XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

ANÁLISE NUMÉRICO-EXPERIMENTAL DA CONDUTIVIDADE TÉRMICA EM SOLOS ARENOSOS

Jonathas Rodrigues Salles de Oliveira

jonathas_salles@hotmail.com

Programa de Pós-Graduação de Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná (PPGMNE-UFPR)
Centro Politécnico - Jardim das Américas - C. P. 19011, 81531-980, Paraná, Curitiba, Brasil.

Luiz Alkimin de Lacerda

alkimin@lactec.org.br

Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento LACTEC.

Programa de Pós-Graduação de Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná (PPGMNE-UFPR)
Centro Politécnico - Jardim das Américas - C. P. 19011, 81531-980, Paraná, Curitiba, Brasil.

Abstract. *Este trabalho apresenta um estudo numérico de uma formulação computacional baseada no Método dos Elementos de Contorno para problemas de difusão de calor. Um experimento conduzido em laboratório a partir de um equipamento comercial alimentou o modelo numérico com valores de condutividade térmica. A formulação do MEC-D é bidimensional e emprega uma solução fundamental independente do tempo. O experimento é conduzido em um volume cilíndrico em condições axissimétricas de tal forma que uma seção transversal possa ser representada por um modelo bidimensional. O equipamento empregado na análise é o modelo Hukseflux que utiliza de uma sonda (agulha térmica) que possui um fio de aquecimento e um sensor de temperatura. A sonda é inserida no solo, o qual é investigado. O estudo comparativo é efetuado em solo arenoso sob diferentes condições de umidade e demonstra boa correlação e concordância com dados da literatura.*

Keywords: Método dos elementos de contorno, difusão do calor, solução fundamental independente do tempo, geração de calor.

1 INTRODUÇÃO

A análise de temperaturas obtidas a partir de ferramentas de monitoramento tem permitido identificar inúmeros problemas em engenharia, por exemplo, auxiliando na detecção de danos em concreto e infiltrações de barragens (Pettres, 2014).

Uma alternativa para o estudo da dinâmica de um determinado fenômeno é o emprego de modelos matemáticos e numéricos. Nos últimos anos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem ganho destaque como uma ferramenta poderosa para solucionar problemas complexos de engenharia. O MEC transforma a equação de domínio do problema em uma integral que relaciona valores do contorno. Em seguida, a integral de contorno é resolvida numericamente a partir da discretização do contorno (Costa, 2016).

São muitas as técnicas matemáticas utilizadas para transformar a equação diferencial que rege o problema a ser analisado em uma integral de contorno. Entre elas, tem sido desenvolvida a formulação do MEC a partir do Método dos Resíduos Ponderados (Zienkiewicz & Morgan, 1983) onde a solução da equação é aproximada por expressões em séries de funções conhecidas, com coeficientes α_n a determinar, as chamadas funções de forma φ_n, tal como:

$$\tilde{u} = \sum_n \alpha_n \varphi_n \tag{1}$$

onde $\tilde{u}$ é uma solução aproximada. Ao substituir $\tilde{u}$ no problema original surge uma função erro R, também chamada de função resíduo. Com o objetivo de anular a média ponderada do resíduo no domínio do problema, faz-se:

$$\int_\Omega w_n R d\Omega = 0 \tag{2}$$

onde w_n são as funções de ponderação que, no caso do MEC, são substituídas pela Solução Fundamental do operador diferencial do problema analisado (Brebbia, 1978). Sendo a equação diferencial do problema definida como:

$$Lf(X) = g(X) \tag{3}$$

onde f e g são funções definidas em todo o domínio do problema e L é um operador diferencial a solução poder ser encontrada por meio de uma Função de Green que é a solução da equação:

$$LG(X,\xi) = \delta(X - \xi) \tag{4}$$

A Função de Green $G(X,\xi)$ representa o efeito em um ponto campo X de uma fonte que age em um ponto escolhido ξ. Estas fontes são representadas pelo delta de Dirac: $\delta(X - \xi)$. Segundo Oliveira (2015), na ausência de condições de contorno a função de Green é chamada de solução fundamental do problema.

Segundo Costa (2016) as formulações de MEC podem ser classificadas em: (i) MEC-D (com D significando domínio), (ii) MEC-DR (com DR significando dupla reciprocidade) e (iii) MEC- DT (com DT significando domínio do tempo).

Ambas as formulações MEC-D e MEC-DT utilizam uma solução fundamental correspondente ao problema estacionário. Se a integral de domínio é mantida na equação integral, surge uma formulação MEC-D. Se a integral de domínio é transformada em integrais de contorno é gerada a formulação MEC-DR. Nestas formulações escolher um regime de marcha no tempo se torna necessário. As formulações MEC-DT empregam soluções fundamentais dependentes do tempo.

