

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## COMPARAÇÃO ENTRE O MECDR E O MECID NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR

**Carlos Friedrich Loeffler**

**Abraão Lemos Caldas Frossard**

carlosloeffler@bol.com.br

abraaocaldas@hotmail.com

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

**Luciano de Oliveira Castro Lara**

castrolara@hotmail.com

Departamento de Engenharia Mecânica, DEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES – Brasil

**André Bulcão**

bulcao@petrobras.br

PETROBRAS, Centro de Pesquisa e Desenvolvimento Leopoldo A. Miguez de Mello

**Abstract.** *This article compares the performance of two formulations of the BEM to solve acoustic problems, governed by the Helmholtz equation: the formulation of Dual Reciprocity and formulation with Direct Integration. The latter is a new alternative to the Dual Reciprocity technique for solving problems modeled by non-adjoint differential operators. Both methods are similar, but, the formulation with Direct Integration is simpler and closely resembles an interpolation procedure. Thus, through the solution of eigenvalue problem, natural frequencies are calculated and their accuracy is taken as a parameter to assess the quality of the results of each formulation. Examples whose analytical solution is known were chosen for analysis of the results.*

**Keywords:** *Boundary Element Method, Eigenvalue Problem, Radial Basis Function*

## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é bastante adequado à solução numérica de problemas físicos modelados por equações diferenciais parciais em que seus operadores são auto-adjuntos (Brebbia et. al., 1984). No entanto, muitos problemas de interesse prático envolvem operadores diferenciais que não possuem tal propriedade ou, então, a solução fundamental correlata usualmente empregada com o MEC é demasiadamente complicada ou oferece dificuldades a uma solução ágil.

Uma dessas dificuldades aparece no caso de problemas governados pela Equação de Helmholtz (Butkov, 1973), pois a solução fundamental depende da frequência de excitação. Assim no caso de se calcular as frequências naturais, ou seja, resolver um problema de vibração livre, tal dependência impede a formação de uma matriz de inércia distinta da matriz de propriedades constitutivas, e a solução do problema de autovalor não pode ser feito diretamente (Dominguez, 1993).

A técnica de interpolação direta com funções radiais, aqui denominada MECID (Loeffler et al., 2015), foi proposta com o intuito de oferecer uma alternativa ao uso da técnica de Dupla Reciprocidade (MECDR) (Partridge et al., 1992) na solução de problemas físicos cuja modelagem matemática apresente as dificuldades mencionadas. Os casos mais comuns envolvem fontes, ações de domínio, transporte por advecção, forças de inércia e outros constituintes, que implicam em dificuldades na obtenção de uma equação integral de contorno simples.

As citadas técnicas apresentam semelhanças, pois ambas empregam procedimentos numéricos nos quais integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno através do concurso de funções de base radial (Buhmann, 2003). Contudo, a MECDR requer a construção de duas matrizes de interpolação auxiliares, constituídas por diferentes funções, que são multiplicadas pelas matrizes clássicas H e G do MEC. Já a MECID aproxima diretamente o núcleo da integral de domínio, usando apenas um tipo de função de base radial. Excluindo-se a transformação da integral de domínio numa integral de contorno, a MECID é praticamente um procedimento de interpolação, sendo assim mais geral e robusta. Uma vasta gama de diferentes funções radiais pode ser utilizada sem problemas de instabilidade, que normalmente ocorrem quando se utiliza a MECDR (Loeffler et al., 2016).

Outro ponto comum é a necessidade de introdução de pólos ou pontos fonte internos (Loeffler & Mansur, 1987) para melhoria da representação das propriedades internas ao domínio, no caso em questão, da inércia do sistema. Sobretudo nos problemas de autovalor, a fixação das bordas reduz a quantidade de graus de liberdade no contorno e, assim, a introdução dos pólos torna-se importante também para permitir uma boa representação das configurações dinâmicas possíveis com a introdução de mais pontos nodais.

O objetivo deste trabalho é exatamente a comparação de desempenho entre ambas as formulações, por meio do cálculo das frequências naturais pela solução do problema de valor característico. Nas simulações realizadas, elementos lineares de geometria retilínea são empregados em ambas as formulações e os valores numéricos comparados com soluções analíticas disponíveis.

## 2 EQUACIONAMENTO BÁSICO

Considera-se assim a Equação de Helmholtz em sua forma integral inversa (Brebbia & Walker, 1980), dada por:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \frac{1}{k^2} \omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (1)$$

Na Eq. (1),  $u(X)$  é o potencial escalar e  $q(X)$  sua derivada normal; reciprocamente,  $u^*(\xi; X)$  é a solução fundamental e  $q^*(\xi; X)$  é sua derivada normal;  $\omega$  é a frequência de vibração considerada;  $k$  é a velocidade de propagação da onda no meio;  $\xi$  é um ponto particular do espaço  $X$ , denominado ponto fonte. O coeficiente  $c(\xi)$  depende do posicionamento do ponto  $\xi$  com relação ao domínio físico  $\Omega(X)$  e, no caso de ser localizado no contorno  $\Gamma(X)$ , também da suavidade deste (Wrobel & Aliabadi, 2002).

Na equação (1) pode-se perceber que o procedimento típico do MEC para o operador Laplaciano foi mantido. Isso se deve ao fato de que tanto a MECDR quanto a MECID utilizam a solução fundamental  $u^*(\xi; X)$  referente ao problema difusivo estacionário como função auxiliar na formulação da equação integral de contorno. Assim sendo, a solução fundamental, correspondente à resposta analítica de um problema de Poisson em meio infinito, no qual uma fonte concentrada atua no ponto fonte  $\xi$ . Assim sendo, tem-se:

$$u^*_{,ii} = -\Delta(\xi; X) \quad (2)$$

Na Eq. (2),  $\Delta(\xi; X)$  é a função Delta de Dirac. Da solução deste problema fundamental resulta:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (3)$$

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n(X)} \quad (4)$$

Nas Eq. (3) e (4),  $r(\xi; X)$  é a distância euclidiana entre os pontos fonte e campo; e  $n(X)$  é a normal externa ao contorno  $\Gamma(X)$ . A diferença entre a MECDR e a MECID se faz na abordagem da integral de domínio referente à inércia do sistema, ou seja, o lado direito da Eq. (1).

