriquecimento na separação na ponta da fratura, $\{c_k^\ell\}$ os graus de liberdade associados com o enriquecimento dos deslocamentos próximos à ponta da fratura e as funções assintóticas $\{F_\ell(r, \theta)\}$, expressas em coordenadas polares a partir da ponta da fratura (Eq. 2):

$$\{F_\ell(r, \theta)\} = \{\sqrt{r}\sin(\theta/2), \sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sin(\theta/2)\sin(\theta), \sqrt{r}\cos(\theta/2)\sin(\theta)\} \quad (2)$$

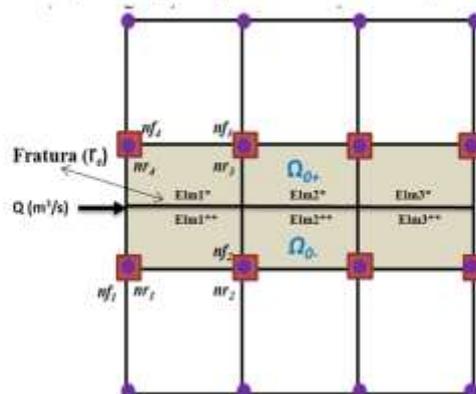
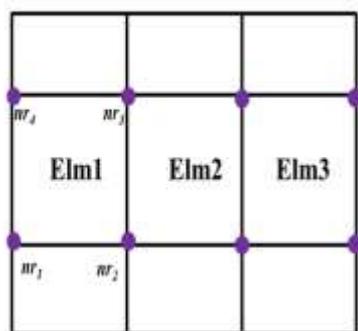
A soma no índice i na Eq. 1 considera todos os nós da malha enquanto que o conjunto de nós j da segunda soma contém todos os pontos nodais dos elementos finitos cortados pela fratura. O conjunto de nós k é construído de tal forma que contenha todos os nós situados dentro de certa distância da ponta da fratura (Laborde et al., 2005; Béchet et al., 2005).

O método estendido dos elementos finitos necessita de graus de liberdade adicionais (enriquecimento) para permitir a abertura de fraturas. Em uma região separada pela fratura, mas distante da ponta, tal enriquecimento é fornecido pela função de Heaviside, definida igual a 1 em um lado da fratura e -1 do outro. Esta técnica é fácil de implementar no caso de uma fratura retilínea, mas complicada se a geometria da fratura tornar-se irregular. Pode ser demonstrado (Hansbo e Hansbo, 2004; Song et al., 2006) que a descontinuidade no campo de deslocamentos introduzida pela função de Heaviside é equivalente à adição de novos elementos finitos sobre o elemento existente, no método conhecido como método dos nós fantasmas. Nesse método uma cópia do elemento é criada antes de se iniciar a fratura, e quando esta se inicia são acionados deslocamentos e graus de liberdades associados aos nós duplicados, chamados de nós fantasmas. Dessa forma, as duas cópias do elemento podem deformar-se de maneira independente.

Considere um elemento com nós nr_1, nr_2, nr_3, nr_4 (Fig. 1-a). Na (Fig. 1-b), o contorno ao redor da ponta da fratura (Γ_c), divide o domínio do elemento em dois subdomínios complementares, Ω_{0+} e Ω_{0-} . No método dos nós fantasmas, a descontinuidade no campo de deslocamentos é construída adicionando nós (aqui denominados nf_1, nf_2, nf_3, nf_4) sobre os nós existentes. O elemento finito é então substituído por dois elementos, referidos como elementos $Elem2^*$ e $Elem2^{**}$. A conectividade dos nós é $[nf_1, nf_2, nr_3, nr_4]$ para o novo elemento $Elem2^*$ e $[nr_1, nr_2, nf_3, nf_4]$ para o novo elemento $Elem2^{**}$, como se pode ver na figura (1-c).

Os elementos não compartilham nós e, portanto, representam campos de deslocamentos distintos. Ambos os elementos estão somente parcialmente ativos; a parte ativa do elemento $Elem2^*$ é denotada por Ω_{0+} e a parte ativa do elemento $Elem2^{**}$ por Ω_{0-} . O deslocamento $u(x)$ do ponto com coordenada x é calculado com as funções de interpolação convencionais $\{\varphi(x)\}$ e as quadraturas numéricas são executadas considerando os subdomínios Ω_{0+} ou Ω_{0-} dependendo da localização do ponto com respeito à fratura. Como as funções de interpolação associadas ao enriquecimento dos elementos são as mesmas dos elementos intactos, o método dos nós fantasmas é fácil de ser implementado numericamente, estando disponível em vários programas comerciais como no Abaqus (6.14) utilizado nesta pesquisa.

a) Configuração sem deformação sem dano. b) Configuração sem deformação com dano.



c) Configuração com deformação depois do dano.