O presente trabalho apresenta uma formulação MEC-D com o avanço no tempo obtido a partir de diferenças finitas para simular a difusão de calor observada num solo arenoso a partir do aquecimento de uma região localizada no domínio do problema. Este problema foi abordado por Pettres (2014), cuja formulação serviu de base para o presente estudo.

O capítulo 2 deste artigo apresenta o modelo matemático utilizado e a formulação MEC-D. O capítulo 3 apresenta os ensaios laboratoriais de difusão que foram usados para a calibração dos modelos numéricos. O capítulo 4 apresenta um modelo geométrico de difusão com aquecimento em todo o domínio. O capítulo 5 apresenta um modelo geométrico de difusão com aquecimento em um ponto localizado no domínio (simulando o aquecimento de uma agulha) e o compara com os resultados obtidos em laboratório. Finalmente o capítulo 6 apresenta as conclusões deste estudo.

Este artigo apresenta parte do resultado do projeto de P&D PD-6491-03013/2013, intitulado "Monitoramento de Obras de Terra Através de Fibras Ópticas", executado pelos Institutos LACTEC e COPEL GeT como parte das obrigações desta última junto ao Programa de Pesquisa e Desenvolvimento do Setor Elétrico Brasileiro regulamentado pela ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica)

2 O MODELO MATEMÁTICO

De acordo com Wall (2009) a equação da difusão com termo não homogêneo igual a $F(X,t)/k$ (°C.mm^{-2}), representando a geração interna de calor, é dada por:

$$\nabla^2 u(X,t) + \frac{F(X,t)}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} \qquad X \in \Omega, \qquad X = (x,y) \tag{5}$$

onde k é a condutividade térmica cuja unidade é W/mm°C e α é o coeficiente de difusidade térmica cuja unidade é mm^2/s.

A partir dos estudos de PETTRES (2014) a equação integral básica do Método dos Elementos de Contorno é:

$$\begin{aligned} C(\xi)u(\xi,t) = {} & \int_\Gamma u^*(\xi,X)q(X,t)d\Gamma - \int_\Gamma q^*(\xi,X)u(X,t)d\Gamma \\ & -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega \frac{\partial u(X,t)}{\partial t}u^*(\xi,X)d\Omega + \frac{1}{k}\int_\Omega u^*(\xi,X)F(X,t)d\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

Utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF) e agrupando convenientemente os termos, obtém-se a Eq. 7. Em notação matricial, pode-se escrever a Eq. 7 conforme visto na Eq. 8. Na Eq. 8 **F** resulta da integral de domínio que contém a solução fundamental ponderada pelo termo de geração de calor, **H** e **G** são matrizes que resultam das integrais de contorno que contém $q^*(\xi, X)u(x)$ e $u^*(\xi, X)q(x)$ respectivamente, **M** resulta das integrais de domínio e **I** é a matriz identidade. O primeiro elemento de cada duplo superíndice indica a localização do ponte fonte ξ e o segundo, do ponto campo X , com c indicando contorno e d, domínio. Os subíndices $m+1$ e m indicam o tempo t^{m+1} = (m+1)Δt e t^m = (m)Δt, onde Δt é o intervalo de tempo. Seguindo-se o estudo de Pettres (2014) Δt foi considerado constante.

$$\begin{aligned} C(\xi)u(\xi, t+\Delta t) &= \int_\Gamma u^*(\xi, X)q(X, t+\Delta t)d\Gamma - \int_\Gamma q^*(\xi, X)u(X, t+\Delta t)d\Gamma \\ &- \frac{1}{\alpha\Delta t}\left(\int_\Omega u(X, t+\Delta t)u^*(\xi, X)d\Omega - \int_\Omega u(X, t)u^*(\xi, X)d\Omega\right) \\ &+ \frac{1}{k}\int_\Omega u^*(\xi, X)F(X, t+\Delta t)d\Omega \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} - \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} \{[\mathbf{u}^d]_{m+1} - [\mathbf{u}^d]_m\} + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{cd} \\ \mathbf{F}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \tag{8}$$

Agrupando os termos semelhantes da Eq. 8, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{cc} & \frac{1}{\alpha\Delta t}\mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{H}^{dc} & \mathbf{I} + \frac{1}{\alpha\Delta t}\mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^d \end{bmatrix}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{cc} \\ \mathbf{G}^{dc} \end{bmatrix} [\mathbf{q}^c]_{m+1} + \frac{1}{\alpha\Delta t} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{cd} \\ \mathbf{M}^{dd} \end{bmatrix} [\mathbf{u}^d]_m + \frac{1}{k} \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{cd} \\ \mathbf{F}^{dd} \end{bmatrix}_{m+1} \tag{9}$$