## 3 DUPLA RECIPROCIDADE

A primeira etapa de abordagem da integral de domínio com a MECDR consiste em se proceder à seguinte aproximação para o potencial  $u(X)$ :

$$u(X) \approx \alpha^i F^i(X^i; X) = \alpha^i \{\nabla \cdot \nabla [\Psi^i(X^i; X)]\} \quad (5)$$

Na Eq. (5), os  $\alpha^i$  são coeficientes a determinar e  $F^i(X^i; X)$  representa um conjunto de funções de interpolação radiais. As funções  $\Psi^i(X^i; X)$  são primitivas de  $F^i(X^i; X)$ , relacionando-se pelo Laplaciano e permitindo assim a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno, por meio do procedimento usual de integração por partes e aplicação do Teorema da Divergência. Ambas as funções referenciam-se em pontos base arbitrários  $X^i$ , geralmente escolhidos em coincidência com os pontos nodais. Esses pontos também devem ser localizados internamente, com o objetivo de melhorar a interpolação proposta no interior do

domínio. É possível então, reescrever a integral de domínio gerada pela formulação integral como se segue:

$$\int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega = -\alpha^i c(\xi)\Psi^i(\xi) + \int_{\Gamma} [\eta^i(X^i; X)u^*(\xi; X) - (\Psi^i(X^i; X)q^*(\xi; X))]d\Gamma \quad (6)$$

Vale ressaltar que  $\eta^i(X^i; X)$  e  $\psi^i(X^i; X)$  são funções conhecidas, geradas a partir das funções  $F^i(X^i; X)$ . A escolha da classe das funções de interpolação  $F^i(X^i; X)$  ainda é objeto de investigações, mas as funções de base radial compõem a classe mais interessante de funções, devido à invariância e flexibilidade, entre outras propriedades. De acordo com as circunstâncias, também é interessante conjugar as funções radiais com funções globais (Goldberg & Chen, 1994), à guisa de melhoria na precisão do processo de interpolação.

Definindo-se os pontos fonte  $\xi$ , geralmente em coincidência com os pontos base de interpolação das funções radiais, e procedendo-se à discretização de acordo com padrão do MEC, a integral de domínio se transforma numa matriz que representa a propriedade inercial do sistema:

$$\mathbf{H}\{\mathbf{u}\} - \mathbf{G}\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\boldsymbol{\eta}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{H}\Psi - \mathbf{G}\boldsymbol{\eta}]\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{u}\} = \frac{\omega^2}{k^2} \mathbf{M}\{\mathbf{u}\} \quad (7)$$

#### 4 FORMULAÇÃO COM INTEGRAÇÃO DIRETA

A idéia básica da MECID é interpolar o núcleo completo da integral de domínio, incluindo a solução fundamental, de acordo com a Eq. (8):

$$u(X)u^*(\xi; X) = \xi^i \alpha^i F^i(X^i; X) \quad (8)$$

As mesmas funções radiais são aqui utilizadas e o mesmo tipo de varredura feito na MECDR se aplica aqui, com a diferença que os coeficientes agora  $\xi^i \alpha^i$  dependem do ponto fonte. Tais coeficientes podem ser obtidos através da solução do sistema, após a discretização:

$$[\xi^i \boldsymbol{\alpha}] = [\mathbf{F}]^{-1} [\xi^i \boldsymbol{\Lambda}] [\mathbf{F}] \boldsymbol{\alpha} = [\mathbf{F}]^{-1} [\xi^i \boldsymbol{\Lambda}] [\mathbf{u}] \quad (9)$$

Na MECID, uma vez que a solução fundamental também compõe o núcleo a ser interpolado, para que o ponto fonte  $\xi$  possa ter a mesma posição dos pontos campo  $X$ , é preciso efetuar um procedimento de regularização similar ao de Hadamard (Braga, 2006). Na formulação, tal como apresentada preliminarmente (Loeffler et al., 2015), as variáveis nodais nos pontos campo eram deslocadas para evitar singularidade.

A integral de domínio é transformada numa integral de contorno através de uma função primitiva:

$$\int_{\Omega} \xi^i \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega = \int_{\Omega} \xi^i \alpha^i \nabla \cdot (\nabla \Psi^i(X^i; X)) d\Omega = \int_{\Gamma} \xi^i \alpha^i (\nabla \Psi^i(X^i; X)) \cdot \bar{\mathbf{n}}(X) d\Gamma = \xi^i \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \quad (10)$$

A transformação apresentada na Eq. (10) foi testada e deu resultados bastante satisfatórios em aplicações preliminares, que consistiam em cálculos de volumes e valores de imagem de funções como o parabolóide e a Função de Franke (1982). Igualmente foram

realizadas simulações com o MEC para resolver problemas de Poisson, usando inclusive funções de base radial com suporte compacto (Loeffler et al., 2016).

O procedimento de regularização usualmente é aplicado em outro contexto (Pessolani, 2002), mas a sua idéia pode ser aqui utilizada para excluir a singularidade na Eq. (8). Neste sentido, faz-se o seguinte tratamento na integral do lado direito da Eq. (1):

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \\ \frac{1}{k^2} \omega^2 \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)]d\Omega - \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \right\} + \frac{1}{k^2} \omega^2 \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

Devido ao procedimento de regularização, a sentença básica dada pela Eq. (8) inclui as duas primeiras integrais do lado direito da Eq. (11):

$$\frac{1}{k^2} \omega^2 \left\{ \int_{\Omega} [u(X)u^*(\xi; X)]d\Omega - \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \right\} \approx \frac{1}{k^2} \omega^2 \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X})d\Omega \quad (12)$$

Usando a transformação proposta pela Eq. (10), tem-se:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \\ \frac{1}{k^2} \omega^2 \left\{ \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(\mathbf{X}^i; \mathbf{X})d\Gamma \right\} + \frac{1}{k^2} \omega^2 \int_{\Omega} [u(\xi)u^*(\xi; X)]d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

Por conveniência, ignora-se momentaneamente o segundo termo no lado direito da Eq. (13). O tratamento matricial desta equação, considerando os procedimentos típicos do MEC é dado com detalhe em trabalhos prévios (Loeffler et al., 2014), resultando no seguinte sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \dots & & \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & & \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \dots \\ \mathbf{q}_n \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} \alpha^1 & \dots & \alpha^m \\ \dots & & \\ \alpha^1 & \dots & \alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \dots \\ N_m \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

Para formação de uma matriz na qual o potencial apareça explicitamente no lado direito da Eq. (14), faz-se para cada ponto fonte:

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \alpha_1 \\ \dots \\ \xi \alpha_m \end{pmatrix} \quad (15)$$

Então, com base na Eq. (9):

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \dots & & \dots \\ F^{n1} & \dots & F^{nn} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \xi \Lambda^1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \Lambda^1 \cdot \mathbf{u}_{\xi} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \cdot \mathbf{u}_{\xi} \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \xi \Lambda^1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi \Lambda^1 \cdot \mathbf{u}_{\xi} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \xi \Lambda^n \cdot \mathbf{u}_{\xi} \end{pmatrix} \right\} \quad (16)$$

