



## UMA IMPLEMENTAÇÃO DO MEC SIMÉTRICO DE GALERKIN PARA PROBLEMAS DE ELASTICIDADE 2D

**Hugo Bastos de Sá Bruno** < hbastos@tecgraf.puc-rio.br >

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 22451-900, Rio de Janeiro, Brasil

**André Maués Brabo Pereira** < andremaues@id.uff.br >

Universidade Federal Fluminense, 24210-253, Niterói, Brasil

**Luiz Wrobel** < Luiz.Wrobel@brunel.ac.uk >

Brunel University London, Uxbridge, Middlesex UB8 3PH, London, UK

**Christian Dünser** < duenser@tugraz.at >

Graz University of Technology, 8010, Graz, Austria

**Abstract.** *O Método dos Elementos de Contorno (MEC) pode ser derivado por diferentes metodologias, resultando em implementações computacionais distintas, que se baseiam em reduzir as equações integrais de contorno contínuas em sistemas de equações lineares. A formulação clássica do MEC é conhecida como Método da Colocação, onde se procura satisfazer as equações integrais de contorno de forma forte, diretamente em nós específicos do contorno do modelo, usualmente, os próprios nós de discretização do problema. Em contraste, no Método de Galerkin procura-se satisfazer as equações integrais de contorno de forma fraca. A estratégia utilizada pelo método consiste em aplicar a Técnica de Resíduos Ponderados de Galerkin às equações integrais de contorno, distribuindo-se o erro cometido pela aproximação da melhor forma possível. Pode-se ainda, fazendo uso das equações hipersingulares de contorno, reduzir as equações integrais de contorno a um sistema simétrico de equações lineares. Denomina-se essa estratégia de Método Simétrico de Galerkin. Apresenta-se no trabalho os principais passos para a implementação numérica do MEC Simétrico de Galerkin para problemas de elasticidade linear bidimensional. São apresentadas as estratégias para obtenção do sistema de equações simétrico, construção de uma matriz de rigidez simétrica global e as técnicas utilizadas no cálculo das integrais singulares decorrentes deste método.*

**Keywords:** *Método dos Elementos de Contorno, Método Simétrico de Galerkin, Integrais Singulares, Elasticidade Linear, Matriz de Rigidez*

## 1 INTRODUÇÃO

Entre as alternativas para a implementação numérica do Método dos Elementos de Contorno (MEC), existem duas metodologias clássicas utilizadas na redução das equações integrais de contorno a um sistema de equações algébricas lineares. O procedimento mais utilizado é o chamado Método da Colocação. Neste método, procura-se satisfazer as equações integrais de contorno na forma forte. Usualmente os nós de colocação são os próprios nós de discretização do modelo, ou seja, busca-se satisfazer as equações integrais de contorno apenas nesses nós.

Em contraste ao Método da Colocação, no Método de Galerkin procura-se satisfazer as equações integrais de contorno na forma fraca. A estratégia utilizada por este método consiste na aplicação da Técnica de Resíduos Ponderados de Galerkin às equações integrais de contorno. Utilizando-se as equações hipersingulares ainda é possível reduzir as equações integrais de contorno a um sistema simétrico de equações lineares. Denomina-se essa estratégia Método Simétrico de Galerkin.

Devido à sua formulação variacional, o Método Simétrico de Galerkin preserva algumas outras características atraentes do Método dos Elementos Finitos (MEF). Dentre estas destacam-se, garantia de convergência, estabilidade e estimativa de erro. Vale ressaltar que estas propriedades não são garantidas no Método da Colocação. Por estes e outros motivos, têm-se dado ênfase à formulação e implementação do Método Simétrico de Galerkin para a solução de diversos problemas de engenharia. Outra peculiaridade do método consiste na obtenção de uma matriz de rigidez simétrica. Esta propriedade faz com que este método possa ser acoplado com o MEF de forma eficiente.

Apesar dos métodos baseados em integrais de contorno terem se originados na matemática, a partir da década de 80, o MEC teve grandes progressos, principalmente no campo da engenharia, com diversos trabalhos voltados tanto para formulações como para aplicações. Esses progressos trouxeram a necessidade de provar a consistência desses métodos. Dessa forma, os matemáticos vêm proporcionando diversos avanços em pesquisas sobre o MEC, tirando o máximo de proveito das suas propriedades e características, principalmente nas duas últimas décadas. Por diversas questões, as duas áreas começaram a avançar de forma independente, com certo distanciamento, inclusive com relação às notações utilizadas, de tal maneira que uma área dificilmente tem conseguido absorver os avanços da outra. Portanto, o desenvolvimento deste trabalho tem como uma das principais motivações contribuir no sentido de tornar o MEC Simétrico de Galerkin ainda mais utilizado pela engenharia. Observa-se que este método se apresenta atualmente bem desenvolvido na matemática, com qualidades muito superiores aos MEC clássicos de colocação, e ainda assim vem sendo pouco utilizado e explorado na engenharia.

O MEC Simétrico de Galerkin para problemas de elasticidade tem como característica a combinação do uso das equações integrais de contorno de deslocamento (*single layer*) e das equações hipersingulares de contorno (*double layer*). O uso da equação integral de contorno hipersingular resulta em uma maior complexidade na implementação numérica do método, que corresponde ao cálculo das integrais hipersingulares de contorno. Outros aspectos pertinentes ao método se dão pela montagem do sistema de equações simétrico e pela imposição das condições de contorno que, por sua vez, pode ser realizada de forma mais elegante e natural em comparação ao Método da Colocação.

Apresenta-se no trabalho os principais passos para a implementação numérica do MEC Simétrico de Galerkin para problemas de elasticidade linear bidimensional, com ênfase em elementos lineares (com 2 nós). São apresentadas as estratégias para a obtenção do sistema de equações simétrico, para a construção de uma matriz de rigidez simétrica global, assim como as técnicas utilizadas no cálculo das integrais singulares decorrentes deste método. Os autores testaram diversas metodologias para resolver as integrais singulares, sendo que a estratégia adotada neste artigo é a técnica indicada por Sutradhar et al. (2008), por se apresentar mais interessante para os tipos de problemas abordados e definidos neste trabalho.

## 2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Considerar um domínio  $\Omega$  no  $\mathbb{R}^2$ , como ilustrado na Figura 1, delimitado pela superfície  $\Gamma$ , sujeito a um campo de forças internas de volume  $b_i$ , deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$  em  $\Gamma_u$ , e forças de superfície  $\bar{t}_i$  em  $\Gamma_t$ , com eixos  $x_i$  (com  $i=1,2$  ou  $x,y$  em 2D). As equações de equilíbrio que governam o problema de elasticidade são expressas, em notação indicial, por

$$\sigma_{ij,j} = -b_i \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

onde  $\sigma_{ij}$  são as componentes de tensão, devendo satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_u \\ t &= \bar{t}_i \text{ em } \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.2)$$

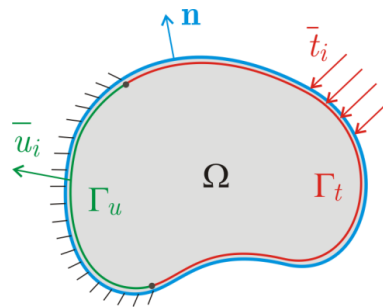


Figura 1. Idealização de um problema de elasticidade plana.

Utilizando-se o Teorema da Reciprocidade de Betti é possível derivar uma equação integral, atendendo às equações de equilíbrio, Eq. (2.1), que relaciona o deslocamento em um ponto  $P=(x_p, y_p)$ , no domínio, devido à forças de superfície e deslocamentos em um ponto  $Q=(x_Q, y_Q)$ , no contorno. Na ausência de forças internas de volume a equação integral fica definida apenas no contorno do problema, podendo ser escrita como

$$u_i(P) = \int_{\Gamma} G_{ij}^{uu}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{ut}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (2.3)$$

Os deslocamentos e forças de superfície fundamentais, denotados por  $G_{ij}^{uu}$  e  $G_{ij}^{ut}$ , respectivamente, estão relacionados com o uso da solução fundamental de Kelvin na formulação da equação integral de contorno. Considerando um estado plano de deformações, as soluções fundamentais são dadas por

$$G_{ij}^{uu}(P, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.4)$$

$$G_{ij}^{ut}(P, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu) (n_i r_{,j} - n_k r_{,j}) \right] \quad (2.5)$$

onde  $\nu$  e  $\mu$  são, respectivamente, o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade transversal do material,  $n_j$  são as componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$  no ponto  $Q$  e  $r$  é a distância entre um ponto fonte  $P$  e um ponto campo  $Q$ .