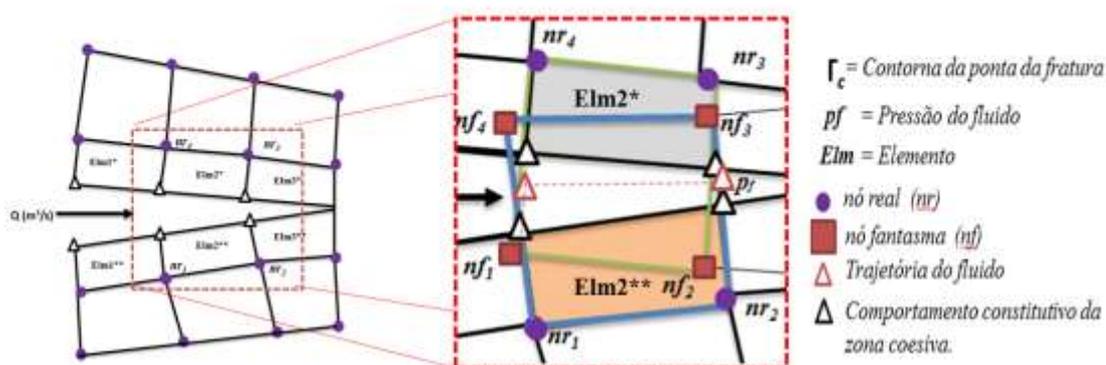


Figura 1. Esquema da técnica dos nós fantasmas.

Enquanto o método estendido dos elementos finitos é adequado para enriquecimentos adicionais dos deslocamentos ao redor da ponta da fratura para capturar o campo singular (terceiro termo da Eq. 1), o método dos nós fantasmas é aplicável somente para modelar fraturas coesivas, onde a singularidade das tensões pode ser removida. A fratura geralmente cresce através de todo o elemento, com a ponta da fratura sempre localizada sobre o lado de um elemento finito. Há variações do método publicadas na literatura que admitem a ponta da fratura no interior do elemento (Rabczuk et al., 2008; Vieira et al., 2015).

Para acompanhar a propagação da fratura no tempo é utilizada a técnica *level-set* que consiste de duas funções ϕ e ψ (Fig. 2-a e 2-b). A função ϕ descreve a trajetória de propagação da fratura na superfície e a função ψ descreve uma superfície ortogonal que localiza a ponta da mesma; deve ser novamente lembrado que a representação geométrica da fratura não é necessária, sendo a mesma inteiramente definida com base nos valores dos deslocamentos nodais dos nós fantasmas.

3. MODELO DE ZONA COESIVA

Barenblat (1959, 1962) e Dugdale (1960) propuseram o modelo de zona coesiva. Nele a zona de processo é admitida como uma extensão do comprimento da fratura até um ponto chamado de ponta fictícia da fratura (ou ponta matemática da fratura) ao longo da qual uma lei constitutiva específica é empregada relacionando decréscimo de tensões com aumento da abertura da fratura. A ponta real da fratura (ou ponta física da fratura) é o ponto da superfície

da fratura sobre o qual não atuam tensões, quando a abertura da fratura torna-se maior do que um valor crítico de abertura.

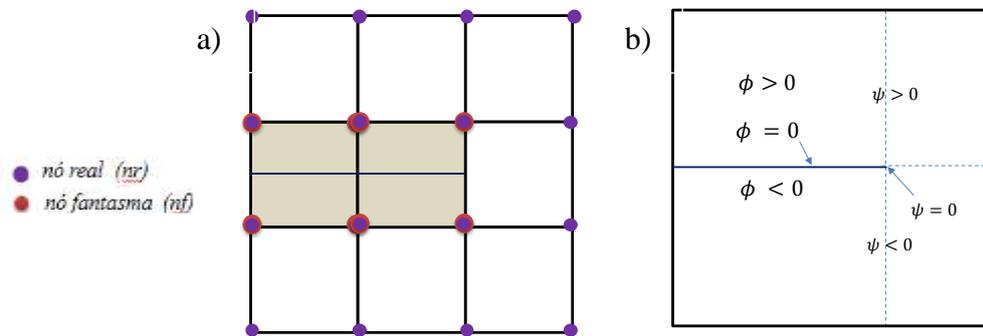


Figura 2. a) Geração de nós fantasmas; b) função level-set ϕ descreve a trajetória de propagação da fratura e a função level-set ψ localiza a ponta da fratura.

Dada a importância da zona de processo na mecânica da fratura, é fundamental considerar um modelo que leve em consideração o comportamento específico do material nesta pequena região. Em análises pelo método dos elementos finitos, a dificuldade é que a energia dissipada através das superfícies da fratura tende a zero com o refinamento da malha, um fenômeno denotado como sensibilidade espúria da malha, fisicamente não aceito. Uma possível solução pode ser obtida especificando-se a energia de fraturamento, e uma das abordagens mais simples consiste em utilizar o modelo de zona coesiva, no qual as características do comportamento da fratura estão incorporadas em uma relação entre a tração coesiva versus a abertura da fratura. Assim não é necessário considerar um critério de fraturamento, como os fatores de intensidade de tensão utilizados na mecânica da fratura linear.