Considerando a discretização com n pontos fonte, nodais e internos, pode-se escrever:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-S_2^1 \Lambda^2 - S_3^1 \Lambda^3 \dots - S_n^1 \Lambda^n] & S_2^1 \Lambda^2 & \dots & S_n^1 \Lambda^n \\ S_1^2 \Lambda^1 & [-S_1^2 \Lambda^1 - S_3^2 \Lambda^3 \dots - S_n^2 \Lambda^n] & \dots & S_n^2 \Lambda^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^n \Lambda^1 & S_2^n \Lambda^2 & \dots & [-S_1^n \Lambda^1 - S_2^n \Lambda^3 \dots - S_{n-1}^n \Lambda^{n-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (17)$$

Pode-se observar que os termos  $\Lambda^i$ , que resultariam na singularidade devido à coincidência entre os pontos fonte e campo, não mais existem na matriz dada pela Eq. (17).

Resta ainda o ultimo termo do lado direito da Eq. (13), que pode ser tratado matematicamente através do conceito do Tensor de Galerkin (Brebbia & Dominguez, 1992) e assim facilmente ser transformado numa integral de contorno, conforme se segue:

$$\int_{\Omega} [u(\xi) u^*(\xi; X)] d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} [G^*_{,ii}(\xi; X)] d\Omega = u(\xi) \int_{\Gamma} [G^*_{,i}(\xi; X) n_i(X)] d\Gamma \quad (18)$$

Na Eq. (19), tem-se:

$$G^*_{,i}(\xi; X) n_i(X) = \xi P^X = \frac{1}{4\pi} \{0.5 - \ln[r(\xi; X)]\} r_i n_i \quad (19)$$

Através do processo de discretização encontra-se:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^1 P^n d\Gamma_n] & 0 & \dots & 0^n \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^2 P^n d\Gamma_n] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^n P^1 d\Gamma_1 + \int_1^n P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^n P^n d\Gamma_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (20)$$

Então, o sistema matricial completo pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \dots & & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \dots \\ \mathbf{q}_n \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} (A_1 - Z_1) \\ \dots \\ (A_n - Z_n) \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & & \dots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \quad (21)$$

## 5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR

Os sistemas de equações mostrados tanto na Eq. (7) quanto na Eq. (21) – que são similares - precisam ser adequadamente manipulados para se formular o problema de autovalor. Ambos envolvem tanto valores do potencial quanto de sua derivada normal simultaneamente. Para tanto, é necessário usar novas sub-matrizes (Loeffler & Mansur, 1986) nas quais se destacam os valores nodais de u e q prescritos:

$$\begin{pmatrix} H_{u\bar{u}} & H_{u\bar{q}} \\ H_{q\bar{u}} & H_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{u\bar{u}} & G_{u\bar{q}} \\ G_{q\bar{u}} & G_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \bar{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} M_{u\bar{u}} & M_{u\bar{q}} \\ M_{q\bar{u}} & M_{q\bar{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Considerando que para este tipo de problema os valores nodais prescritos de u(X) e q(X) são nulos:

$$H_{u\bar{q}}\mathbf{u} - G_{u\bar{u}}\mathbf{q} = \frac{\omega^2}{k^2} M_{u\bar{q}}\mathbf{u} \quad (23)$$

$$H_{q\bar{q}}\mathbf{u} - G_{q\bar{u}}\mathbf{q} = \frac{\omega^2}{k^2} M_{q\bar{q}}\mathbf{u} \quad (24)$$

Dessas duas últimas equações, eliminando-se a derivada do potencial q encontra-se:

$$[\bar{H}]\{\mathbf{u}\} = \frac{\omega^2}{k^2} [\bar{M}]\{\mathbf{u}\} \quad (25)$$

Onde:

$$\begin{aligned} [\bar{H}] &= [H_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[H_{uq}] \\ [\bar{M}] &= [M_{qq}] - [G_{qu}][G_{uu}]^{-1}[M_{uq}] \end{aligned} \quad (26)$$

## 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nas simulações doravante apresentadas, as frequências naturais são calculadas e sua precisão é tomada como parâmetro para a avaliação da qualidade dos resultados de cada formulação. Dois exemplos simples, cuja solução analítica é conhecida, foram escolhidos para uma análise dos resultados. Salvo menção em contrário, apenas funções radiais simples  $F^i(X^i;X)=r(X^i;X)$  foram usadas em ambas as formulações. O erro relativo é tomado como valor de medida, sendo igual ao módulo da diferença entre os valores numéricos e analíticos, dividida pelo valor analítico.

Para o cálculo dos autovalores, uma vez que as matrizes não são simétricas, foi usado o algoritmo de Hessenberg.

## 6.1 Membrana Totalmente Fixada

Este primeiro exemplo consiste da obtenção das frequências naturais numa membrana quadrada de dimensão unitária, conforme mostra a Fig. 1:

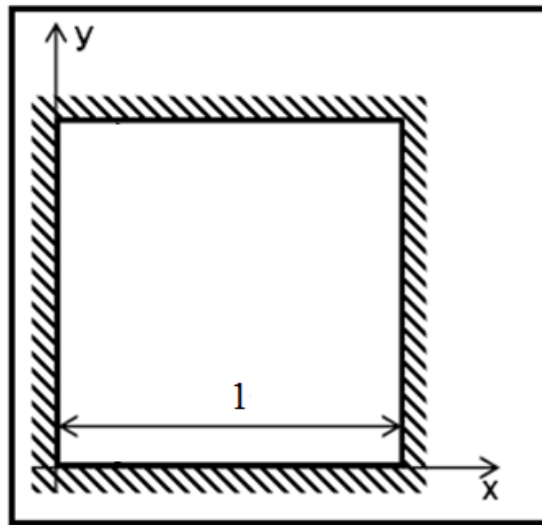


Figura 1: Membrana completamente fixada nos bordos

O valor de  $k$  também foi tomado igual à unidade. A solução analítica deste caso é dada por:

$$\omega_{mn} = \pi\sqrt{m^2 + n^2} \quad (27)$$

Onde  $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$ , que corresponde ao modo de vibração em duas dimensões.