Utilizando-se as leis constitutivas, que permitem relacionar o campo de tensões com o campo de deslocamentos, é possível ainda, a partir da Eq. (2.3), derivar uma equação integral de contorno que relaciona as tensões em um ponto  $P$  no domínio com os deslocamentos e forças de superfície em um ponto  $Q$  no contorno. Reescrevendo-se as componentes de tensão em termos de forças de superfícies  $t_i$ , de acordo com  $t_i = \sigma_{ij} m_j$ , onde  $m_j$  são as componentes do vetor normal  $\mathbf{m}$  no ponto fonte  $P$ , chega-se a equação integral de contorno em termos das forças de superfície

$$t_i(P) = \int_{\Gamma} G_{ij}^{tu}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{tt}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad (2.6)$$

que atuam sobre um elemento de superfície interno ou externo de um corpo, onde

$$G_{ij}^{tu}(P, Q) = G_{ji}^{ut}(P, Q) \quad (2.7)$$

$$G_{ij}^{tt}(P, Q) = \frac{G}{(1-\nu)2\pi r^2} \left( \delta_{ij} \delta_{kw} + \delta_{ki} \delta_{jw} - \delta_{jk} \delta_{iw} + 2\delta_{jk} r_{,i} r_{,w} + 2\delta_{iw} r_{,j} r_{,k} - 8r_{,i} r_{,w} r_{,j} r_{,k} \right) m_{,k} n_{,w} \quad (2.8)$$

As Eqs (2.3) e (2.6) são equações definidas no interior do domínio do problema. Devido ao tratamento das integrais singulares ser realizado através de um processo limite, onde os pontos de aplicação são deslocados para fora do domínio, torna-se necessário obter-se equações integrais definidas no exterior do domínio. Essas equações, denominadas de equações integrais do exterior, são representadas pelas seguintes expressões

$$\int_{\Gamma} G_{ij}^{uu}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{ut}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma = 0 \quad (2.9)$$

$$\int_{\Gamma} G_{ij}^{tu}(P, Q) t_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{tt}(P, Q) u_j(Q) d\Gamma = 0 \quad (2.10)$$

É importante notar que tanto as equações do interior, Eqs (2.3) e (2.6), quanto as equações do exterior, Eqs (2.9) e (2.10), não são válidas na situação em que o ponto fonte pertence ao contorno do problema. Isso se deve ao fato de que, devido à singularidade das funções de Green, na situação em que  $P=Q$ , as integrais não são imediatamente bem definidas. Em geral, as integrais impróprias com singularidade forte, presentes nas Eqs (2.3) e (2.9), podem ser avaliadas no sentido do valor principal de Cauchy. Já as integrais hipersingulares, das Eqs (2.6) e (2.10), podem ser obtidas no sentido da parte finita de Hadamard. Alternativamente, no presente trabalho as integrais singulares são definidas através de um limite ao contorno (Gray, 1998). Logo, a definição das Eqs (2.3) e (2.6), na situação em que  $P \in \Gamma$ , ficam descritas pelos seguintes limites

$$u_i(P) = \lim_{P_I \rightarrow P} \left[ \int_{\Gamma} G_{ij}^{uu}(P_I, Q) t_i(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{ut}(P_I, Q) u_i(Q) d\Gamma \right] \quad (2.11)$$

$$t_i(P) = \lim_{P_I \rightarrow P} \left[ \int_{\Gamma} G_{ij}^{tu}(P_I, Q) t_i(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{tt}(P_I, Q) u_i(Q) d\Gamma \right] \quad (2.12)$$

onde  $P_I$  é um ponto no interior do domínio.

Analogamente, as Eqs. (2.9) e (2.10) são definidas como

$$\lim_{P_E \rightarrow P} \left[ \int_{\Gamma} G_{ij}^{uu}(P_E, Q) t_i(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{ut}(P_E, Q) u_i(Q) d\Gamma \right] = 0 \quad (2.13)$$

$$\lim_{P_E \rightarrow P} \left[ \int_{\Gamma} G_{ij}^{tu}(P_E, Q) t_i(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ij}^{tt}(P_E, Q) u_i(Q) d\Gamma \right] = 0 \quad (2.14)$$

onde  $P_E$  é um ponto exterior ao domínio.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO SIMÉTRICO DE GALERKIN

A solução numérica para o problema apresentado nas Eqs (2.1) e (2.2), utilizando-se as equações integrais de contorno das Eqs (2.13) e (2.14), pode ser obtida dividindo-se o contorno do problema em um conjunto de elementos. Em cada elemento de contorno, a geometria, o campo de deslocamentos e as forças de superfície são aproximados pela interpolação de seus valores nodais.

Um elemento linear é definido por dois nós  $e = \{Q_1, Q_2\}$ . Considerando uma interpolação linear para a geometria do problema, sua parametrização pode ser expressa por

$$\begin{aligned} x(\xi) &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \\ y(\xi) &= N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $x_1, x_2, y_1, y_2$  são as coordenadas dos nós de um elemento, enquanto que  $N_1(\xi)$  e  $N_2(\xi)$  são funções de forma ( $0 < \xi < 1$ ), dadas por

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \xi \\ N_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (3.2)$$

Empregando-se a formulação isoparamétrica, o campo de deslocamentos e as forças de superfície são interpolados pelas mesmas funções de forma da geometria do problema, ou seja

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x(\xi) \\ u_y(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x^{(1)} \\ u_y^{(1)} \\ u_x^{(2)} \\ u_y^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}_e \quad (3.3)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x(\xi) \\ t_y(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x^{(1)} \\ t_y^{(1)} \\ t_x^{(2)} \\ t_y^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{t}_e \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{u}_e$  e  $\mathbf{t}_e$  representam, respectivamente, os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície nas extremidades de um elemento.

Fazendo-se uso das parametrizações das Eqs (3.1), (3.3) e (3.4), é possível reescrever as equações integrais de contorno das Eqs (2.13) e (2.14) como um somatório finito das integrais em cada um dos elementos de contorno

$$R^1(P) = \sum_{e=1}^M \left[ \begin{array}{l} \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \mathbf{G}^{uu}(P_E, Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_e d\xi \right) \mathbf{t}_e \dots \\ - \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \mathbf{G}^{ut}(P_E, Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_e d\xi \right) \mathbf{u}_e \end{array} \right] \neq 0 \quad (3.5)$$

$$R^2(P) = \sum_{e=1}^M \left[ \begin{array}{l} \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \mathbf{G}^{tu}(P_E, Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_e d\xi \right) \mathbf{t}_e \dots \\ - \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \mathbf{G}^{tt}(P_E, Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_e d\xi \right) \mathbf{u}_e \end{array} \right] \neq 0 \quad (3.6)$$

onde  $R^1(P)$  e  $R^2(P)$  são, respectivamente, os resíduos das equações integrais de contorno relacionados ao erro introduzido pela aproximação utilizada, enquanto que  $J_e$  é o jacobiano da transformação das variáveis e  $M$  é o número de elementos de contorno da discretização do problema.