A área sob a curva tração coesiva versus a abertura da fratura (Fig. 3) representa a energia crítica de fraturamento (G_c) e no modelo de zona coesiva a taxa de liberação de energia é especificada como um parâmetro do material. Os parâmetros necessários, resistência coesiva T_{max} e deslocamento crítico de abertura δ^f devem ser determinados com base em ensaios de laboratório e δ^0 deslocamento inicial (iniciação do dano).

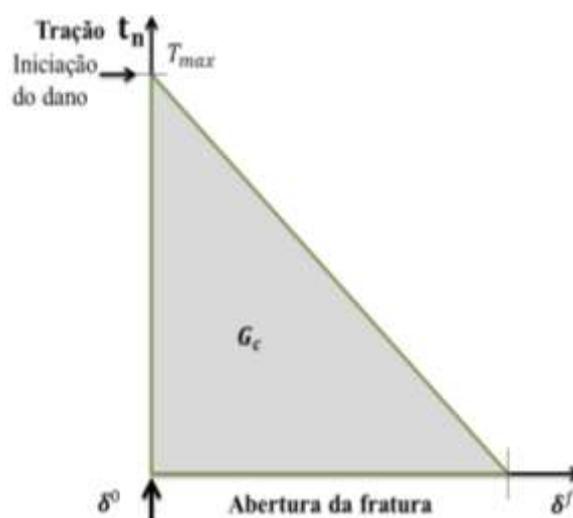


Figura 3. Modelo de zona coesiva utilizado com o XFEM.

4. FLUXO NO ELEMENTO FINITO FRATURADO

O padrão de fluxo no interior do elemento finito fraturado está mostrado esquematicamente na (Fig. 4). A pressão de um fluido incompressível nas superfícies da fratura também contribui no comportamento tração coesiva x abertura da fratura no modelo de zona coesiva.

O fluxo tangencial Q_T é descrito pela Eq. 3:

$$Q_T = -\frac{d^3}{12\mu} \nabla p \quad (3)$$

onde d é a abertura da fratura e μ a viscosidade do fluido.

O fluxo normal é descrito pela Eq. 4 como:

$$\begin{aligned} V_T &= c_t(p_i - P_T) \\ V_B &= c_b(p_i - P_B) \end{aligned} \quad (4)$$

onde V_T e V_B representam o fluxo nas superfícies do topo e da base do elemento fraturado, respectivamente; c_t e c_b são os coeficientes de *leak-off* nas superfícies de topo e base; p_i a pressão no nó fantasma no lado do elemento fraturado e P_T e P_B as poropressões no topo e na base das superfícies do elemento fraturado.

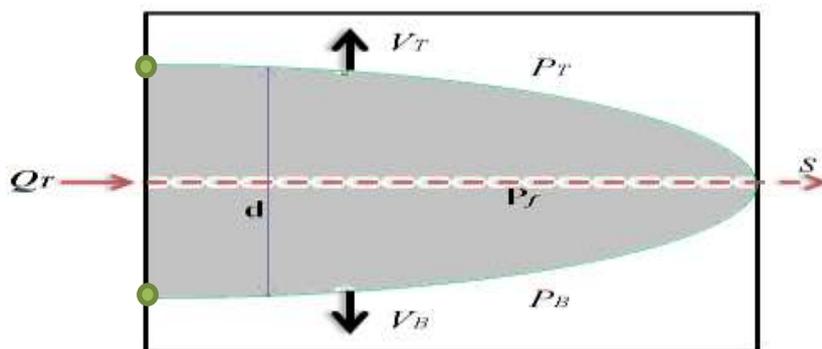


Figura 4. Fluxo no interior do elemento finito estendido.

5. XFEM EM MODELAGEM 2D

Um modelo no estado plano de deformação (modelo de fratura KGD) é considerado com as seguintes hipóteses e características: altura constante da fratura é muito maior do que seu comprimento, seção transversal retangular, fluxo de fluido Newtoniano em regime permanente 1D e a rocha reservatório como material contínuo, homogêneo e comportamento mecânico linear elástico. As propriedades do modelo estão apresentadas na Tab. 1 (Zielonka et al., 2014).

A malha de elementos finitos está mostrada na (Fig. 5) com dimensões de 84 m e 60 m nas direções x e y, respectivamente. É composta por 3.705 elementos bilineares de 4 nós e um total de 3.828 nós.

Os contornos AB e o DC (Fig. 5) tem deslocamentos impedidos na direção vertical ($u_y = 0$) e nos contornos AD e BC os deslocamentos são impedidos na direção horizontal ($u_x = 0$).

Os valores de poropressão são mantidos iguais a zero nestes contornos e o fraturamento é causado pela injeção de fluido com vazão constante $Q_T = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$.