Neste caso, em que o movimento de todos os pontos nodais do contorno é restrito, os graus de liberdade do sistema são dados exclusivamente pelos pontos internos e assim, para que se calcule um número maior de autovalores com precisão satisfatória, é preciso introduzir uma quantidade elevada destes. Por esta razão as malhas com poucos pontos internos não puderam calcular adequadamente as frequências para a MECDR, conforme mostra a Fig. 2. Não obstante tais pontos internos ganharem em importância neste caso e todas as configurações de equilíbrio ou modos de vibração se anularem no contorno, as integrações ao longo do contorno são efetuadas, estando os pontos fonte situados internamente. Assim, para uma mesma quantidade de pontos internos, a malha mais refinada deveria produzir melhores resultados. Mas isto não acontece neste problema. A malha menos refinada, com 36 pontos nodais (PN) tem melhor desempenho do que a malha rica, com 136 nós, para uma mesma quantidade de pontos internos (PI).

Para uma melhor avaliação do comportamento numérico da MECDR, foram processadas malhas com mesma quantidade de pontos nodais e pontos internos, mas usando elementos quadráticos. A intenção é constatar se a importância da malha de contorno é efetivamente sobrepujada por fatores relacionados à interpolação radial, no caso da MECDR dadas pelas matrizes  $\Psi$  e  $\eta$ , conforme observado na Eq. (7).

Curiosamente, os erros somente diminuem para a malha menos refinada, crescendo suavemente no caso da malha com 136 pontos nodais no contorno, conforme mostra a Fig. 3. Para esta malha, foi introduzido um maior número de pontos internos, de forma que se pode constatar que o erro se reduz basicamente com o aumento destes. Isso leva a conclusão que



efetivamente há efeitos nocivos produzidos pelo modelo de interpolação da MECDR, que foram ressaltados pelas condições de fixação completa no contorno.

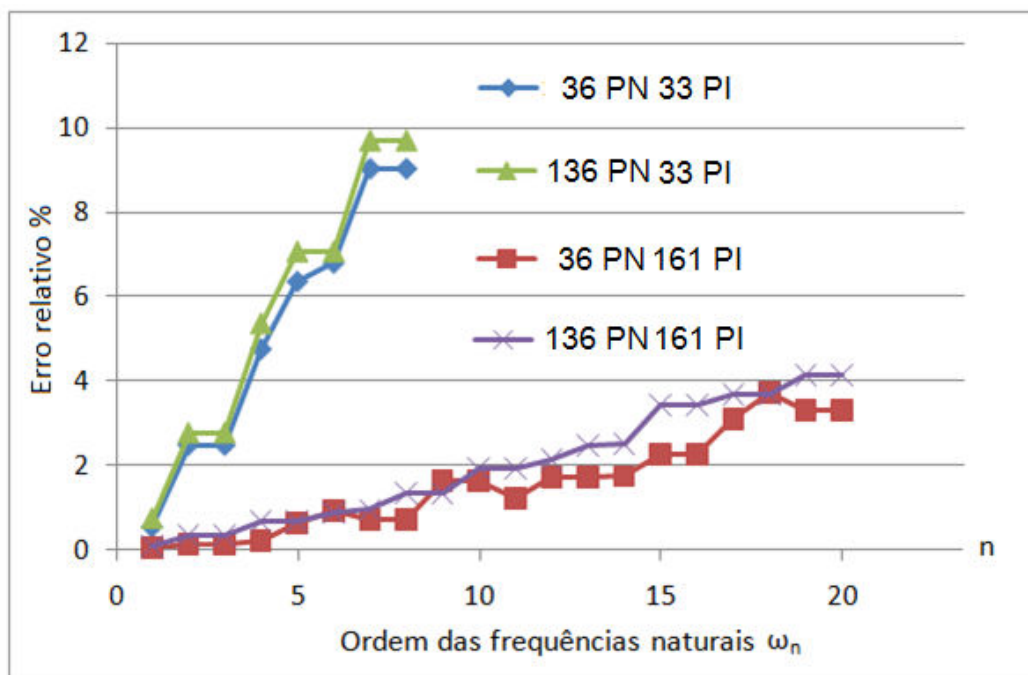


Figura 2 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECDR, usando elementos lineares, para a membrana

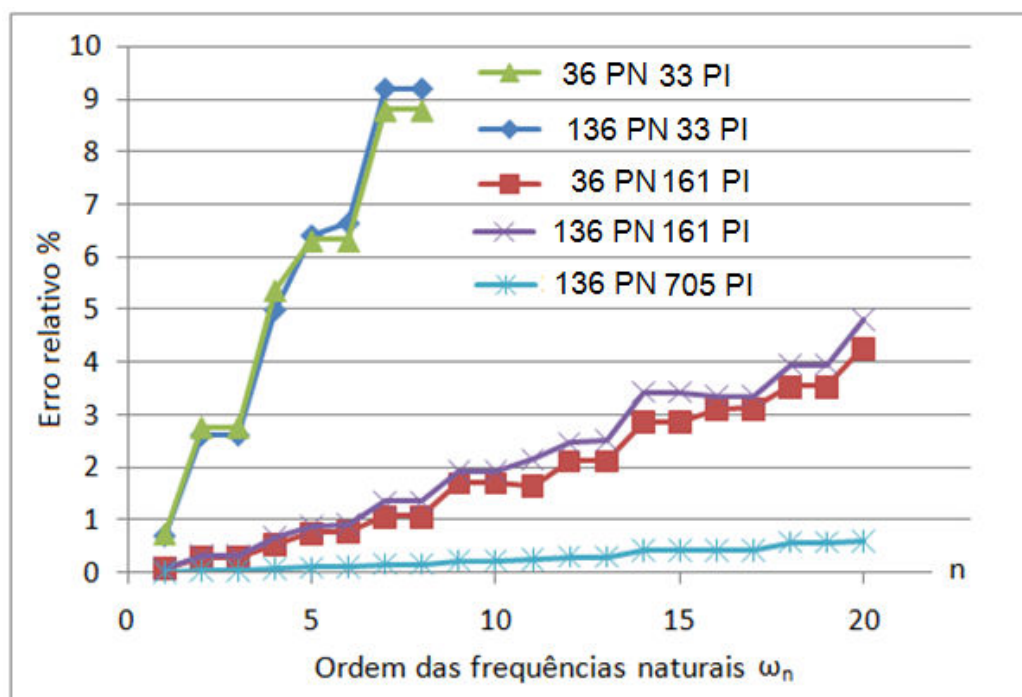


Figura 3 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECDR, usando elementos quadráticos, para a membrana

Na Fig. 4 são mostrados os resultados obtidos com a MECID, usando apenas elementos lineares e malhas com diferentes quantidades de pontos nodais no contorno e internos. As malhas não são exatamente iguais às usadas com a MECDR, mas é possível aferir o comportamento numérico da nova técnica em função do nível de discretização utilizado.