Aplicando-se a Técnica de Resíduo Ponderado de Galerkin é possível determinar o sistema de equações lineares que permite obter os valores nodais das variáveis do problema. O Método de Galerkin impõe que

$$\int_{\Gamma} w(P) R^1(P) d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\Gamma} w(P) R^2(P) d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

onde  $w$  é uma função peso que será aproximada pelas mesmas funções de forma utilizadas na parametrização dos campos das variáveis, ou seja

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_x(\eta) \\ w_y(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\eta) & 0 & N_2(\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\eta) & 0 & N_2(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x^{(1)} \\ w_y^{(1)} \\ w_x^{(2)} \\ w_y^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(\eta) \mathbf{w}_e \quad (3.9)$$

Reescrevendo-se as Eqs (3.7) e (3.8) em termos das parametrizações das Eqs (3.3), (3.4) e (3.9), obtêm-se

$$\mathbf{w}_{eP} \sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left[ \begin{array}{c} \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{uu} (P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{t}_{eQ} \dots \\ - \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{ut} (P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{u}_{eQ} \end{array} \right] = 0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{w}_{eP} \sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left[ \begin{array}{c} \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{tu} (P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{t}_{eQ} \dots \\ - \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{tt} (P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{u}_{eQ} \end{array} \right] = 0 \quad (3.11)$$

onde  $eP$  e  $eQ$  denotam, respectivamente, um elemento fonte e um elemento campo,  $\mathbf{t}_{eQ}$  e  $\mathbf{u}_{eQ}$  são, respectivamente, os valores nodais das forças de superfície e deslocamentos em um elemento campo, enquanto que  $J_{eP}$  e  $J_{eQ}$  são, respectivamente, os jacobianos da transformação no elemento fonte e no elemento campo e  $\mathbf{w}_{eP}$  são os valores nodais da função peso no elemento fonte.

Notando-se que o Método de Galerkin impõe que a função peso seja não nula, é possível ainda cancelar o termo ao lado esquerdo das Eqs (3.10) e (3.11), resultando nas seguintes relações

$$\sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{I}^{uu}(\xi, \eta) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{t}_{eQ} = \sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{I}^{ut}(\xi, \eta) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{u}_{eQ} \quad (3.12)$$

$$\sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{I}^{tu}(\xi, \eta) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{t}_{eQ} = \sum_{eP=1}^M \sum_{eQ=1}^M \left( \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{I}^{tt}(\xi, \eta) J_{eP} J_{eQ} d\xi d\eta \right) \mathbf{u}_{eQ} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{uu}(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{uu}(P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi); & \mathbf{I}^{ut}(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{ut}(P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) \\ \mathbf{I}^{tu}(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{tu}(P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi); & \mathbf{I}^{tt}(\xi, \eta) &= \mathbf{N}^T(\eta) \mathbf{G}^{tt}(P_E(\eta), Q(\xi)) \mathbf{N}(\xi) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Colocando as Eqs (3.12) e (3.13) na forma matricial, tem-se, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} & \mathbf{R}_{ut}^{uu} \\ \mathbf{R}_{tu}^{uu} & \mathbf{R}_{tt}^{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{t}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{ut} & \mathbf{R}_{ut}^{ut} \\ \mathbf{R}_{tu}^{ut} & \mathbf{R}_{tt}^{ut} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} \mathbf{t}_u + \mathbf{R}_{ut}^{uu} \bar{\mathbf{t}}_t = \mathbf{R}_{uu}^{ut} \bar{\mathbf{u}}_u + \mathbf{R}_{ut}^{ut} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{R}_{tu}^{uu} \mathbf{t}_u + \mathbf{R}_{tt}^{uu} \bar{\mathbf{t}}_t = \mathbf{R}_{tu}^{ut} \bar{\mathbf{u}}_u + \mathbf{R}_{tt}^{ut} \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{tu} & \mathbf{R}_{ut}^{tu} \\ \mathbf{R}_{tu}^{tu} & \mathbf{R}_{tt}^{tu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{t}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{tt} & \mathbf{R}_{ut}^{tt} \\ \mathbf{R}_{tu}^{tt} & \mathbf{R}_{tt}^{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \cdot \cdot \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{tu} \mathbf{t}_u + \mathbf{R}_{ut}^{tu} \bar{\mathbf{t}}_t = \mathbf{R}_{uu}^{tt} \bar{\mathbf{u}}_u + \mathbf{R}_{ut}^{tt} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{R}_{tu}^{tu} \mathbf{t}_u + \mathbf{R}_{tt}^{tu} \bar{\mathbf{t}}_t = \mathbf{R}_{tu}^{tt} \bar{\mathbf{u}}_u + \mathbf{R}_{tt}^{tt} \mathbf{u}_t \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

onde  $\mathbf{t}_u$  e  $\mathbf{u}_t$  são, respectivamente, valores nodais das forças de superfície e dos deslocamentos a serem determinados, enquanto que  $\bar{\mathbf{t}}_t$  e  $\bar{\mathbf{u}}_u$  são os valores nodais prescritos.

As submatrizes  $\mathbf{R}$ , das Eqs (3.15) e (3.16), são obtidas pelo cálculo das integrais da Eqs (3.12) e (3.13). Os sub-índices de cada submatriz indicam o local do contorno no qual as integrais foram calculadas. O sub-índice  $u$  refere-se a parcela do contorno em que são conhecidos os deslocamentos, enquanto que o sub-índice  $t$  refere-se a parcela do contorno

em que são conhecidas as forças de superfície. O primeiro sub-índice refere-se ao local de integração do elemento fonte, enquanto que o segundo refere-se ao elemento campo. Os super-índices, por sua vez, indicam a função de Green envolvida no cálculo da integral. Assim, por exemplo, a submatriz  $\mathbf{R}_{uu}^{uu}$  é obtida pelo cálculo das integrais envolvendo a função de Green da Eq. (2.4) onde ambos os elementos, fonte e campo, pertencem a parcela do contorno onde os deslocamentos são conhecidos.

Observa-se que o sistema linear apresentado na Eq. (3.15) é suficiente para determinação das incógnitas do problema. Reorganizando-se o sistema de forma que os valores conhecidos sejam dispostos do lado direito da igualdade, e os desconhecidos do lado esquerdo, as incógnitas podem ser determinadas pela solução do seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} & -\mathbf{R}_{ut}^{ut} \\ \mathbf{R}_{tu}^{uu} & -\mathbf{R}_{tt}^{ut} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{ut} & -\mathbf{R}_{ut}^{uu} \\ \mathbf{R}_{tu}^{ut} & -\mathbf{R}_{tt}^{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \bar{\mathbf{t}}_t \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

A solução do problema através do sistema da Eq. (3.17) consiste no Método dos Elementos de Contorno de Galerkin. Vale ressaltar que, nesse caso, o cálculo das integrais envolvem termos com singularidades do tipo  $\log(r)$  (singularidade fraca) e  $r^{-1}$  (singularidade forte). O tratamento das integrais singulares pode ser realizado numericamente através de esquemas especiais de integração que envolvem transformações de coordenadas apropriadas, vide (Parreira & Guiggiani, 1989). Contudo, observa-se que o sistema da Eq. (3.17) preserva as mesmas características indesejáveis do Método da Colocação, ou seja, é denso e não simétrico.

Por outro lado, o Método dos Elementos de Contorno Simétrico de Galerkin consiste na utilização de ambos os sistemas das Eqs (3.15) e (3.16). Conjuntamente, os dois sistemas proporcionam o dobro de equações necessárias à resolução do problema. Assim, uma vez que ambos os sistemas de equações são válidos, e possuem as mesmas incógnitas, pode-se escolher um número suficiente de equações para a construção de um novo sistema para a resolução do problema. A construção desse novo sistema é realizada estrategicamente de forma que o sistema resultante seja simétrico. Basicamente a estratégia consiste na utilização da primeira linha da Eq. (3.15), em conjunto com a segunda linha da Eq. (3.16), ou seja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} & \mathbf{R}_{ut}^{uu} \\ \mathbf{R}_{tu}^{tu} & \mathbf{R}_{tt}^{tu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \bar{\mathbf{t}}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{ut} & \mathbf{R}_{ut}^{ut} \\ \mathbf{R}_{tu}^{tt} & \mathbf{R}_{tt}^{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \mathbf{u}_t \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Reorganizando-se o sistema da mesma forma como anteriormente, tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} & -\mathbf{R}_{ut}^{ut} \\ -\mathbf{R}_{tu}^{tu} & \mathbf{R}_{tt}^{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{ut} & -\mathbf{R}_{ut}^{uu} \\ -\mathbf{R}_{tu}^{tt} & \mathbf{R}_{tt}^{tu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \bar{\mathbf{t}}_t \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Observando-se a seguinte simetria das funções de Green

$$G_{ij}^{uu}(P, Q) = G_{ji}^{uu}(Q, P); \quad G_{ij}^{tt}(P, Q) = G_{ji}^{tt}(Q, P); \quad G_{ij}^{ut}(P, Q) = G_{ji}^{tu}(Q, P) \quad (3.20)$$