A Tabela 1 mostra os parâmetros considerados na simulação computacional.

Tabela 1. Propriedades do modelo.

Modulo de Elasticidade (GPa)	$E = 17$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
Porosidade	$\phi = 0,2$
Peso Especifico do Fluido (kN/m^3)	$\gamma = 9,8$
Condutividade Hidraulica (m/s)	$k = 9.8\text{E}-09$
Indize de Vazios	$e = 0,25$
Viscosidade (kPa)	$\mu = 0,0001$
Energia da fratura($\text{Pa}\cdot\text{m}$)	$G_c = 120$
Resistência à tração da rocha(MPa)	$T_0 = 1,25$
Modulo de Biot (Mpa)	$M = 68,7$
Coefficiente de Biot	$\alpha = 0,75$

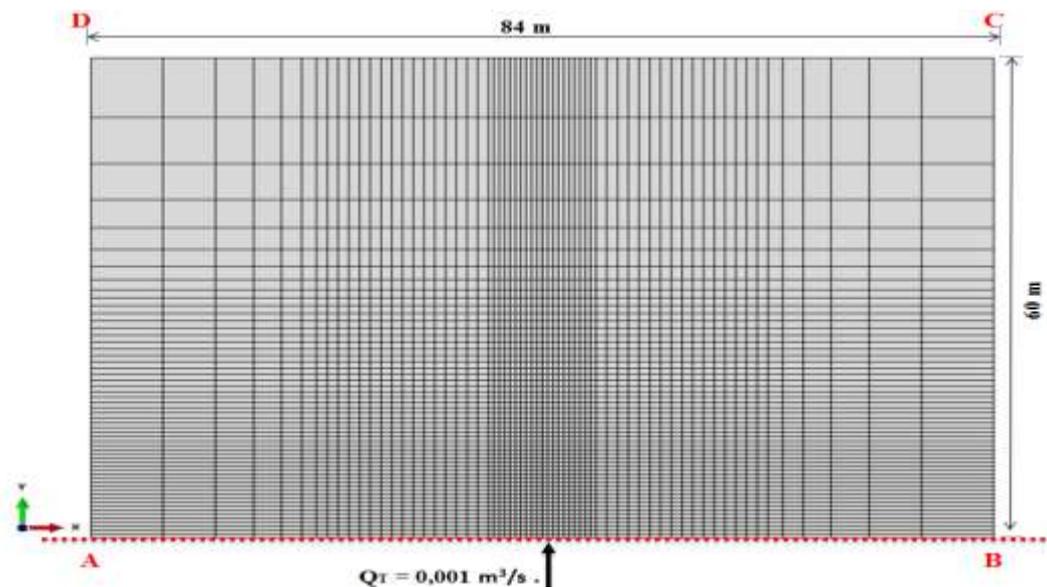


Figura 5. Dimensões e discretização da malha de elementos finitos.

Apesar da simplicidade e da simetria da geometria da fratura, não há soluções analíticas gerais para simular o fraturamento hidráulico quando o acoplamento hidromecânico é incorporado no problema.

As seguintes hipóteses simplificadoras são introduzidas: a) domínio infinito; b) material impermeável; c) material linearmente elástico; d) mecânica da fratura linear elástica; e) modelo de filtração (*leakoff*) com soluções analíticas aproximadas na forma de expansões assintóticas regulares (Bunger et al., 2005; Detournay et al., 2006; Garagash et al., 2011). Em decorrência, as equações governantes envolvem: a) equações de equilíbrio para um material linearmente elástico, que para um domínio infinito pode ser representado como uma equação integral singular relacionando a abertura da fratura com a pressão do fluido; b) as equações de balanço de massa locais e globais para o fluido fraturante; c) o critério de propagação de fratura, também expresso como uma equação integral singular relacionando a pressão fraturante e a rigidez da fratura.

Uma análise adimensional deste sistema reduzido de equações detecta a presença de dois pares de processos físicos concorrentes. O primeiro par consiste nos mecanismos dissipadores: energia dissipada pela viscosidade do fluido e pela propagação da fratura, enquanto que o segundo par consiste de componentes do balanço do fluido: armazenamento do fluido no interior da fratura e filtração do fluido da fratura para o material circundante. Dependendo qual dos mecanismos dissipadores e mecanismos de armazenamento sejam dominantes tem-se então quatro regimes limitantes de propagação da fratura: regime de propagação dominado pela viscosidade e pelo armazenamento (M), regime de propagação dominado pela rigidez e pelo armazenamento (K), regime de propagação dominado pela viscosidade e pelo leakoff (\tilde{M}) e regime de propagação dominado pela rigidez e pelo leakoff (\tilde{K}).