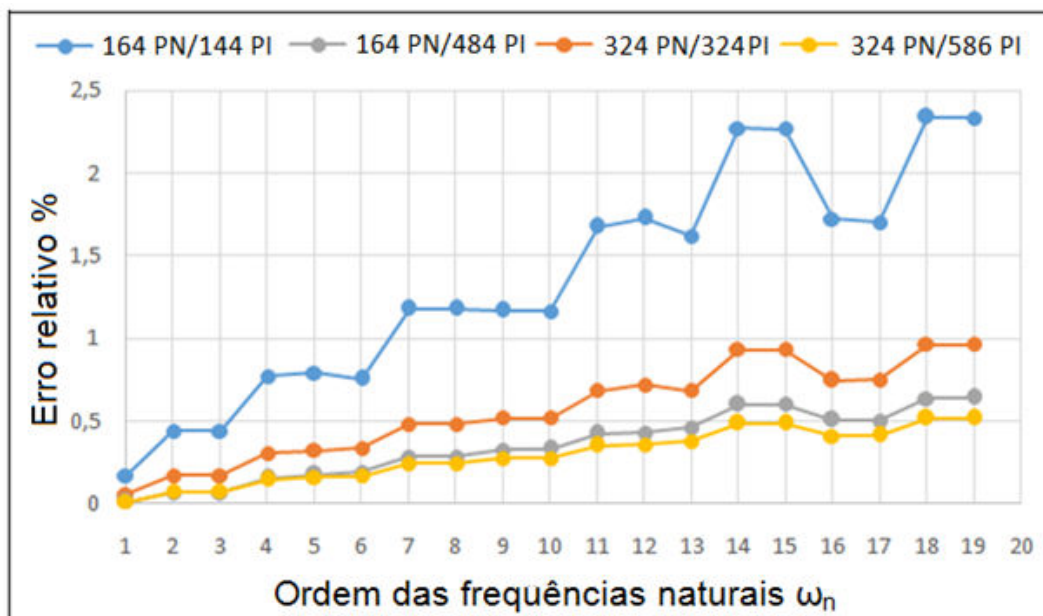


Figura 4 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECID, usando elementos lineares, para diversas malhas, na solução da membrana

No caso da MECID, malhas com poucos pontos nodais no contorno não retornam bons resultados. Na realidade, com a malha de 36 pontos nodais não foi sequer possível calcular todos os autovalores e o erro foi maior do que o apresentado para a MECDR. A inserção de pontos internos nesta malha também não foi efetiva; embora se calcule um número maior de autovalores, a precisão não melhora e, pelo contrário, cai discretamente. Neste caso, a ausência de implementação de um esquema de integração quase singular também pode ter influenciado negativamente os resultados. Contudo, este comportamento já era esperado para a MECID. Por ser uma técnica mais semelhante a uma interpolação, a importância de um número mínimo de pontos base no interior aumenta em comparação com o requerido pela MECDR; assim, malhas com muitos pontos nodais no contorno sem uma quantidade suficiente de pontos interpolantes internos conduzem a resultados imprecisos. Portanto, para que haja boa precisão na MECID é preciso que haja um equilíbrio entre o refinamento da malha de contorno e o povoamento de pontos internos. Ratificando o exposto, as curvas de erro relativo da Fig. 4 mostram que os resultados da MECID são bem superiores aos da MECDR para a malha de 164 pontos nodais e melhoram significativamente, tanto com o refinamento da malha, quanto com a introdução de pontos internos interpolantes.

É importante ressaltar: na MECID, a junção dos dois recursos - o refinamento da malha e a inserção de pontos internos - atua harmonicamente, melhorando a solução como um todo. Num caso como esse, conforme já mencionado, os pontos internos têm grande importância nos resultados, mas o refinamento da malha atua favoravelmente ao ganho de precisão.

Com ainda se pode observar na Fig. 4, nenhum problema de instabilidade numérica foi detectado com o aumento da quantidade de pontos no interior, diferentemente do que é mencionado na bibliografia especializada quando se utiliza a MECDR (Cheng et al., 2000).

Também nesta figura pode se notar que apenas a malha com 144 pontos internos teve desempenho sofrível, o que estava de acordo com as expectativas, uma vez que a MECID requer uma quantidade de pontos no interior não muito inferior ao número de pontos nodais no contorno. Contudo, há uma redução contínua do erro relativo com o aumento do número de graus de liberdade. Para destacar este aspecto, na Fig. 5 são apresentados os resultados da MECID usando uma malha de contorno com 324 pontos nodais e diferentes quantidades de pontos interpolantes no interior.

Deve-se também destacar que a MECID trabalha muito bem com várias das funções radiais clássicas e também com funções radiais de Wendland (1995) e Wu (1995), desde que sejam de baixa ordem e usem o suporte pleno. Contudo, isso não impede que certas funções atuem melhor do que outras. A função radial simples funcionou melhor em muitas simulações, particularmente em Problemas de Poisson, mas nos problemas governados pela Equação de Helmholtz, as funções de placa fina tiveram um desempenho bem superior. Para uma demonstração disso, as mesmas simulações apresentadas na Fig. 5 foram feitas para a função radial de placa fina  $r^2 \ln[r]$  e mostradas na Fig. 6.

Os níveis de erro caíram significativamente com a utilização desta última função. A razão disso está no fato de que no núcleo da integral interpolada encontra-se a solução fundamental difusiva, que é expressa em termos de um logaritmo. Todavia, tal como se identificou nas simulações de Problemas de Poisson (Loeffler et al, 2015), a função de placa fina não apresenta a mesma regularidade de comportamento da radial simples. Assim, malhas com maior número de pontos internos podem apresentar erros um pouco maiores, como no caso mostrado. Vê-se na Fig. 6 que a malha com 484 pontos internos teve melhor desempenho do que as que têm 576 e 720 pontos. Perceba-se, contudo, que esta maior quantidade de pontos interpolantes no interior não provocou instabilidade, pelo menos nos níveis comumente apresentados pela MECDR.