é possível reescrever o sistema da Eq. (3.19), tornando explícita a simetria do sistema, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{uu} & -\mathbf{R}_{ut}^{ut} \\ -\mathbf{R}_{ut}^{ut}{}^T & \mathbf{R}_{tt}^{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_u \\ \mathbf{u}_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}^{ut} & -\mathbf{R}_{ut}^{uu} \\ -\mathbf{R}_{tu}^{tt} & \mathbf{R}_{tt}^{tu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_u \\ \bar{\mathbf{t}}_t \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$



## 4 INTEGRAIS SINGULARES

O maior contratempo na implementação do Método dos Elementos de Contorno Simétrico de Galerkin se dá pelo cálculo das integrais singulares, principalmente aquelas envolvendo termos com singularidades do tipo  $r^{-2}$  (hipersingularidade). Neste trabalho, o cálculo das integrais singulares é realizado através de um método semi-analítico, descrito em (Sutradhar et al., 2008). Uma das vantagens desta técnica consiste no cancelamento exato de termos divergentes resultantes das integrais hipersingulares. Em contraste, os métodos numéricos existentes realizam o cancelamento através da aproximação dos termos divergentes e, portanto, são propensos a erros de aproximação.

Neste processo considera-se um deslocamento, de valor simbólico  $\varepsilon$ , do elemento fonte numa direção normal para fora do contorno. Uma vez desenvolvidas as expressões para essa situação, o cálculo analítico das integrais pode ser desenvolvido. Após a determinação das soluções analíticas toma-se o limite deste deslocamento tendendo a zero. A Figura 2 demonstra, geometricamente, o deslocamento do elemento fonte para fora do contorno. Primeiramente na situação de elementos coincidentes e por último no caso de elementos adjacentes. Uma importante consequência da aplicação desta técnica implica na utilização da equação integral de contorno do exterior. A aplicação da equação do exterior se torna válida uma vez que os pontos de aplicação da equação são deslocados para fora do contorno, ou seja, fora do domínio do problema.

O desenvolvimento da técnica é demonstrado apenas para as integrais hipersingulares, que envolvem a função de Green da Eq. (2.8), distintamente para o caso de elementos coincidentes e adjacentes. As demais integrais singulares, envolvendo as funções de Green das Eqs (2.4) e (2.5), podem ser analisadas de forma semelhante com desenvolvimento ainda mais simples. Utilizando-se uma ferramenta de computação simbólica, o cálculo analítico das integrais e dos limites podem ser realizados de maneira simples e rápida. Neste trabalho as soluções analíticas foram obtidas através de rotinas implementadas na plataforma *MuPAD*, integrante do software *Matlab*.

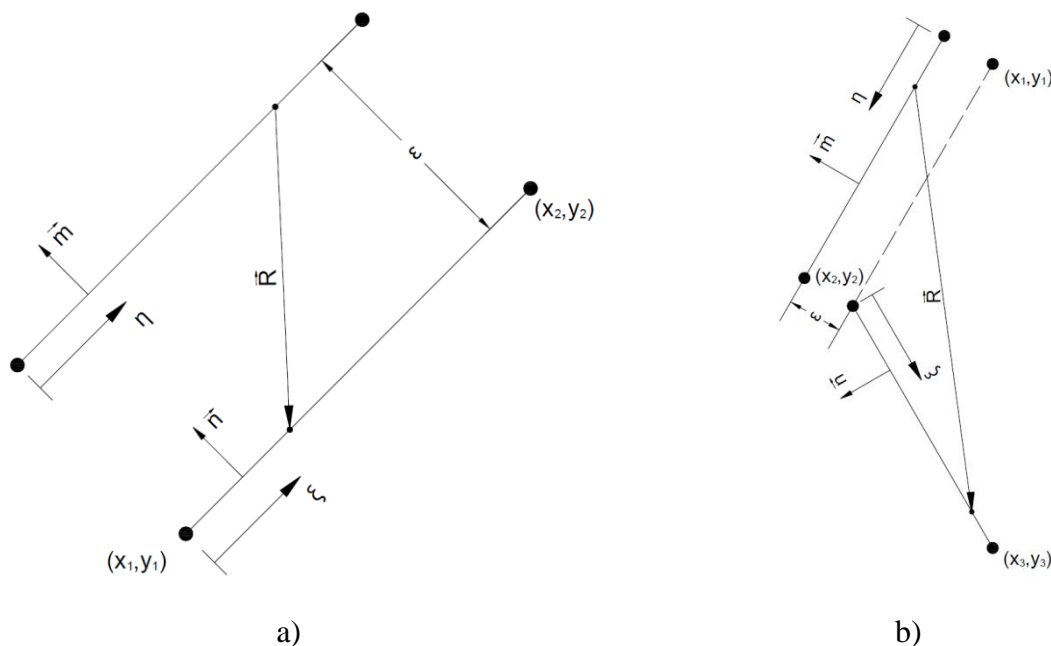


Figura 2. Deslocamento simbólico do elemento fonte. a) Caso coincidente. b) Caso adjacente.

## 4.1 Elementos Coincidentes

Para a construção das expressões a serem integradas, primeiramente se torna necessária a determinação do vetor  $\mathbf{R}$ , que liga um ponto  $Q$ , pertencente ao elemento campo, a um ponto  $P$ , pertencente ao elemento fonte.

Deslocando-se o elemento fonte para fora do contorno por uma distância  $\varepsilon$  obtêm-se as novas coordenadas através da seguinte expressão

$$P_E(\eta) = P(\eta) + \varepsilon \mathbf{m} \quad (4.1)$$

Dessa forma, o vetor  $\mathbf{R}$  pode ser escrito como

$$\mathbf{R}(\xi, \eta) = Q(\xi) - P_E(\eta) \quad (4.2)$$

e o valor da distância  $r$  fica definido pelo seu módulo, ou seja

$$r(\xi, \eta) = \|\mathbf{R}(\xi, \eta)\| = \|Q(\xi) - P_E(\eta)\| = \sqrt{(\eta - \xi)^2 L_p^2 + \varepsilon^2} \quad (4.3)$$

Outra expressão importante se dá pelas derivadas do vetor  $\mathbf{R}$ , em respeito às coordenadas cartesianas,  $x$  e  $y$ . Estes termos podem ser reescritos parametricamente como

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{L(\eta - \xi) \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha}{\sqrt{L^2(\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2}}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{L(\eta - \xi) \sin \alpha - \varepsilon \cos \alpha}{\sqrt{L^2(\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2}}; \quad (4.4)$$

onde  $\alpha$  representa o ângulo de inclinação do elemento em relação ao eixo de coordenadas cartesianas.

A integral hipersingular corresponde ao cálculo das integrais que contêm a solução fundamental apresentada na Eq (2.8). A solução analítica das integrais hipersingulares, através da técnica proposta, leva a expressões que contêm termos divergentes, não sendo possível definir propriamente o seu valor. Contudo, será demonstrado adiante que este termo é devidamente cancelado na etapa da imposição das condições de contorno através da consideração da continuidade do campo de variáveis do problema. No caso de problemas de elasticidade, o cancelamento dos termos divergentes é realizado através da consideração da continuidade do campo de deslocamentos, característica compatível com a Teoria da Elasticidade.

A primeira integral investigada corresponde a primeira componente do tensor da solução fundamental em questão, ou seja

$$G_{xx}^n(P, Q) = \frac{\mu}{(1-\nu)2\pi} (I_1(P, Q) + I_2(P, Q)) \quad (4.5)$$

onde

$$I_1(P, Q) = \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 N_i(\eta) \left( 2 - 8 \frac{\partial r^2}{\partial x} \right) \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{r^4} N_j(\xi) d\xi d\eta \quad (4.6)$$

$$I_2(P, Q) = \lim_{P_E \rightarrow P} \int_0^1 \int_0^1 N_i(\eta) \left\{ \frac{1}{r^2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{\partial r^2}{\partial x} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - 2n_y m_y \right] \right\} N_j(\xi) d\xi d\eta \quad (4.7)$$

com  $i = 1, 2$ .