As soluções numéricas para o modelo matemático contendo geração constante de calor foram obtidas a partir das condições de contorno e iniciais dadas por:

$$u(X, t) = 0°C \quad X \in \Gamma \tag{10}$$

que corresponde a uma temperatura fixa para todo o intervalo de análise e

$$u_0(X, t_0) = 0°C \quad X \in \Omega \tag{11}$$

que corresponde a uma temperatura constante e nula no domínio do problema no tempo inicial de análise.

O termo de geração de calor é definido da seguinte forma:

$$\frac{F(X, t)}{k} = 10\ (°C\ mm^{-2})\ \ X \in \Omega, 0 < t < \infty \tag{12}$$

que representa geração constante de calor ao longo do tempo em todo o domínio. Pelas condições impostas na Eq. 10 e na Eq. 11, a evolução térmica do problema proposto depende da fonte geradora de calor presente na Eq. 12.

A solução analítica do presente problema em coordenadas polares é dada por Wall (2009):

$$u(r,t) = \frac{R^2 - r^2}{4s} - \frac{2}{Rs}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n R)}e^{-\alpha\lambda_n^2 t} \tag{13}$$

onde J_0 e J_1 são funções de Bessel de primeira espécie de ordens zero e um, respectivamente. Os parâmetros λ_n são as raízes positivas da equação $J_0(\lambda_n) = 0$ e nesse trabalho foram utilizadas as 4 primeiras em todas as análises como aproximação da solução numérica. Além disso:

$$s = \frac{k}{F(X,t)} \tag{14}$$

3 O ENSAIO LABORATORIAL

Em laboratório buscou-se estabelecer a variação de temperatura advinda de um aquecimento no ponto central de uma amostra de areia (com diferentes condições de umidade volumétrica).

O equipamento de medição utilizado é o modelo MTN01 do fabricante Hukseflux (D'Amélio, 2013). O mesmo utiliza-se de uma sonda (agulha térmica) que possui um fio de aquecimento e um sensor de temperatura. A sonda é inserida no solo, o qual é investigado. Os dados térmicos registrados podem ser transferidos para o computador e analisados posteriormente.

O método de medição consiste na técnica conhecida como *Non-Steady-State Probe* (NSSP). O equipamento MTN01 consiste, conforme a Fig. 1, na associação de três equipamentos. A ferramenta de inserção IT02 (2) acoplada à agulha TP07 (1) são montadas sobre o solo a ser analisado. A agulha TP07 contém tanto um fio de aquecimento quanto um medidor de temperatura. A agulha é inserida no solo. A cada passo de tempo a condutividade térmica do solo pode ser calculada. Ao final do processo o equipamento conhecido como CR01 (3) apresenta uma condutividade térmica média correspondente ao período de aquecimento.

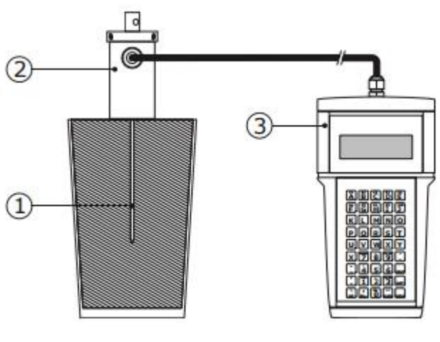

Figura 1. O equipamento MTN01 (D'AMELIO, 2013)

A variação de temperatura (ΔT) observada ao longo do experimento depende da potência da fonte (Q) e da condutividade térmica média (k):

$$\Delta T = (Q/4\pi k)(\ln t + B) \tag{15}$$

sendo ΔT em K, Q em W/m, k em W/mK, t o tempo em s e B uma constante.

O ensaio realizado consiste na utilização do equipamento MTN01 na medição da condutividade térmica média (k) de amostras de areia com umidades volumétricas diferentes.

Para todos os ensaios o molde cilíndrico de concreto com altura de 23 cm e diâmetro de 15 cm foi preenchido até uma altura de 17 cm conforme mostra a Fig. 2.