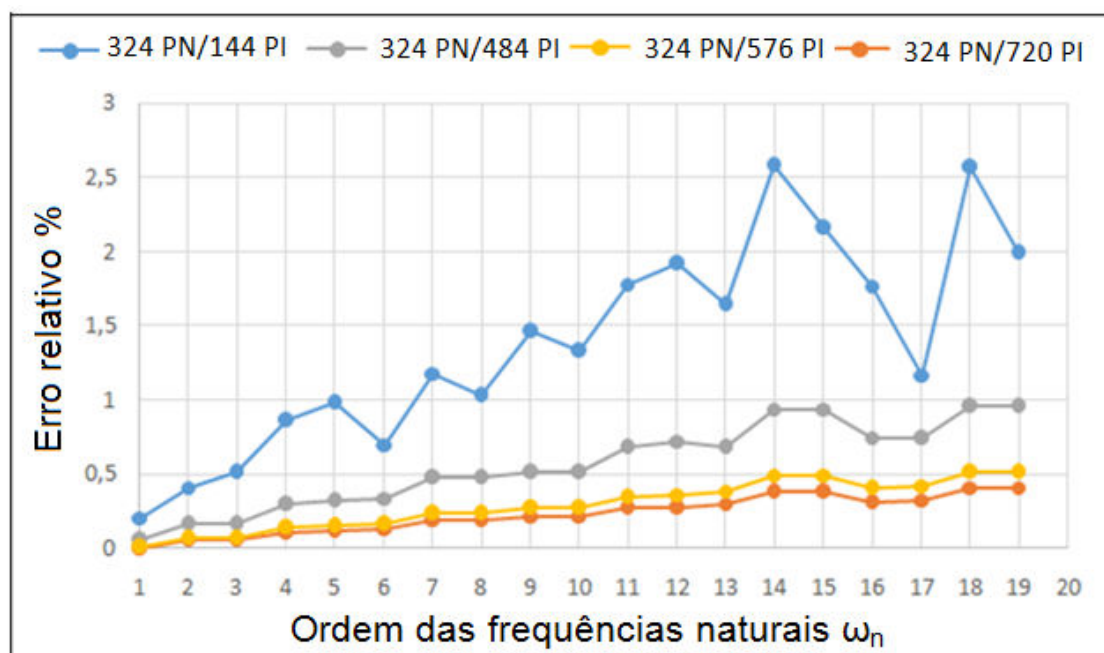


Figura 5 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências com a MECID, usando elementos lineares, para a malha com 324 nós no contorno com a função radial simples, na solução da membrana

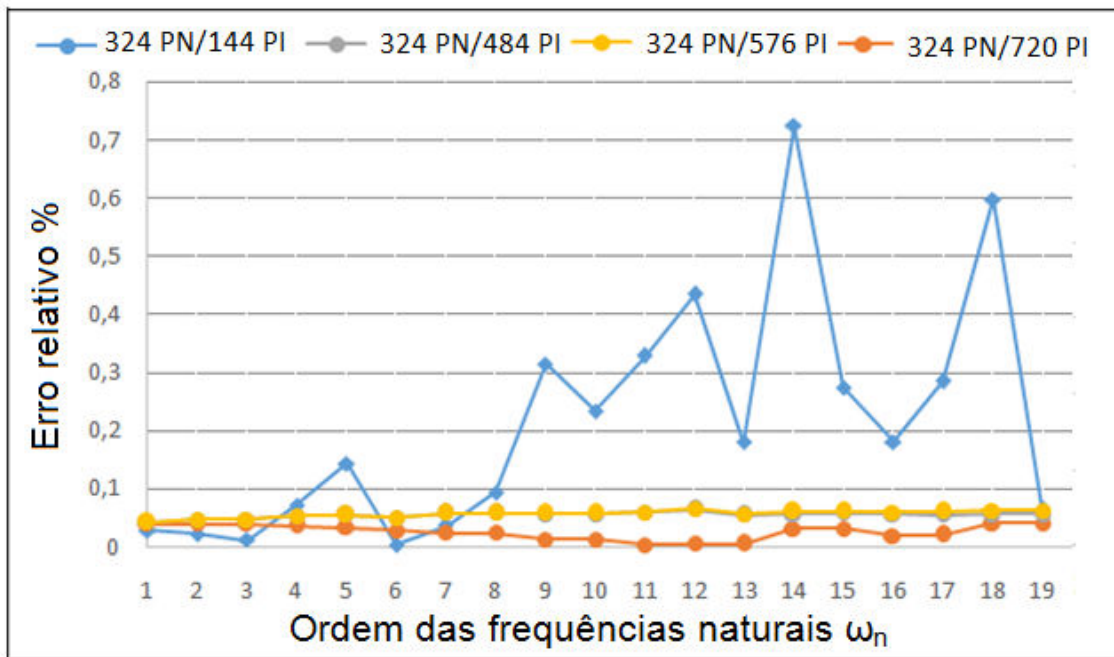


Figura 6 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências com a MECID, usando elementos lineares, para a malha com 324 nós no contorno com a função radial de placa fina, na solução da membrana

## 6.2 Chapa Engastada

Este segundo exemplo consiste da obtenção das frequências naturais numa chapa de dimensão unitária engastada apenas numa extremidade, conforme mostra a Fig.7:

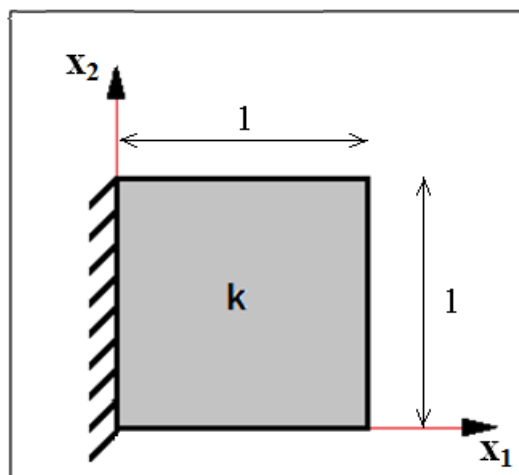


Figura 7: Chapa engastada numa extremidade

Do mesmo modo que no exemplo anterior, a propriedade k foi considerada unitária, por simplicidade. Os valores analíticos das frequências, incluindo os valores relacionados à vibração transversal, são dados por:

$$\omega_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{4m^2 + 4n^2 - 4n + 1} \quad (28)$$

Para fazer uma comparação do desempenho com o exemplo anterior, no que se refere ao comportamento da MECDR, um número menor de nós no contorno foi tomado na malha menos refinada, pois que neste caso boa parte do contorno está livre. De fato, os erros caíram um pouco e um maior número de frequências pode ser calculado com erros abaixo de 20%, conforme pode ser visto na Fig. 8. Contudo, uma vez mais o efeito do refinamento da malha de contorno foi inferior ao produzido pela inserção de pontos internos, embora tenha tido neste caso uma ação mais destacada.