Estes quatro regimes de propagação de fratura podem ser descritos num espaço paramétrico, onde cada regime limite corresponde a um dos vértices do retângulo (Fig. 6), com um dos mecanismos de dissipação dominando e o outro sendo desprezado, com um componente do balanço global de fluido dominando e a outro ignorado.



Figura 6: Regimes de propagação da fratura hidráulica (Carrier e Granet, 2012)

A magnitude relativa dos processos de dissipação e dos processos de armazenamento pode ser descrita pela rigidez adimensional (Eq. 5) e pelo coeficiente de leakoff adimensional (Eq. 6), de acordo com Detournay et al. (2006):

$$K = \frac{4K_{1c}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3Q_0 E'^3 \mu} \right)^{1/4} \quad (5)$$

$$C = 2C_L \left(\frac{E t}{12 \mu Q_0^3} \right)^{1/6} \quad (6)$$

Cada vértice do espaço paramétrico da (Fig. 6) representa um regime assintótico durante a injeção de fluido numa fratura no estado plano de deformação. O regime de propagação pode começar no vértice dominado pela viscosidade ($K \ll 1$) ou pelo vértice dominado pela rigidez ($K \gg 1$); além disso, o regime de propagação pode evoluir do vértice dominado pelo armazenamento ($C \ll 1$), para o vértice dominado pelo leakoff ($C \gg 1$).

No presente trabalho procurou-se comparar a solução analítica para o regime de fratura do vértice K (Adachi, 2001) com o modelo numérico XFEM. Os resultados obtidos estão mostrados na (Fig. 7). Conforme pode ser observado, os comportamentos das soluções numérica e analítica são semelhantes, com as curvas obtidas numericamente apresentando oscilações devido aos efeitos de refinamento da malha e dos intervalos de tempo empregados na análise. Na (Fig. 8), pode ser observado o comprimento da fratura (13,20 m) no tempo final da análise de 15s, junto com o campo de deslocamentos provocados por sua propagação.

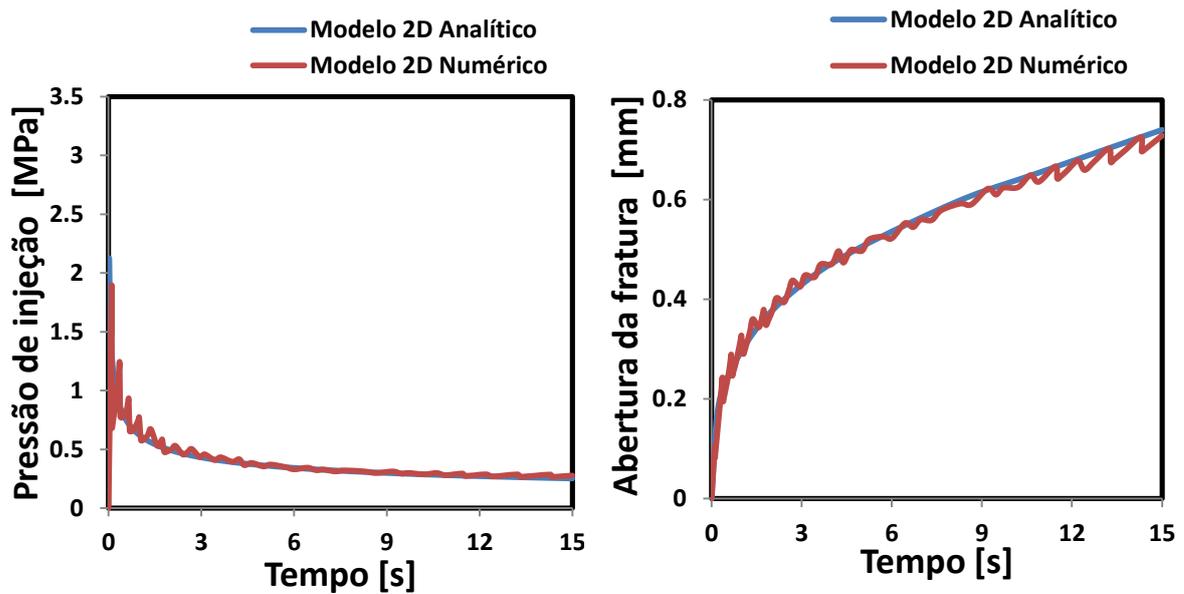


Figura 7. Comparação da evolução da pressão de injeção e da abertura da fratura obtidas do modelo numérico e da solução analítica.