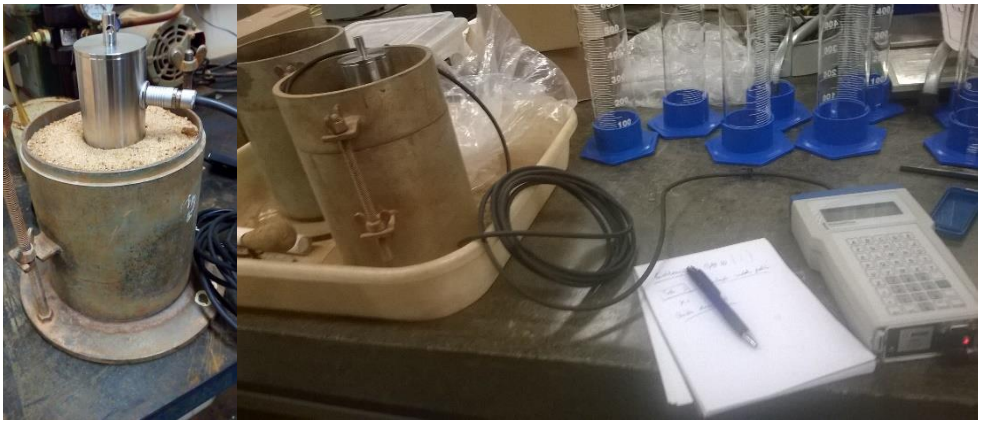

Figura 2. Medição da condutividade

Os resultados encontrados podem ser vistos na Fig. 3. Para tanto se define umidade volumétrica (θ) como:

$$\theta = Vl \;/\; Vt \tag{16}$$

onde Vl corresponde ao volume de água e Vt ao volume total do corpo de prova.

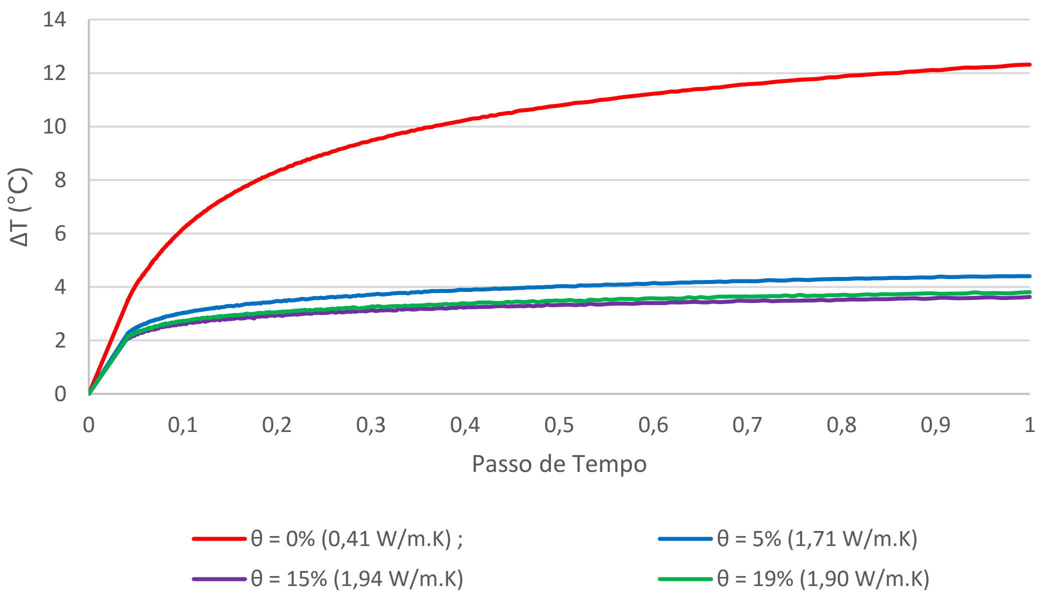

Figura 3. Variação de Temperatura observada para diferentes θ e os respectivos valores de k apontados pelo equipamento MTN01

Os valores de variação de temperatura observados na Fig. 3 foram usados para a calibração de modelos numéricos em MEC. Pode-se observar ali que valores diferentes de condutividade (k), valores estes dados pelo equipamento, interferem na forma como o aquecimento se dissipa pelo material. Materiais mais condutivos dissipam mais a temperatura e portanto apresentam ΔT menores.

4 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO IMPLEMENTADA

A formulação MEC-D foi implementada no software Matlab R2012® e aplicada para o modelo geométrico ilustrado pela Fig. 4 sob as seguintes condições de contorno e iniciais:

$$u(X,t) = 25℃ \quad X \in \Gamma \tag{17}$$

que corresponde a uma temperatura constante ao longo de todo o contorno e fixa para todo o intervalo de análise e:

$$u_0(X,t_0) = 25℃ \quad X \in \Omega \tag{18}$$

que corresponde a uma temperatura constante de 25ºC (temperatura ambiente) no domínio do problema no tempo inicial de análise.