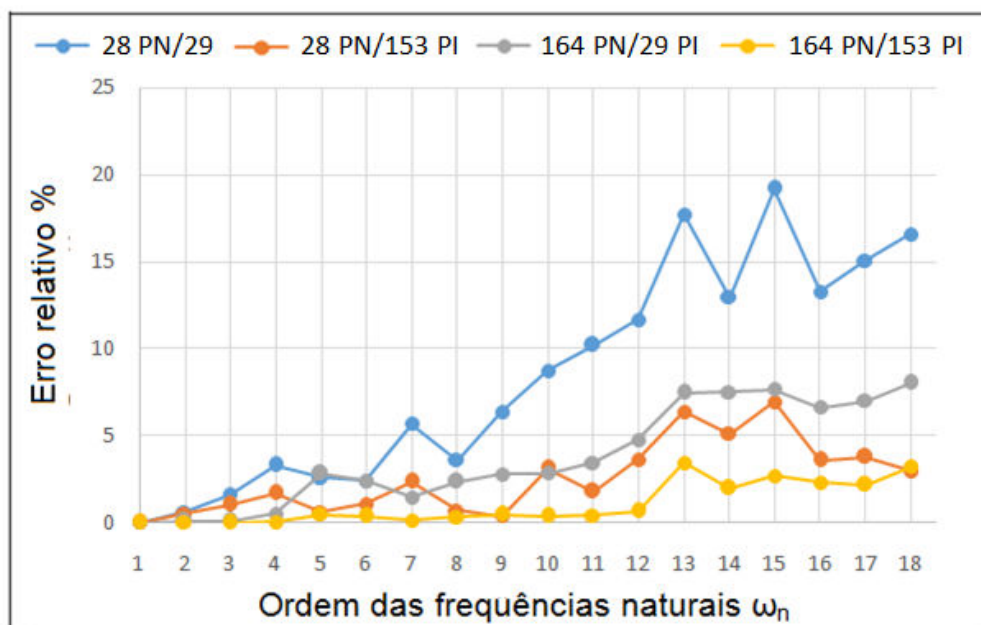


Figura 8 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECDR, usando elementos lineares para a chapa engastada

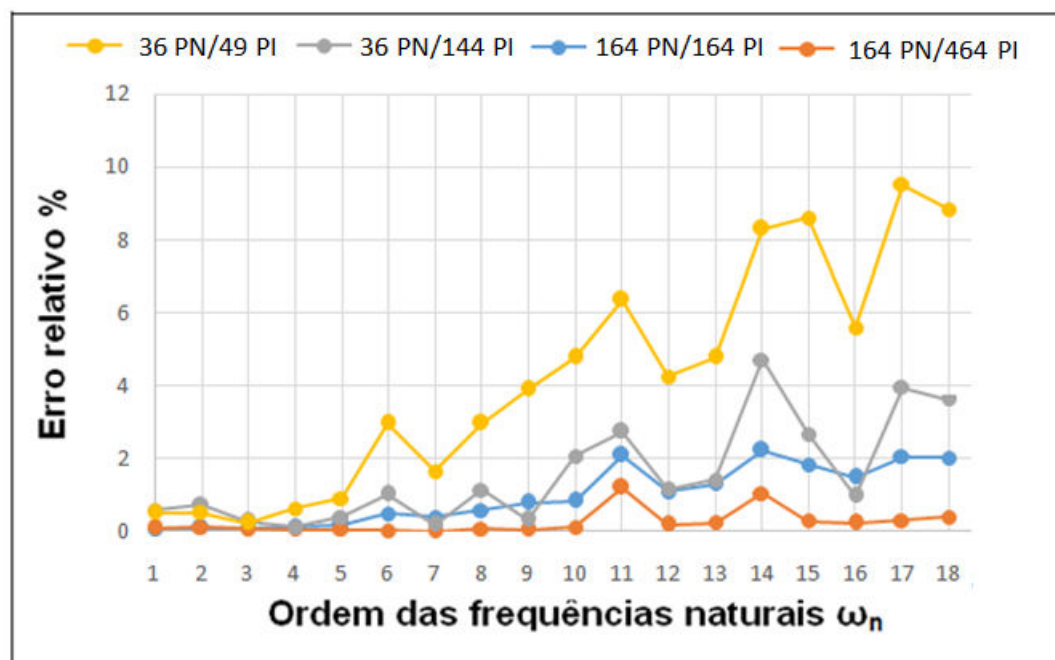


Figura 9 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECID, usando elementos lineares para a chapa engastada, com malhas menos refinadas

Os resultados da MECID são mostrados na Fig. 9. Os erros com 36 nós no contorno ficaram numa faixa equivalente aos apresentados pela MECDR. Já os erros para a malha com 164 pontos nodais apresentaram valores consideravelmente menores. Diferentemente da MECDR, o refinamento da malha de contorno influencia destacadamente a redução do erro relativo, não obstante a introdução de pontos interpolantes no interior ser fundamental ao bom desempenho das simulações.

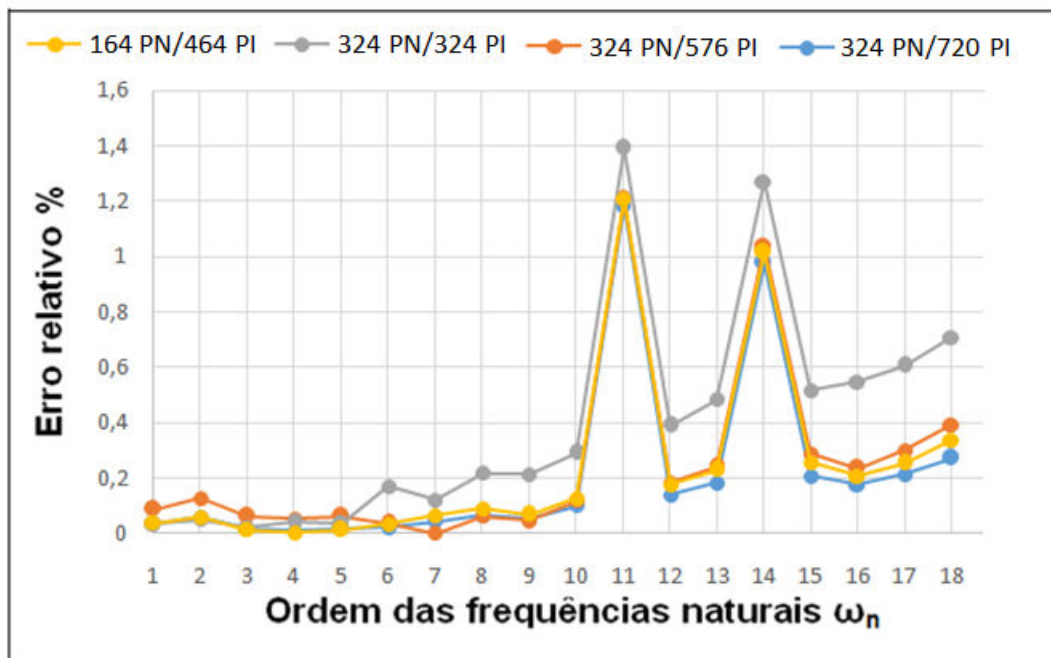


Figura 10 – Curvas de erro relativo no cálculo das frequências naturais com a MECID, usando elementos lineares para a chapa engastada, com malhas mais refinadas