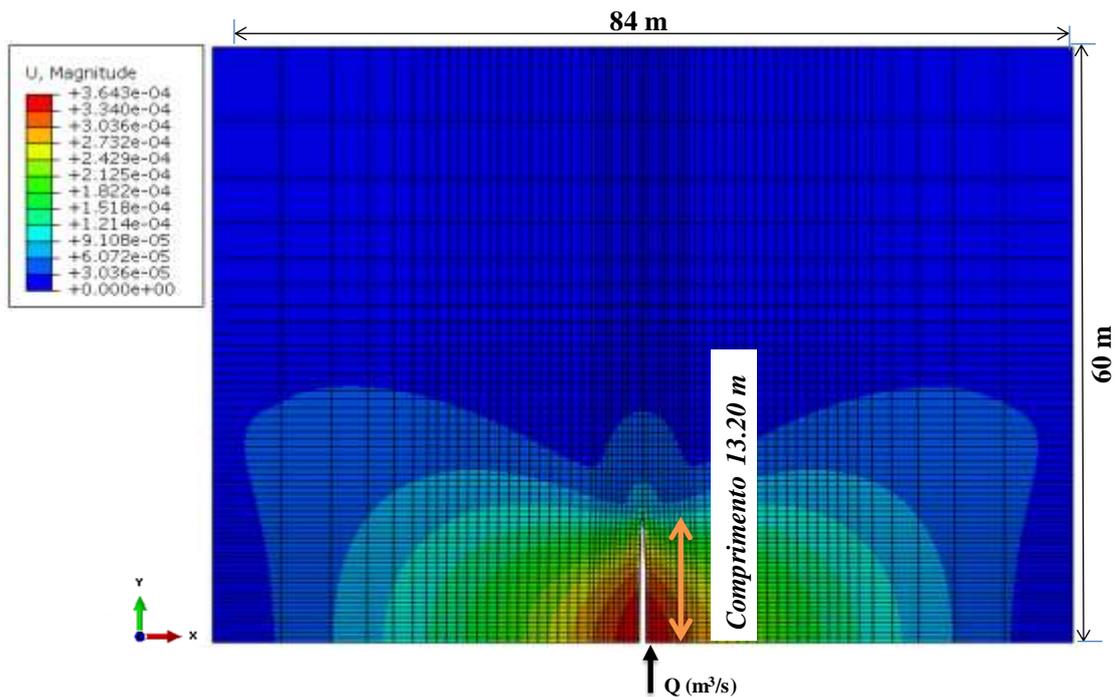


Figura 8. Propagação do fraturamento hidráulico no instante $t = 15s$ no modelo 2D.

6. XFEM EM MODELAGEM 3D

Para simulações mais reais de propagação de fraturas induzidas hidráulicamente, a hipótese de altura da fratura constante no tempo e no espaço, adotada nas modelagens bidimensionais, mostra-se bastante restritiva.

O exemplo anterior foi novamente simulado utilizando um modelo numérico 3D (Fig. 9) com dimensões 84m, 60m e 5m nas direções x, y, z, respectivamente. A malha de elementos finitos é composta de 37.050 elementos hexaédricos de 8 nós e um total de 42.108 nós. A mesma discretização empregada na modelagem 2D no plano xy foi mantido nesta simulação 3D do mesmo problema e as mesmas condições de contorno foram mantidas. O fluido foi injetado em toda a camada de espessura 5 (m) com uma vazão total de $Q_T = 0,001 \text{ m}^3/\text{s}$.

Os resultados comparando as soluções analítica (Adachi, 2001) e numérica estão mostrados na (Fig. 10). Pode-se observar que a evolução da pressão de injeção e da abertura da fratura tem boa concordância em ambos os resultados anteriores. A (Fig. 11) ilustra o campo dos deslocamentos do modelo 3D no final da análise no tempo de 15s.

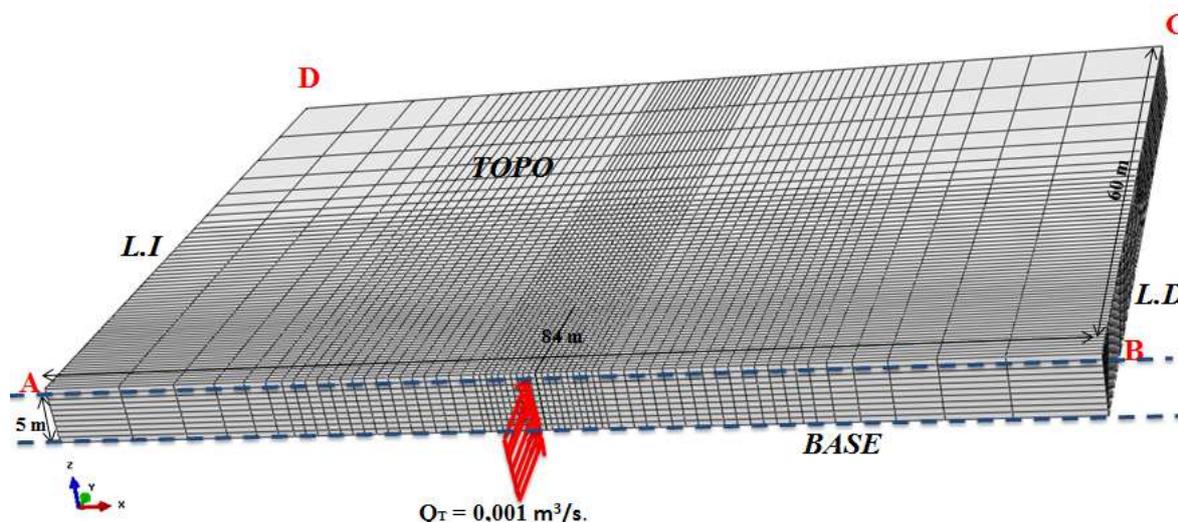


Figura 9: Dimensões e discretização do modelo 3D.