Utilizando-se as expressões das Eqs (4.1)-(4.7) as integrais das Eqs (4.6) e (4.7) podem ser reescritas parametricamente como

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 N_i(\eta) \left\{ \left[ 2 - 8 \frac{(L(\eta - \xi) \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2}{L^2 (\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2} \right] \frac{L^2 \varepsilon^2}{(L^2 (\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2)^2} \right\} N_j(\xi) d\xi d\eta \quad (4.8)$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^1 N_i(\eta) \frac{L^2}{L^2 (\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2} \left[ L^2 \left( 1 + 2 \frac{(L(\eta - \xi) \cos \alpha + \varepsilon \sin \alpha)^2}{L^2 (\eta - \xi)^2 + \varepsilon^2} \right) \dots \right. \\ \left. - 2m_y n_y \right] N_j(\xi) d\xi d\eta \quad (4.9)$$

Desenvolvendo-se as integrais e tomando-se o limite, obtêm-se as seguintes soluções

$$\frac{G}{(1-\nu)2\pi} \left( -\ln(L) + 2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \ln(\varepsilon), \quad i = j \\ \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \left( -\frac{1}{2} \right), \quad i \neq j \quad (4.10)$$

onde evidencia-se o termo divergente.

As integrais singulares para os termos restantes do tensor podem ser obtidas de maneira similar. Logo, para as integrais que contêm as componentes  $G''_{xy}$  e  $G''_{yx}$ , obtêm-se

$$\frac{G}{(1-\nu)2\pi} (2 \cos \alpha \sin \alpha) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \ln(\varepsilon), \quad i = j \\ 0, \quad i \neq j \quad (4.11)$$

e para a componente  $G''_{yy}$

$$\frac{G}{(1-\nu)2\pi} \left( -\ln(L) + 2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \ln(\varepsilon), \quad i = j \\ \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \left( -\frac{1}{2} \right), \quad i \neq j \quad (4.12)$$

## 4.2 Elementos Adjacentes

A abordagem para o caso de elementos adjacentes, em contraste ao caso coincidente, se baseia em um método semi-analítico. Isso se deve ao fato de que as expressões obtidas para o caso adjacente são muito mais extensas, em comparação com o caso coincidente, resultando em integrais de difícil solução analítica. O ponto principal desta abordagem se dá pela transformação das coordenadas paramétricas em coordenadas polares, de modo que as expressões resultantes sejam mais simples de serem integradas.

É importante ressaltar que existem dois casos de integrais adjacentes a serem analisados. O primeiro caso ocorre quando o elemento campo está a frente do elemento fonte, segundo a orientação modelo. O segundo se dá quando o elemento fonte está a frente do elemento campo. Ambos os casos podem ser tratados de forma similar, devendo-se apenas atentar para

uma alteração de sinal devido a orientação contrária. Portanto, de forma resumida, é demonstrado apenas o desenvolvimento considerando-se o primeiro caso.

O primeiro passo da transformação de coordenadas se dá com a determinação de duas coordenadas paramétricas que têm sua origem no ponto de singularidade no domínio de integração. Esse passo consiste na simples alteração da orientação de uma das variáveis paramétrica, ou seja

$$\omega = 1 - \eta \quad (4.13)$$

A transformação das coordenadas paramétricas para coordenadas polares é obtida por

$$\omega = \rho \cos(\theta) \quad (4.14)$$

$$\xi = \rho \sin(\theta) \quad (4.15)$$

Uma vez obtida a transformação, é possível escrever o vetor da distância entre dois pontos, um pertencente ao elemento fonte e outro ao elemento campo, como

$$\mathbf{R}(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} a_x \rho - \varepsilon N_1 \\ a_y \rho - \varepsilon N_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

e seu módulo por

$$r(\rho, \theta) = \|\mathbf{R}(\rho, \theta)\| = \sqrt{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2} \quad (4.17)$$

onde

$$a_x = (x_2 - x_1) \cos(\theta) + (x_3 - x_2) \sin(\theta) \quad (4.18)$$

$$a_y = (y_2 - y_1) \cos(\theta) + (y_3 - y_2) \sin(\theta) \quad (4.19)$$

$$a_1 = -2(a_x m_x + a_y m_y); \quad a_2 = a_x^2 + a_y^2; \quad (4.20)$$

Em adição a essas expressões, faz-se necessário a determinação dos seguintes termos que aparecem nas soluções fundamentais de elasticidade

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{a_x \rho - \varepsilon m_x}{\sqrt{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2}}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{a_y \rho - \varepsilon m_y}{\sqrt{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2}}; \quad (4.21)$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{R} = \alpha_p \rho - J_p \varepsilon; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = \alpha_Q \rho - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{J_p} \varepsilon; \quad (4.22)$$

sendo

$$\alpha_p = m_x a_x + m_y a_y; \quad \alpha_Q = n_x a_x + n_y a_y; \quad (4.23)$$

onde  $J_p$  e  $J_Q$  são, respectivamente, os jacobianos das transformações paramétricas no elemento fonte e no elemento campo.

A transformação das coordenadas paramétricas para coordenadas polares é ilustrada na Figura 3, onde se representa o domínio de integração no espaço paramétrico.

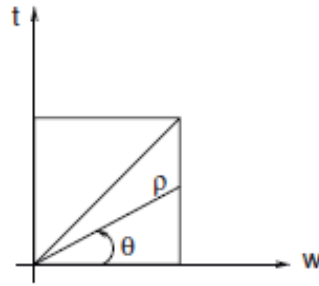


Figura 3. Domínio de integração no espaço paramétrico.

Uma forma apropriada para a descrição das integrais, no espaço das coordenadas polares, pode ser feita subdividindo-se o domínio de integração em dois triângulos, como ilustrado na Figura 3. Observando-se os limites de integração de cada subdivisão é possível reescrever a integral dupla como somatório das seguintes integrais

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\csc(\theta)} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sec(\theta)} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (4.24)$$

Como consequência da transformação, a singularidade da integral fica em função de apenas uma das variáveis. Observando-se o esquema da Figura 3, pode-se notar que o ponto de singularidade se localiza na origem das coordenadas paramétricas. Portanto, no caso das coordenadas polares, a singularidade depende somente da variável  $\rho$ , tornando a singularidade independente da variável  $\theta$ . Essa propriedade possibilita a utilização do método semi-analítico, ou seja, as integrais com respeito a  $\rho$ , que demandam um maior cuidado, são calculadas analiticamente. Já as integrais com respeito à variável  $\theta$ , são consideradas regulares e, portanto, podem ser calculadas através de uma simples Quadratura de Gauss.

A seguir são demonstrados os resultados para as integrais analíticas com respeito a variável  $\rho$ . Nota-se que é necessário apenas o cálculo de uma das integrais analíticas, uma vez que o limite de integração pode ser substituído ao final da solução. Assim, de forma generalizada, serão demonstrados os resultados para integrais com limite de integração simbólico, ou seja

$$\int_0^{S_\rho} f(\rho, \theta) \rho d\rho \quad (4.25)$$

onde  $S_\rho$  é um valor simbólico que deverá ser substituído pelo limite de integração correspondente a cada integral.

Assim como no caso de elementos coincidentes, o cálculo analítico da integral hipersingular resulta em soluções contendo termos divergentes. Contudo, como mencionado anteriormente, o cancelamento dos termos divergentes é realizado na etapa de imposição das condições de contorno, sendo suficiente, por ora, demonstrar as soluções em sua forma imprópria.