A análise numérica foi realizada a partir de 1000 elementos constantes de contorno sendo utilizados 4 pontos para a quadratura de Gauss no processo de integração de tais elementos e 800 células triangulares de domínio como pode ser visto na Fig. 4. O modelo geométrico na Fig. 4 é quadrado (2 cm x 2 cm), embora o estudo da difusão tenha se concentrado dentro de um contorno circular e de raio igual a 1 cm. Fora deste domínio a temperatura se manteve constante e igual a ambiente ao longo de todo tempo.

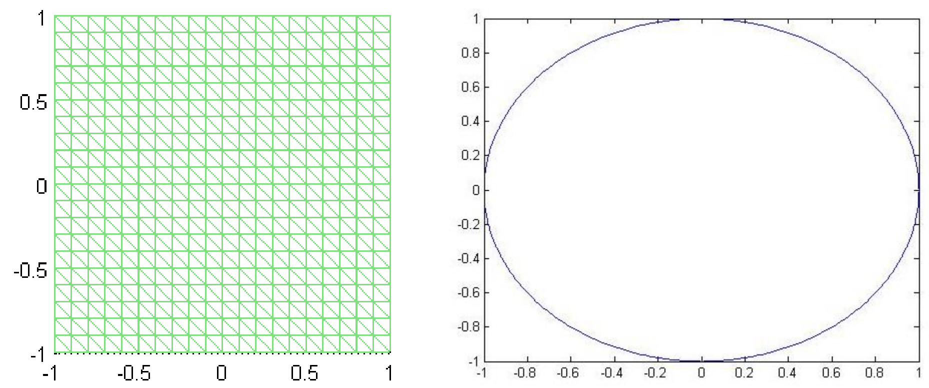

Figura 4. Discretização do Domínio e do Contorno

O processo de análise do modelo numérico foi repetido para valores de α iguais a 0,4 mm²/s, 1,0 mm²/s e 2,3 mm²/s. Na Fig. 5 é possível verificar a variação de temperatura no ponto central do domínio (0,0) para os três valores de difusividade térmica. Nesta figura é possível observar boa concordância entre o modelo numérico apresentado na Eq. 9 e a solução analítica apresentada na Eq. 13.

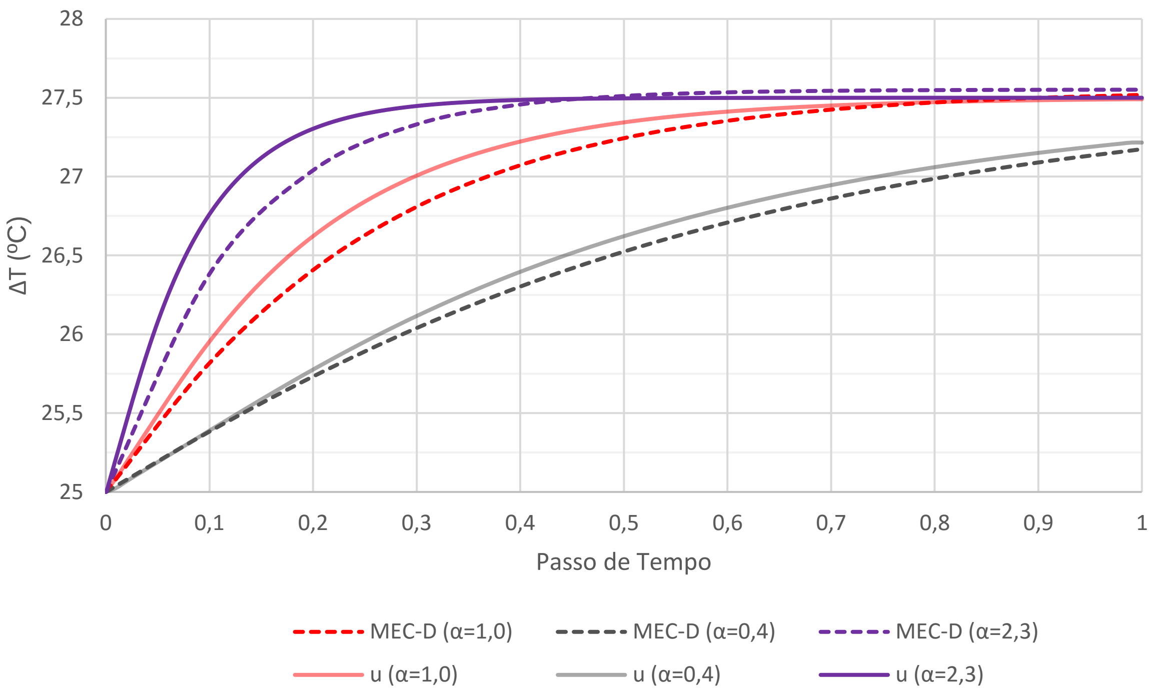

Figura 5. Comparação entre a solução numérica MEC-D e a solução analítica u no ponto central do domínio

A partir da Fig. 5 pode-se observar que a formulação do MEC-D consegue aproximar o comportamento da solução analítica para a difusão dentro de um domínio circular com geração de calor constante. Além disso pode-se observar que valores de difusidade (α) maiores que 1,0 mm²/s conduzem a variações de temperatura iguais dentro do domínio o que indica existir um limite para variação térmica em solos.