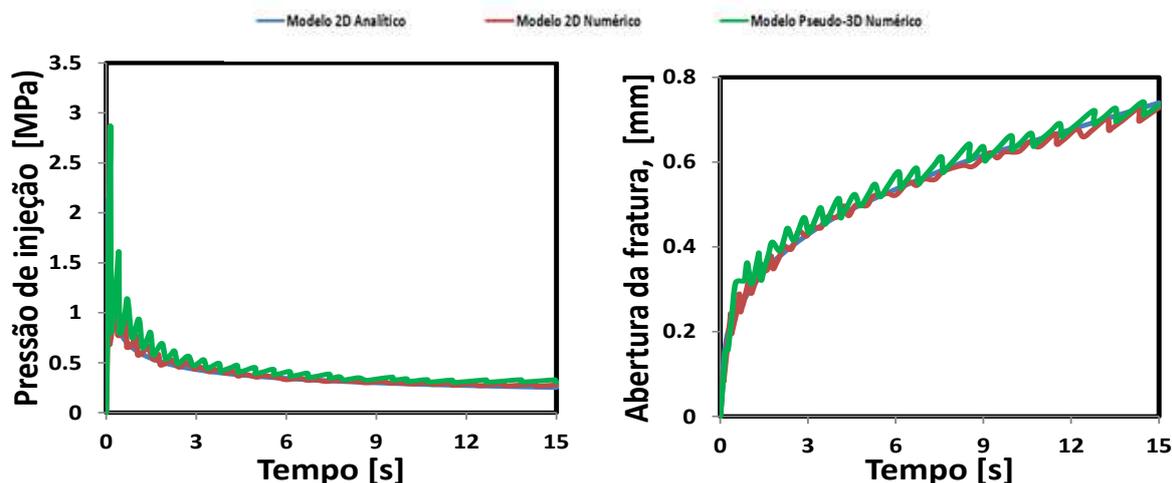


Figura 10: Comparação da evolução da pressão de injeção e da abertura da fratura entre os modelos numérico e analítico.

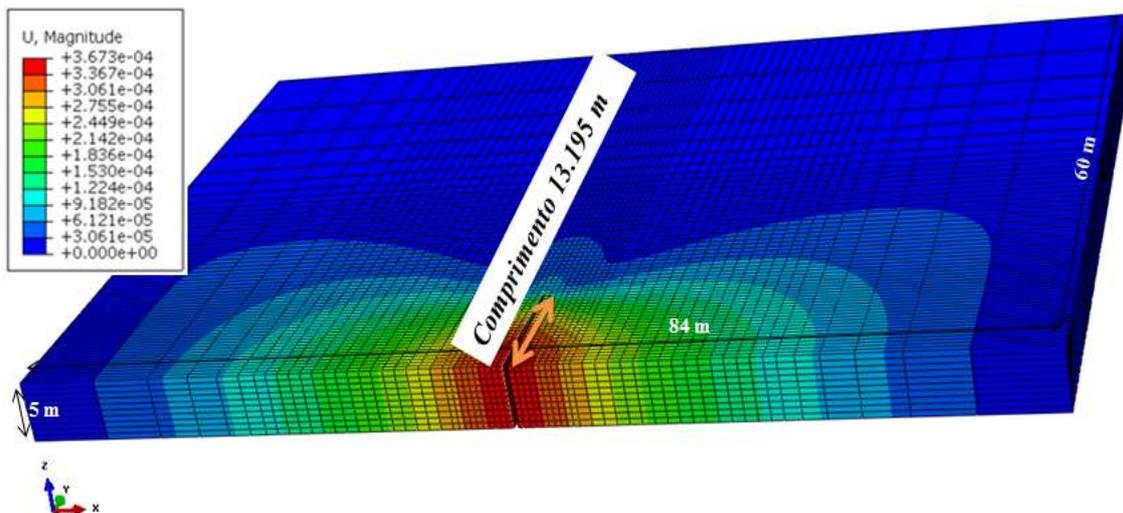


Figura 11: Fraturamento hidráulico no instante $t = 15s$ no modelo numérico 3D.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho tratou da aplicação do método estendido de elementos finitos na investigação da propagação de fraturas induzidas hidraulicamente. Este método representa uma abordagem alternativa da formulação convencional que é particularmente útil para a aproximação de soluções com características irregulares severas em pequenas partes do domínio, como no problema da propagação de fraturas induzidas hidraulicamente. Não há necessidade de coincidir a geometria de elementos com a geometria das fraturas pois estas não são explicitamente modeladas com a técnica dos nós fantasmas, onde um elemento finito seccionado pela fratura é representado por dois novos elementos. A singularidade do campo de tensões é removida pela incorporação do modelo de zona coesiva na região próxima à ponta da fratura.