A primeira integral analisada corresponde a primeira componente do tensor da solução fundamental da Eq. (2.8), sendo sua expressão dada pelas Eqs (4.5)-(4.7). Utilizando-se as expressões das Eqs (4.13)-(4.23) as integrais das Eqs (4.6) e (4.7) podem ser reescritas em termos de coordenadas polares como

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta} \int_{\rho} N_i(\rho, \theta) \left\{ \left( 2 - 8 \frac{(a_x \rho - \varepsilon m_x)^2}{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2} \right) \left[ \frac{(\alpha_p \rho - \varepsilon)(\alpha_Q \rho - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \varepsilon)}{(a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2)^2} \right] \right\} N_j(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \quad (4.26)$$

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta} \int_{\rho} N_i(\rho, \theta) \left\{ \frac{1}{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{(a_x \rho - \varepsilon m_x)^2}{a_2 \rho^2 + a_1 \rho \varepsilon + \varepsilon^2} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) - 2m_y n_y \right] \right\} N_j(\rho, \theta) \rho d\rho \quad (4.27)$$

Desenvolvendo-se as integrais, analiticamente, com respeito à variável  $\rho$  e coletando-se as soluções de acordo com a expressão da Eq (4.5), obtêm-se

Para  $i = 1$  e  $j = 1$

$$\frac{S_\rho \left( 4 \cos \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta \right) \left( a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_y m_y + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_x^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x^2 \right)}{4a_2^3} \quad (4.28)$$

Para  $i = 1$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho^2 \cos \theta \sin \theta \left( a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_y m_y + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_x^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x^2 \right)}{2a_2^3} \quad (4.29)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 1$

$$(\dots) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{2\alpha_Q \alpha_p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} (2a_x^2 - a_2) + 2n_y m_y a_2}{a_2^2} \right) \ln(\varepsilon) \quad (4.30)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho \left( 4 \sin \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta \right) \left( a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_y m_y + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_x^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x^2 \right)}{4a_2^3} \quad (4.31)$$

onde a parte finita da expressão da Eq. (4.30), denotada por  $(\dots)$ , foi omitida por ser muito extensa.

As integrais hipersingulares restantes podem ser obtidas de forma similar. Para o caso das integrais que envolvem as componentes  $G_{xy}''$  e  $G_{yx}''$ , obtêm-se os seguintes resultados

Para  $i = 1$  e  $j = 1$

$$\frac{S_\rho \left( 4 \cos \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta \right) \left( a_2^2 (n_y m_x + n_x m_y) + 2a_2 a_x a_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x a_y \right)}{4a_2^3} \quad (4.32)$$

Para  $i = 1$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho^2 \cos \theta \sin \theta \left( a_2^2 (n_y m_x + n_x m_y) + 2a_2 a_x a_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x a_y \right)}{2a_2^3} \quad (4.33)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 1$

$$(\dots) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{8\alpha_Q \alpha_p a_x a_y - (n_y m_x + n_x m_y) a_2^2 - (2a_x a_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) a_2}{a_2^3} \right] \ln(\varepsilon) \quad (4.34)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho (4 \sin \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta) (a_2^2 (n_y m_x + n_x m_y) + 2a_2 a_x a_y \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_x a_y)}{4a_2^3} \quad (4.35)$$

E para a integral envolvendo a componente  $G_{yy}''$

Para  $i = 1$  e  $j = 1$

$$\frac{S_\rho (4 \cos \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta) (a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_x m_x + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_y^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_y^2)}{4a_2^3} \quad (4.36)$$

Para  $i = 1$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho^2 \cos \theta \sin \theta (a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_x m_x + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_y^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_y^2)}{2a_2^3} \quad (4.37)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 1$

$$(\dots) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{2\alpha_Q \alpha_p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} (2a_y^2 - a_2) + 2n_x m_x a_2}{a_2^2} \right) \ln(\varepsilon) \quad (4.38)$$

Para  $i = 2$  e  $j = 2$

$$\frac{S_\rho (4 \sin \theta - 2S_\rho \cos \theta \sin \theta) (a_2^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 2a_2^2 n_x m_x + 2a_2 \alpha_Q \alpha_p + 2a_2 a_y^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} - 8\alpha_Q \alpha_p a_y^2)}{4a_2^3} \quad (4.39)$$

Por fim, resta demonstrar que é possível cancelar as partes divergentes das integrais hipersingulares coincidentes e adjacentes. Para tanto, resta ainda determinar a solução analítica completa dos termos divergentes que surgem do cálculo das integrais hipersingulares adjacentes. A solução completa pode ser obtida integrando-se os termos divergentes com respeito a coordenada  $\theta$ . Logo, para o termo da Eq. (4.30), a integral restante, com respeito a  $\theta$ , pode ser determinada analiticamente resultando em

$$\frac{G}{(1-\nu)2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{2\alpha_Q \alpha_p + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} (2a_x^2 - a_2) + 2n_y m_y a_2}{a_2^2} \right) \ln(\varepsilon) d\theta = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G}{(1-\nu)2\pi} \ln(\varepsilon) \quad (4.40)$$

Analogamente, para os termos divergentes das Eqs (4.34) e (4.38) as integrais podem ser calculadas analiticamente obtendo-se o mesmo resultado.

Observa-se que os termos divergentes das integrais hipersingulares adjacentes correspondem exatamente ao oposto dos termos obtidos no caso coincidente. Esse resultado possibilita o cancelamento exato dos termos divergentes na etapa da imposição das condições de contorno demonstrada a seguir.

## 5 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Uma consequência da utilização do MEC Simétrico de Galerkin consiste na descontinuidade das variáveis nos nós de discretização do contorno. Mais especificamente, exige-se, em uma primeira análise, que os graus de liberdade de cada elemento sejam independentes. Essa característica contribui para que um tratamento mais natural e elegante, em comparação ao Método da Colocação, possa ser realizado na etapa da imposição das condições de contorno. Esta etapa consiste em uma adequada manipulação do sistema de equações lineares do problema, demonstrado na Eq. (3.21), de modo que a continuidade no campo das variáveis de interesse seja imposta.

Para o caso de problemas de elasticidade, exige-se que o campo de deslocamentos seja contínuo ao longo do contorno do problema, enquanto que o campo das forças de superfície possa ser considerado descontínuo. De forma a atender estas exigências, a manipulação do sistema de equações será feita de acordo com a análise de três casos, ilustrados na Figura 4.

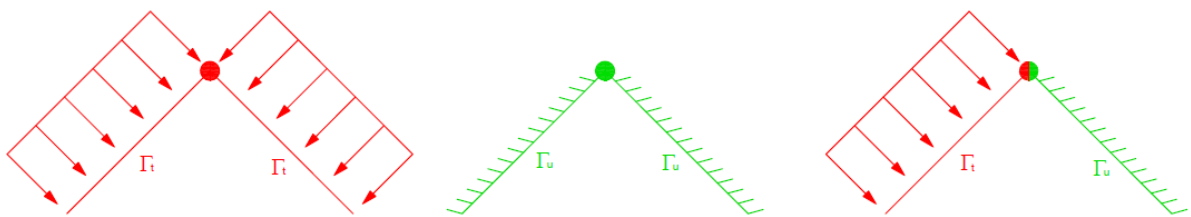


Figura 4. Imposição das condições de contorno.

O primeiro caso corresponde a situação onde dois elementos consecutivos contêm valores conhecidos de deslocamento e, consequentemente, dois valores desconhecidos de força no nó de discretização que os conecta. Uma vez que o campo das forças de superfície é considerado descontínuo, esta situação não demanda nenhuma manipulação do sistema.

O segundo caso se dá quando dois elementos consecutivos apresentam condições de contorno distintas, ou seja, um apresenta valores conhecidos de deslocamento e o outro apresenta valores conhecidos de força. Fica claro que, nesta situação, ocorrerão dois valores distintos de deslocamento em um mesmo nó, um já previamente conhecido e outro a ser determinado. Para que seja atendida a condição de continuidade impõe-se ao valor da incógnita de deslocamento o mesmo valor pré-estabelecido pela condição de contorno do elemento adjacente. A estratégia utilizada neste caso é equivalente à imposição das condições de contorno de deslocamento no Método dos Elementos Finitos. O lado esquerdo do sistema é manipulado zerando-se as linhas e colunas associadas à incógnita de deslocamento, com exceção da sua diagonal que recebe um valor unitário. Já ao lado direito do sistema, a posição referente a incógnita de deslocamento recebe o valor pré-estabelecido pela condição de contorno do elemento adjacente.

O terceiro caso se deve a situação onde dois elementos consecutivos contêm valores conhecidos de força. A consideração de um campo contínuo de deslocamentos exige que o nó entre estes dois elementos tenha um valor de deslocamento único ou, equivalentemente, que este nó seja representado por apenas um grau de liberdade comum aos dois elementos. A manipulação do sistema de equações, que corresponde a junção de dois graus de liberdade em somente um, corresponde a somar-se as linhas e colunas dos graus de liberdade em questão, reduzindo-se a ordem do sistema de equações. É importante ressaltar que esta etapa é responsável pelo cancelamento dos termos divergentes obtidos no cálculo das integrais singulares. A soma dos graus de liberdade implica na adição das integrais analíticas para elementos coincidentes e adjacentes, de forma que os termos divergentes, que aparecem com



sinais opostos em cada expressão, se cancelam, restando ao fim somente a parte finita das integrais. Portanto, vale notar que, em termos de implementação, as parcelas divergentes das integrais singulares podem ser desprezadas, sem perda de precisão.

## 6 MATRIZ DE RIGIDEZ SIMÉTRICA

Para acoplar regiões discretizadas pelo MEC com regiões discretizadas por outros métodos numéricos, em especial o MEF, é interessante derivar uma matriz de rigidez para cada região. Existem diversas estratégias disponíveis na literatura que fazem tal derivação com o MEC de Colocação, porém todas resultam em matrizes de rigidez não-simétricas. Ao se aplicar essas mesmas estratégias no MEC Simétrico de Galerkin, as mesmas também resultarão em matrizes não-simétricas. Logo, vários pesquisadores da engenharia utilizam diretamente a Eq. (3.21) no processo de acoplamento, garantindo assim a simetria do sistema final acoplado, porém assumindo o ônus de manter neste sistema, mais variáveis que as necessárias, quando comparado com as estratégias que utilizam matrizes de rigidez. Alguns matemáticos desenvolveram uma estratégia tornando possível obter uma matriz de rigidez simétrica para regiões discretizadas com o MEC Simétrico de Galerkin, que de acordo com o conhecimento dos autores, não foi encontrada a sua utilização em trabalhos na área de engenharia. Baseando-se nas estratégias desenvolvidas por matemáticos, apresenta-se uma metodologia onde se obtém uma matriz de rigidez simétrica no MEC Simétrico de Galerkin.

O passo-a-passo para obtenção da matriz de rigidez simétrica no MEC Simétrico de Galerkin está esquematizado na Fig. 5. Notar que agora, ambos os vetores  $\mathbf{t}_u$  e  $\mathbf{u}_t$  além de conter as variáveis do contorno que não foram prescritas, também contém as variáveis na interface entre as regiões, pois se sabe que em problemas de multi-região tanto os deslocamentos como as forças são incógnitas nas interfaces.

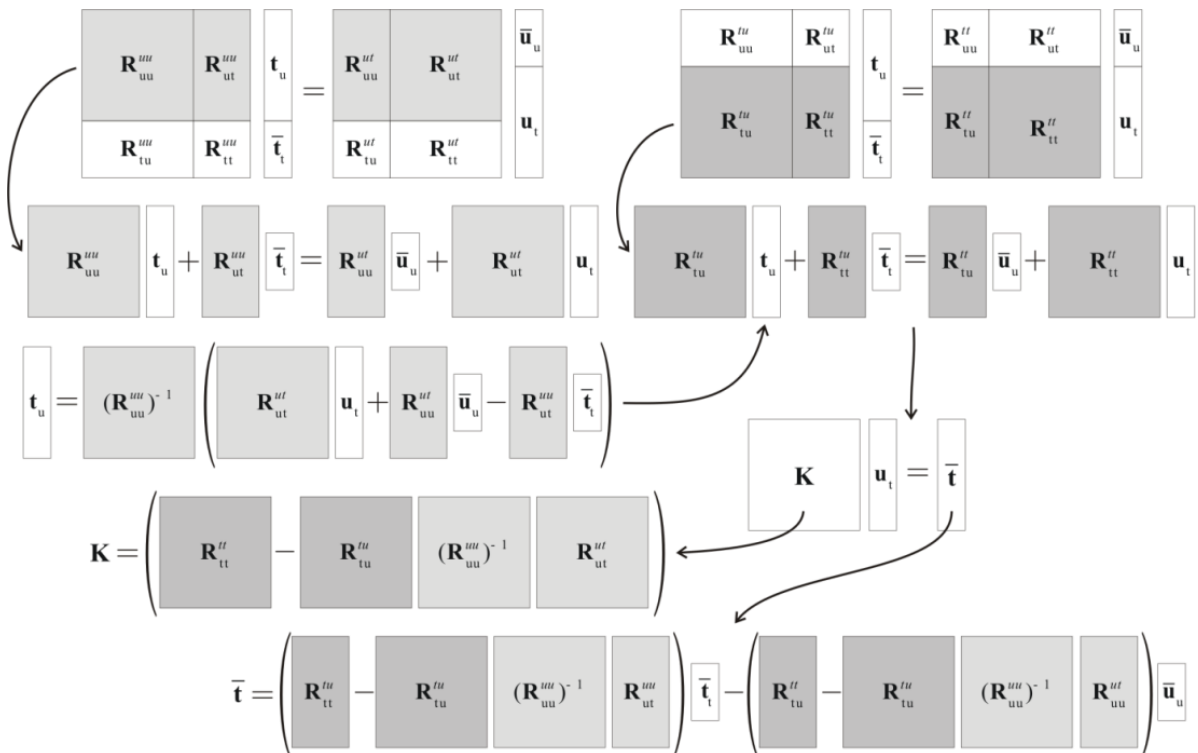


Figura 5. Etapas para determinar uma matriz de rigidez simétrica para uma região com o MECSG.

A metodologia se baseia em isolar do primeiro bloco da Eq. (3.15) a variável  $t_u$  e substituí-la no segundo bloco da Eq.(3.16), desaparecendo-se assim com essa variável. Essa manipulação resulta finalmente em um sistema de equações lineares onde as únicas incógnitas do problema são as componentes do vetor  $u_t$ , ou seja, os deslocamentos nos nós da interface e nos nós livres do contorno. Aplicando-se esse mesmo procedimento para cada região discretizada com o MEC Simétrico de Galerkin é possível resolver um problema de multi-regiões garantindo apenas a compatibilidade entre os nós das regiões. Vale ressaltar que as inversas explicitadas nas equações da Figura 5 não são calculadas diretamente, mas que são calculadas indiretamente resolvendo-se sistemas de equações com múltiplos lados direitos, por razões claras de eficiência. Quanto mais se divide uma região, decompondo-a em regiões cada vez menores, tais sistemas vão também ficando cada vez menores, podendo então ser resolvido com métodos diretos, de forma bastante eficiente. Já o sistema final de equações fica então esparso, além de simétrico, podendo ser resolvido com métodos iterativos com pré-condicionadores. Essa metodologia é bem conhecida na literatura como Métodos de Decomposição de Domínios.

## 7 RESULTADOS

De forma a verificar a implementação numérica do MEC Simétrico de Galerkin, e sua precisão, são apresentados os resultados da simulação computacional de um problema bidimensional de elasticidade linear. A solução exata do problema em questão pode ser obtida através de sua solução analítica, através da Teoria da Elasticidade, como demonstrado em (Timoshenko & Goodier, 1951).

O exemplo a ser resolvido consiste de um cilindro com raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$  sujeito a uma pressão interna de valor simbólico  $P$ , como ilustrado na Figura 6, onde, devido a dupla simetria, somente um quarto do modelo é representado.

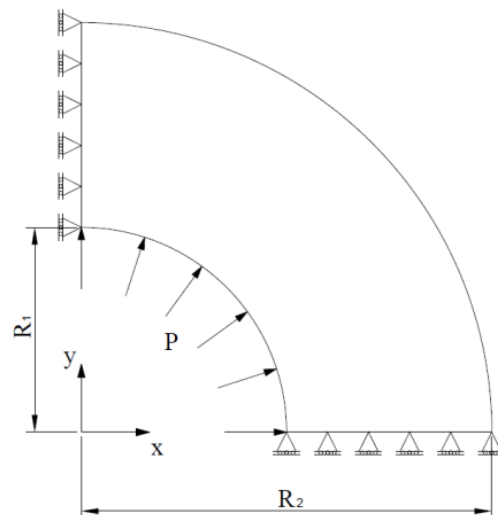


Figura 6 – Cilindro sobre pressão interna

Assume-se que o cilindro é suficientemente longo de forma que a deformação na direção axial possa ser considerada nula, ou seja, considera-se o problema por estado plano de deformação. Os valores numéricos adotados são

$$R_1 = 3.0; R_2 = 6.0; P = 1.0; E = 1.0; \nu = 0.3 \quad (7.1)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade linear e o coeficiente de Poisson do material. A solução analítica para o campo de deslocamentos na direção radial é dada por

$$u_r(r, \theta) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \tag{7.2}$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes que dependem tanto da geometria quanto das condições de contorno do problema e  $(r, \theta)$  são coordenadas polares com origem no eixo axial do cilindro.

São apresentados os resultados utilizando-se duas discretizações distintas, ilustradas na Figura 7. A primeira discretização é composta por 20 elementos enquanto que a mais refinada é composta por 30 elementos. Na Figura 8 são apresentados os resultados numéricos, utilizando-se cada uma das discretizações, assim como o resultado analítico.

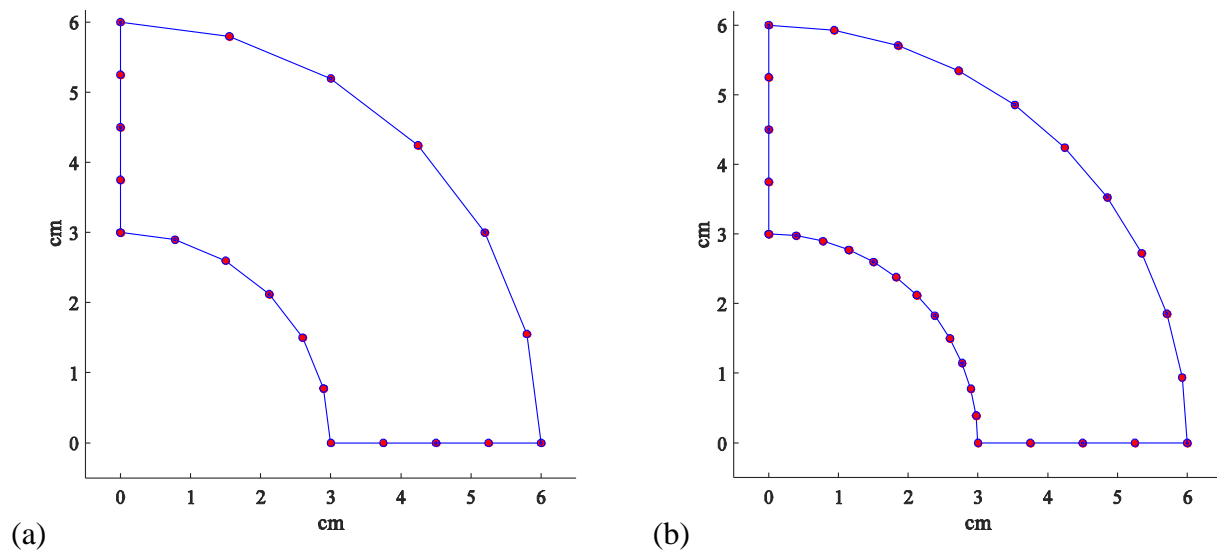


Figura 7 - Discretização do cilindro sobre pressão: a) 20 elementos e b) 30 elementos.

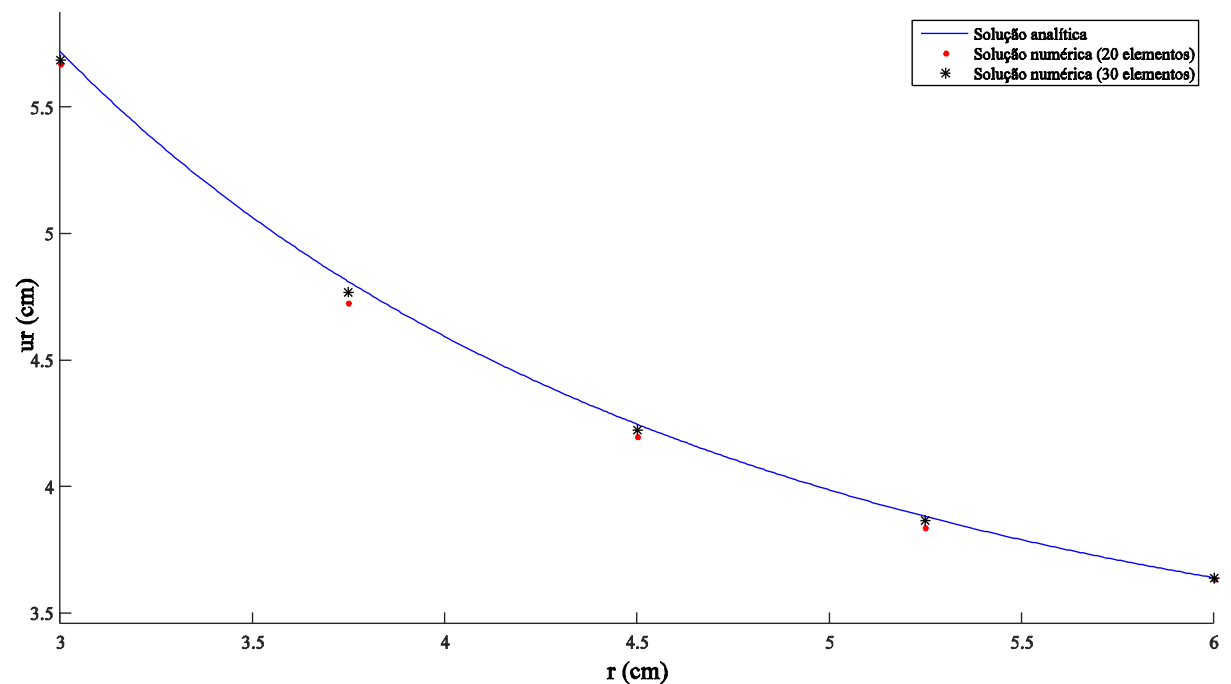


Figura 8 - Solução analítica e numérica do cilindro sobre pressão.

## 8 CONCLUSÕES

Uma das maiores vantagens do MEC Simétrico de Galerkin, em comparação com o Método de Colocação, está relacionada com o sistema de equações lineares simétrico envolvido na determinação das incógnitas do problema. Essa característica torna possível reduzir o consumo de memória, devido ao armazenamento da matriz do sistema, assim como a utilização de *solvers* mais eficientes, específicos para matrizes simétricas, reduzindo o tempo para a solução do sistema de equações. Por outro lado, a etapa de construção do sistema exige um maior esforço computacional devido ao cálculo das integrais duplas e ao tratamento das integrais com singularidades fortes e hipersingulares. Vale ressaltar que a técnica semi-analítica apresentada alivia drasticamente o custo computacional associado ao cálculo das integrais singulares.

Outro benefício associado ao MEC Simétrico de Galerkin se dá pelo acoplamento com outros métodos numéricos que também geram matrizes simétricas, como o MEF. O acoplamento entre o MEC e MEF, utilizando o Método da Colocação, acaba por deteriorar as matrizes do sistema final, uma vez que a matriz de rigidez do Método de Colocação é não simétrica. Por outro lado, a formulação do MEC Simétrico de Galerkin torna possível a geração de uma matriz de rigidez simétrica de forma que o acoplamento possa ser realizado sem deterioração das matrizes finais do problema.

## 9 BIBLIOGRAFIA

- Gray, L. J., . 1998. . Evaluation of singular and hypersingular Galerkin integrals: direct limits and symbolic computation. *Singular Integrals in Boundary Element Methods, Comp. Mech. Publ., Southampton*, pp. 45–84,
- Parreira, P., ; Guiggiani, M., . 1989. . On the implementation of the galerkin approach in the boundary element method. *Computers and Structures*, v. 33, n. 1, pp. 269–279,
- Sutradhar, A., ; Paulino, G. H., ; Gray, L. J., . 2008. *Symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Springer-Verlag: Springer-Verlag.
- Timoshenko, S., ; Goodier, J. N., . 1951. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill: McGraw-Hill.