5 O MODELO GEOMÉTRICO SIMULANDO AQUECIMENTO EM PONTO CENTRAL

Buscando simular o aquecimento por uma agulha observado no ensaio laboratorial implementou-se uma variação do modelo numérico de Pettres (2014) onde o aquecimento se dá no interior do contorno. Para esta simulação o termo de geração de calor é definido da seguinte forma:

$$\frac{F(X,t)}{k} = \frac{Q}{kA}\ (°C\ mm^{-2})\ \ X \in \Omega \text{ e } x^2 + y^2 \leq R^2\ , 0 < t < \infty \tag{19}$$

que representa geração constante de calor ao longo do tempo dentro de uma região circular de raio R (no experimento o raio foi igual a 1,755 mm) centralizada no domínio, Q representa o aquecimento aplicado à agulha em W/m e A representa a área transversal da agulha.

Na Fig. 6 pode-se observar diferentes variações de temperatura para um modelo teórico de domínios e contorno iguais ao da Fig. 4, mas com um aquecimento central ao domínio de raio igual a 1,755 mm. Conforme esperado, a variação de temperatura é diretamente proporcional à magnitude de $F(X,t)/k$, e valores diferentes de α apenas interferem na velocidade com que o ΔT máximo é atingido.

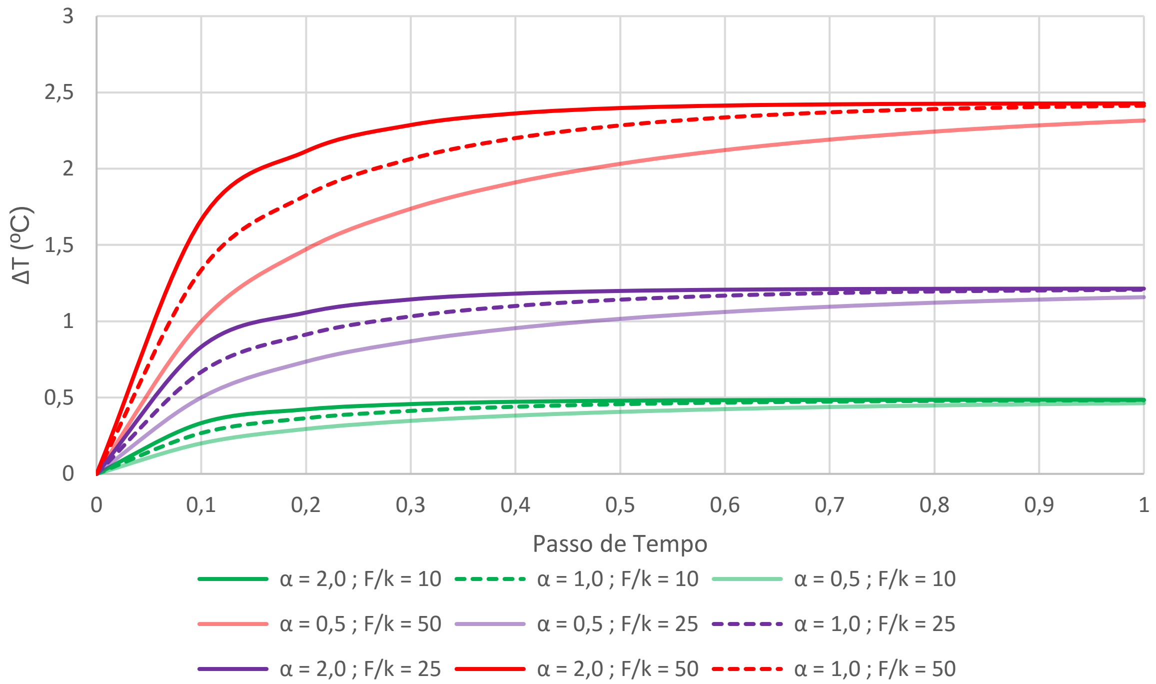

Figura 6. Avaliação da temperatura no ponto central para um modelo teórico com região de aquecimento com R = 1,755 mm