Para finalizar, na Fig. 10 são apresentados os resultados do erro relativo da MECID, considerando malhas mais refinadas. O objetivo é ratificar que não apenas a introdução de pontos internos, mas também o refinamento da malha, ambos concorrem para a melhoria dos resultados. Pode-se observar que para as frequências mais altas, a malha com maior número de graus de liberdade apresenta melhores resultados.

## 7 CONCLUSÕES

A técnica da Dupla Reciprocidade ainda é a alternativa mais simples para superar dificuldades matemáticas que surgem na aplicação do Método dos Elementos de Contorno em problemas cuja equação de governo não possui operadores diferenciais auto-adjuntos. No entanto, apesar dos resultados satisfatórios em algumas aplicações, como no caso dos problemas governados pela Equação de Poisson, o MECDR apresenta problemas numéricos que tem desmotivado seu uso generalizado, como por exemplo: mau condicionamento matricial; comportamento irregular das funções radiais; dependência das funções de interpolação com a dimensão do problema e o tipo de aplicação; e ainda a qualidade insatisfatória da resposta em problemas dinâmicos, em que numerosos pontos internos são requeridos para representar propriedades como a inércia e, mesmo assim, os resultados não têm a qualidade desejada.

Neste trabalho apresentou-se uma formulação alternativa, bastante similar a MECDR, que se mostra mais robusta do que sua predecessora. Isso se deve principalmente ao fato de que a integral de domínio, aqui relacionada à inércia do sistema, é aproximada por um processo de interpolação em que as funções radiais são aplicadas mais diretamente, sem geração de duas matrizes intermediárias. Sabe-se que entre as muitas aplicações das funções de base radial na teoria da aproximação numérica, os procedimentos de interpolação simples são aqueles que têm o melhor desempenho. A MECID também inclui uma transformação de variáveis, em que se elege uma função primitiva das funções de base radial, permitindo transformar a integral de domínio em um integral de contorno. Esta transformação implica em perda de precisão, e o desempenho da MECID depende fundamentalmente da eficácia desta operação. No entanto, os resultados até agora têm sido claramente superiores em comparação com os obtidos pela MECDR. A comparação aqui efetuada ratifica essa afirmação. A MECID respondeu ao refinamento da malha de contorno e à inserção de pontos internos tal como se espera de uma técnica numérica consistente, reduzindo o nível de erros.

Desde que a MECID interpola diretamente o núcleo da integral de domínio, que inclui a solução fundamental, um maior número de pólos internos é necessário para um melhor desempenho, comparativamente a MECDR. No entanto, ao contrário desta, aumentando-se o número de pontos internos não há indícios de instabilidade numérica.

A aproximação proposta pela MECID é muito similar a uma interpolação simples e isso explica que diferentes funções, embora apresentem desempenhos diferentes, não produzem divergência nos resultados e não dependam fortemente do tipo de problema a ser resolvido. Não há qualquer restrição na formulação matemática da MECID quanto à tipologia das funções radiais a serem empregadas, e mesmo as funções radiais de suporte compacto (Loeffler et al., 2016) podem ser usadas indistintamente. Resta, naturalmente, o trabalho de implementação numérica, que se torna bem mais complicado com tais funções.

A formulação original da MECID, tal como proposta originalmente, requeria duas nuvens de diferentes pontos internos, para evitar singularidade. Uma vez que o procedimento de regularização foi bem sucedido, a aplicação da MECID não mais fornece, comparativamente a MECDR, qualquer inconveniente operacional com relação à entrada de dados.

## REFERÊNCIAS

- Braga, C. L. R., 2006. *Notas de Física Matemática*. Editora Livraria da Física, São Paulo.
- Brebbia, C. A., Dominguez, J., 1992. *Boundary Elements – An Introductory Course*, WIT Press.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin.
- Brebbia, C. A., Walker, S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London.
- Buhmann, M. D., 2003. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge Press.
- Butkov, E., 1973. *Mathematical Physics*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- Cheng, A. H. D., Young, D. L., & Tsai, C. C., 2000. Solution of Poisson's equation by iterative DRBEM using compactly supported, positive definite radial basis function. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, 24, 549 - 557.

- Dominguez, J., 1993. *Boundary Elements in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, London.
- Franke, R., 1982. Scattered data interpolation. *Mathematics of Computation*, 38, pp. 181–200.
- Golberg, M. A., Chen, C. S., 1994. The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations, *BE Communication* 5, 57-61.
- Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W. J., & Bulcão, A., 2015. Solving Helmholtz Problems using Direct Radial Basis Function Interpolation with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 61, pp. 218-225.
- Loeffler, C. F., Cruz, A. L., & Bulcão, A. 2015. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. vol. 50, p.97-108.
- Loeffler, C. F., Mansur W. J., 1986. Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno. *Revista Brasileira de Engenharia*, caderno de Engenharia Civil, vol. 4, n. 2, pp. 5-23.
- Loeffler, C. F., Mansur W. J., 1987. Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems, in: C.A. Brebbia (Ed.), *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*, Computational Mechanics Publishing, UK, pp. 105-124.
- Loeffler, C. F., Pereira, P. V. M., & Barcelos, H. M., 2014. Direct Interpolation Technique using Radial Basis Functions Applied to the Helmholtz Problem. In Mallardo, V., & Aliabadi, F. M. H., eds, *15 International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques*, pp. 223-228.
- Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J., & Bulcão, A., 2016. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. *Computational Methods in Engineering Analysis*, no prelo.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C., 1992. *The Dual Reciprocity, Boundary Element Method*, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London.
- Pessolani, R. V., 2002. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, 24(1): 23-45.
- Wendland, H., 1995. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. in Comput. Math.*, 4, 389-396.
- Wrobel, L. C., Aliabadi, M. H., 2002. *The Boundary Element Method*, Wiley, Chichester.
- Wu, Z., 1995. Compactly supported positive definite radial functions. *Adv. in Comput. Math.*, 4, 283-292.