Nos exemplos aqui considerados, procurou-se comparar resultados de solução analítica com valores aproximados obtidos pelo método de elementos finitos estendido em simulações 2D (estado plano de deformação) e 3D, em termos de evolução com o tempo da pressão de injeção e da abertura da fratura. A concordância foi bastante satisfatória, com oscilações na solução numérica causadas pelo fato, já mencionado, de que a propagação do fraturamento no método de elementos finitos estendido acontece em passos que cruzam todo o elemento finito no programa computacional Abaqus 6.14.

AGRADECIMENTOS

Os dois primeiros autores agradecem ao suporte financeiro fornecido pela agência de fomento à pesquisa CNPq e ao grupo Tecgraf / PUC-Rio, que possibilitaram a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, 2014. ABAQUS Documentation. Version 6.14.

- Adachi, J. I., 2001. Fluid-driven fracture in permeable rock. PhD. Thesis, Univ. of Minnesota, Minneapolis.
- Adachi, J., Siebrits, E., Peirce, A. & Desroches, J. (2007). Computer simulation of hydraulic fractures. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 44: 19.
- Barenblatt, G.I., 1959. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 23:22–36.
- Barenblatt, G.I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics* 7:55–129.
- Béchet E., Minnebo H., Moës N. e Burgardt B., 2005. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64:1033–1056.
- Bunger, A. P., Detournay, E., Garagash, D. I., 2005. Toughness-Dominated Hydraulic Fracture with Leak-Off, *International Journal of Fracture*, vol. 134, pp.175-190
- Carrier B., Granet S., 2012. Numerical Modeling Of Hydraulic Fracture Problem In Permeable Medium Using Cohesive Zone Model, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 79, pp. 312–328
- Detournay, E., Adachi, J., Garagash, D. I., Savitski, A., 2006. Interpretation and Design of Hydraulic Fracturing Treatments, United States Patent No. US 7111681B2
- Dugdale, D.S., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8:100–104.
- Garagash, D. I., Detournay, E., Adachi, J., 2011. Multiscale Tip Asymptotics in Hydraulic Fracture with Leak-Off, *J. Fluid Mech.*, vol. 669, pp. 260–297.
- Geertsma, J. & Klerk, F. (1969). A Rapid Method of Predicting Width and Extent of Hydraulically Induced Fractures. *J. Pet. Technol.* 21: 1571-1581.
- Guangming, Z., Chunming, X., Jiandong, L., Juan, J. & Luhe, S. (2011). Finite element analysis method for horizontal well hydraulic fracturing. *SREE Conference on Engineering Modeling and Simulation* 12: 8.
- Hansbo A e Hansbo P., 2004. A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193:3523 – 3540.
- Laborde P., Pommier J., Renard Y. e Salaün M., 2005. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64:354–381.
- Li, L. C., Tang, C.A, Li, G., Wang, S.G., Liang, Z.Z. & Zhang, Y.B. (2012). Numerical simulation of 3D hydraulic fracturing based on an improved flow-stress-damage model and a parallel FEM technique. *Rock Mech. Rock Eng.* 45: 18.
- Moes N., Dolbow J. e Belytschko T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46: 131–150.
- Papanastasiou, P., 1999. The effective fracture toughness in hydraulic fracturing, *International Journal of Fracture* 96, pp. 127-147.
- Perkins, T. K. & Kern, L.R. (1961). Widths of Hydraulic Fracture. *J. Pet. Sci. Technol.* 89: 937-949.

Rabczuk T., Zi G., Gerstenberger A. e Wall W.A., 2008. A new crack tip element for the phantom node method with arbitrary cohesive cracks. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 75(5): 577-599.

Sarris, E. & Papanastasiou, P. (2012). Modeling of hydraulic fracturing in a poroelastic cohesive formation. *Int. J. Geomech.* 12: 8.

Song, J. H., Areias, P. M. A. e Belytschko, T. , 2006. A method for dynamic crack and shear band propagation with phantom nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67: 868–893.

Yew, C. H., *Mechanics of Hydraulic Fracturing*, Gulf Publishing Company, Houston, TX, 1997.

Zhang, G. M., Liu, H., Zhang, J., Wu, H.A. & Wang, X.X. (2010). Three-dimensional finite element simulation and parametric study for horizontal well hydraulic fracture. *J. Pet. Sci. Eng.:* 8.

Zielonka, M. G., Searles K. H., 2014. Development and validation of fully-coupled hydraulic fracturing simulation capabilities, *Simulia Community Conference*.