Na Fig. 7 apresenta-se resultados do modelo teórico calibrado para a condição experimental de menor condutividade térmica (k=0,41 mm²/s) o que conduz a um termo de geração de calor F/k = 274,5 °C/mm². A variação de α mostra que o modelo consegue aproximar a difusão observada em laboratório. Resultado similar é apresentado na Fig. 8, para um solo mais condutivo, com geração de calor equivalente a F/k = 59 °C/mm². Os valores de α adotados foram escolhidos dentro da faixa de 0,2 mm^2/s a 0,85 mm^2/s conforme sugerem Snyder & Melo-Abreu (2005) para solos arenosos.

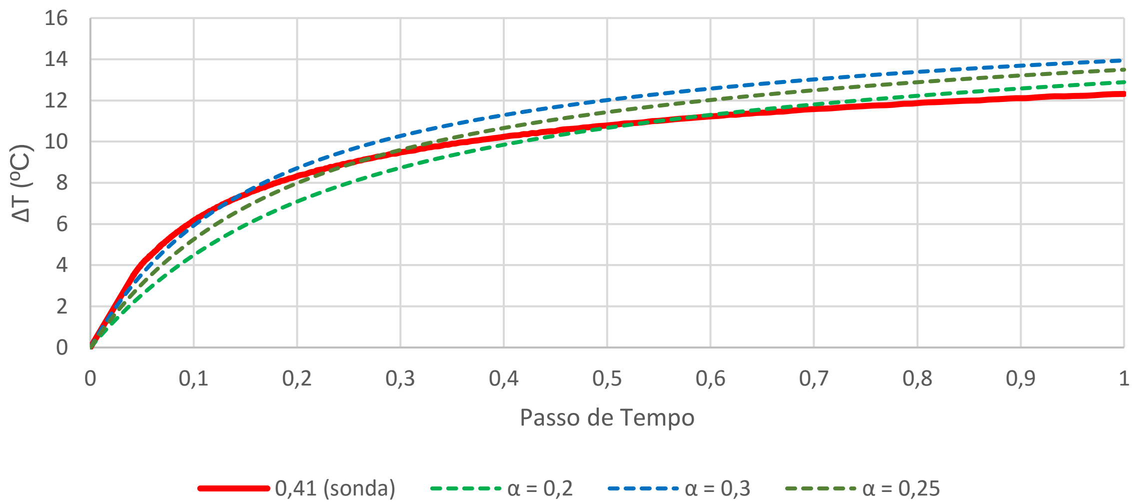

Figura 7. Comparação entre aquecimento experimental e solução de MEC-D com F/k = 274,5 °C/mm²

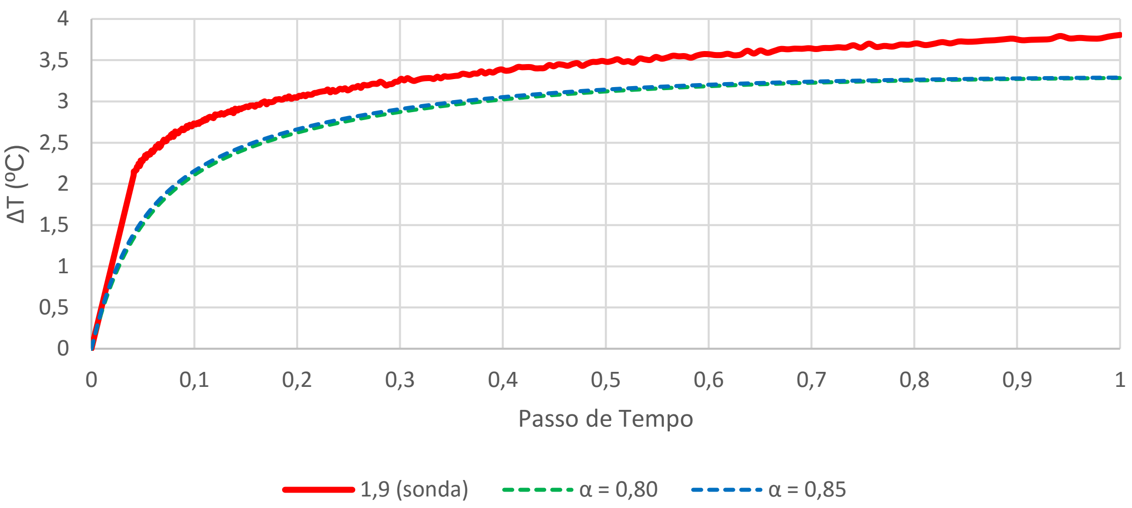

Figura 8. Comparação entre aquecimento experimental e solução de MEC-D com F/k = 59°C/mm²

Apenas com o intuito de ilustrar o fenômeno da difusão, na Fig. 9 tem-se imagens do processo de difusão do calor ao longo do tempo para o domínio do problema em diferentes instantes para α igual a 1 mm²/s e F/k = 100°C/mm². Na sequência de imagens é possível verificar a elevação gradual da temperatura no domínio. A partir de um instante inicial com uma temperatura igual a 0 ºC pode-se observar a variação de temperatura de seu centro até o contorno.

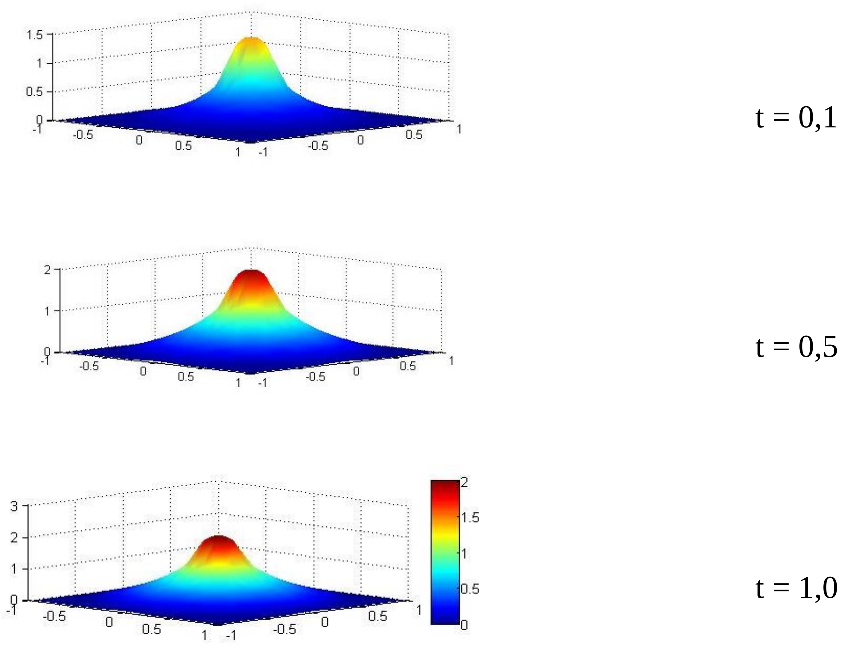

Figura 9. Variação de temperatura em um domínio

6 CONCLUSÕES

A formulação MEC-D apresentada e implementada foi validada por meio de comparações com um modelo analítico. Com a mesma formulação analisou-se um modelo axissimétrico para análise da difusão de calor em um plano transversal a partir de uma fonte de aquecimento central. Os resultados numéricos deste modelo foram calibrados a partir de resultados experimentais, resultando em parâmetros coerentes para o coeficiente de difusão do modelo. Na calibração utilizou-se um termo de geração de calor (F/k) obtido a partir dos ensaios experimentais.

7 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à COPEL e ANEEL / projeto PD 6491-0313/2013 e ao CNPq / Lei 8010/90, DI_14/1233092-2.

8 BIBLIOGRAFIA

Brebbia, C. A, 1978. *The Boundary Element Method for Engineers.* [S.l.]: Pentech Press.

Costa, V. L., 2016. *Uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno no Domínio do Tempo para o Problema da Difusão-Advecção Bidimensional.* Tese de Doutorado. Program de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – UFPR.

D'Amelio, Valentina, 2013. *TNS01 installation manual extension v1304.docx,12p.*

Oliveira, M. F., 2015 *Análise do transporte de contaminantes em domínios bidimensionais utilizando o método dos elementos de contorno*. Tese de Doutorado. Program de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – UFPR.

Pettres, R., 2014. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise da Difusão e Geração de Calor em Meios Contínuos.* Tese de Doutorado. Program de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – UFPR.

Snyder, R. L.; Melo-Abreu, J. P., 2005. *Frost Protection: fundamentals, practice, and economics.* Food and Agriculture Organization of the United Nations. Roma. Disponível em: http://www.fao.org/docrep/008/y7223e/y7223e00.htm#Contents. Acesso em: 20 de Set 2016.

Wall, J, 2009. *Transient Heat Condution: Analytical Methods*. Disponível em: http://www.ewp.rpi.edu/hartford/~wallj2/. Acesso em: 02 de Ago 2016.

Zienkiewicz, O. C.; Morgan, K., 1983. *Finite Elements & Approximation.* [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc.