



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

MÉTODO DE VOLUMES FINITOS MULTIESCALA PARA RESER- VATÓRIOS HETEROGÊNEOS E ANISOTRÓPICOS

¹Lorena M. C. Barbosa

²Darlan K. E. de Carvalho

³Paulo R. M. Lyra

¹lorenamcavalcanti@gmail.com

²dkarlo@uol.com.br

³prmlyra@ufpe.br

^{1,2,3}Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco

Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária,

Recife - PE - CEP: 50670-901, Brasil

Alessandro R. E. Antunes

Areantunes1973@gmail.com

Núcleo de Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco

Rodovia BR 104, km 59, Nova Caruaru

Caruaru - PE - CEP: 55002-970, Brasil

Resumo. Os métodos multiescala permitem obter de forma eficiente, resultados acurados para as equações de fluxo em reservatórios de petróleo muito heterogêneos, em qualquer nível de escala. Um desafio para as metodologias multiescala existentes atualmente e, em particular, para o Método de Volumes Finitos Multiescala (MsFVM), consiste na modelagem do fluxo em reservatórios de petróleo muito anisotrópicos, tendo em vista que, neste método, as condições de contorno de localização são tais que apenas os fluxos tangenciais nas interfaces dos blocos, na escala mais grossa, são considerados. Em casos mais extremos, com elevadas razões de anisotropia, o uso de condições de contorno reduzidas pode gerar campos de pressão não monótonos e campos de velocidade oscilatórios, não físicos, que implicam em grandes erros nos campos de saturação. No presente trabalho, apresentamos um Método dos Volumes Finitos Multiescala Iterativo (I-MsFVM) para resolver o problema elíptico que descreve a equação de pressão no escoamento bifásico óleo-água em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. O processo iterativo é aplicado para obter-se convergência do campo de pressão, de forma a minimizar as inconsistências geradas pelo desacoplamento dos subdomínios na escala mais grossa. Adicionalmente, comparamos os resultados obtidos por

dois Métodos de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA), o MPFA-O ou MPFA-TPS (Triangle Pressure Support) e o MPFA-FPS (Full Pressure Support) que, em princípio, apresenta propriedades de monotonicidade melhoradas com respeito ao método MPFA-O. Para a solução do problema de saturação utilizamos o Método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (First Order Upwind Method - FOUM). A fim de avaliar as estratégias estudadas, apresentaremos alguns resultados comparando a acurácia e a sua robustez frente a alguns problemas benchmark encontrados na literatura.

Keywords: *Métodos Multiescala Para Volumes Finitos, Reservatórios heterogêneos e anisotrópicos, MPFA, Escoamento bifásico em meios porosos, Simulação de reservatórios.*

1 INTRODUÇÃO

Problemas envolvendo múltiplas escalas representam fenômenos em diferentes escalas espaciais e temporais, apresentando complexos mecanismos físicos, o que os torna difíceis de serem analisados. A simulação direta de problemas de multiescala é extremamente difícil de ser realizada, pois resolver as escalas mais finas requer uma quantidade elevada da capacidade de processamento e memória computacional, o que torna o processo proibitivo atualmente (Hou e Wu, 1997; Zhou e Tchelepi, 2008; Zhou, 2010; Møyner, 2012). Para possibilitar a análise numérica de modelos geológicos mais realistas, métodos de transferências de escalas são utilizados, possibilitando solucionar as equações que governam o fenômeno físico considerando um número de graus de liberdade computacionalmente razoável, e mantendo a acurácia desejada. Neste contexto destacam-se as metodologias atualmente denominadas multiescala. O método multiescala consiste em capturar informações da escala fina através da construção de funções de base, responsáveis pela transferência de informações entre as escalas envolvidas, em cada volume de controle, considerando condições de contorno especiais, que têm a função de desacoplar os subproblemas definidos em cada volume de controle. Segundo a literatura (Lunati et al., 2011; Hajibeygi, 2011; Møyer, 2012) através dessa metodologia é possível obter soluções numéricas acuradas, com baixo custo computacional, quando comparados ao custo da simulação numérica diretamente na escala mais refinada, em reservatórios isotrópicos altamente heterogêneos, que apresentem fraturas e barreiras.

Aarnes (2003) realizou vários estudos sobre a eficiência dos métodos multiescala, e mostrou que para altas razões de anisotropia, as condições de contornos reduzidas geram campos de velocidades com recirculações, consequentemente gerando campos de saturação com soluções não-físicas. Lunati e Jenny (2007) tentaram evitar as recirculações existentes, através de um termo de correção, recalculando a velocidade de forma que a vazão na interface do volume grosso primal permaneça a mesma, mas a velocidade em cada volume fino sendo corrigida.

Hesse et al. (2008) mostrou que o método multiescala pode ser análogo aos métodos MPFA (*multipoint flux approximation*), para problemas isotrópicos homogêneos a matriz de transmissibilidade da malha da grossa MsFVM é idêntica à do MPFA-O. De forma geral o MsFVM produz soluções não monótonas para razões de anisotropia diferente de um. Para melhorar essa monotonicidade, Hesse et al. (2008) e Wang et al. (2016) propuseram reduzir o estêncil de 9 pontos para 7. Para isso retiram da matriz de transmissibilidade da malha grossa, os elementos que trazem as soluções não-monótonas.

Hesse et al. (2008) mostrou que seu operador compacto, para problemas homogêneos, elimina as oscilações em problemas anisotrópicos quando se utiliza as condições de contornos reduzidas clássicas. Wang et al. (2016) melhorou o método proposto por Hesse desenvolvendo o M-MsFVM (Monótono-MsFVM) e analisando problemas heterogêneos e anisotrópicos. Wang utiliza diferentes condições de contorno: as oscilatórias e as lineares. As condições de contorno lineares não garantem monotonicidade, mas diminuem o grau de não-monotonicidade, e as oscilatórias mostraram-se monótonas em todos os casos.

Lunati et al. (2011) e Hajibeygi (2011) propõem o uso de métodos iterativos para resolver problemas anisotrópicos, de forma que eles estimam o valor do fluxo transversal na interface dual, e de forma iterativa calculam as condições de contornos reduzidas, porém, quanto maior a razão de anisotropia do meio, maior o custo computacional do método.

Esse trabalho tem como objetivo apresentar um método multiescala iterativo para resolver problemas de escoamento bifásico óleo-água em reservatórios muito heterogêneos e anisotrópicos, baseado em uma formulação de volumes finitos, garantindo conservação local ao final de cada iteração. Foram implementadas duas variantes de Métodos de Volumes Finitos com Aproximação de Fluxo por Múltiplos Pontos (MPFA): o clássico MPFA-O e o MPFA-FPS (*Full Pressure Support*) que, em princípio, apresenta propriedades de monotonicidade melhoradas com respeito ao método MPFA-O. Para a solução do problema de saturação utilizamos o Método de Ponderação à Montante de Primeira Ordem (*First Order Upwind Method - FOUM*). Os resultados obtidos foram comparados com resultados apresentados na literatura.

2 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção são descritas as equações que governam o escoamento bifásico num reservatório de petróleo, considerando escoamentos incompressíveis e meios porosos rígidos (porosidade constante). Assumindo que a velocidade de cada fase obedece à Lei de Darcy, e que esta pode ser escrita como, $\vec{v}_j = -\underline{K} \lambda_j \nabla p_j$, onde \underline{K} é o tensor permeabilidade absoluta do meio, representando uma propriedade da rocha, p_j é a pressão da fase j , $\lambda_j = -(k_{rj} / \mu_j)$ é a mobilidade da fase j , onde k_{rj} é a permeabilidade relativa e μ_j é a viscosidade da fase. Desconsiderando os efeitos capilares, a conservação da massa para cada fase j pode ser escrita como:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\rho_j \vec{v}_j) + q_j = \phi \frac{\partial (\rho \phi S_j)}{\partial t}, j = o, w \quad (1)$$

onde ϕ é a porosidade do meio, ρ_j é a massa específica, S_j a saturação, e q_j representa um termo de fonte ou sumidouro de fluido na fase j , com o e w representando as fases óleo e água, respectivamente.

Ao considerar o meio poroso totalmente saturado, pode-se escrever a equação constitutiva ou de restrição das saturações como:

$$\sum_{j=o,w} S_j = 1 \text{ ou } S_o + S_w = 1 \quad (2)$$

Utilizando a lei de Darcy e a equação constitutiva, podemos obter a equação da pressão como:

$$-\nabla \cdot (\vec{v}) = Q \quad (3)$$

com as condições de contorno dadas pela Eq. (4):

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, & \text{em } \Gamma_N \times [0, t] \\ p &= g_D, & \text{em } \Gamma_D \times [0, t] \end{aligned} \quad (4)$$

Observe que $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_w$ é a velocidade total e $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}_o + \vec{\lambda}_w$ é a mobilidade total, $Q_o + Q_w = Q$ é a taxa de produção ou injeção, para um domínio Ω , com fronteira $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, onde Γ_D e Γ_N , são os contornos de Dirichlet e Neumann respectivamente.

O fluxo fracional da fase j pode ser definido como $f_j = \lambda_j / \lambda$, obtendo desta forma a equação da saturação da água:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot (f_w \vec{v}) + Q_w \quad (5)$$

As equações governantes do escoamento bifásico são resolvidas utilizando-se a metodologia IMPES (*Implicit Pressure, Explicit Saturation*), ou seja, resolve-se a equação de pressão de forma implícita e a equação da saturação de forma explícita, obtendo-se o campo de velocidades através da Lei de Darcy.

2.1 Formulação Numérica: Equação da Pressão

Nesta secção apresenta-se uma breve introdução sobre as formulações com aproximação de fluxo por múltiplos pontos. Para maiores informações consultar os trabalhos de Aavatsmark et al., (1998) e Edwards et al., (1998).

O Método de Diferenças Finitas Localmente Conservativo com Aproximação de Fluxo por Dois Pontos (*Two Point Flux Approximation - TPFA*), ainda é o mais utilizado por simuladores comerciais, porém algumas restrições são impostas a esse métodos, tais como: o campo de permeabilidade é restrito a tensores diagonais, as malhas empregadas são geralmente cartesianas, etc. Para resolver esse problema foram propostas as formulações com aproximação do fluxo por múltiplos pontos, referenciadas na literatura como *Multi-Point Flux Approximation* (MPFA) Aavatsmark et al., (1998) e Edwards et al., (1998).

A aplicação desta metodologia requer a consideração das denominadas regiões de interação, que podem ser obtidas, por exemplo, unindo os centróides das células vizinhas com os pontos médios das faces. Assumindo expressões lineares para a variação da pressão nas regiões de interação, obtém-se expressões para as transmissibilidades impondo a continuidade do fluxo e da pressão através das subfaces que resultam da intersecção das faces dos volumes de controle e as regiões de interação (Fig.1). Como nesse processo surgem mais incógnitas do

que equações, normalmente é necessário introduzir considerações adicionais, o que dá origem a diversas variantes da metodologia MPFA.

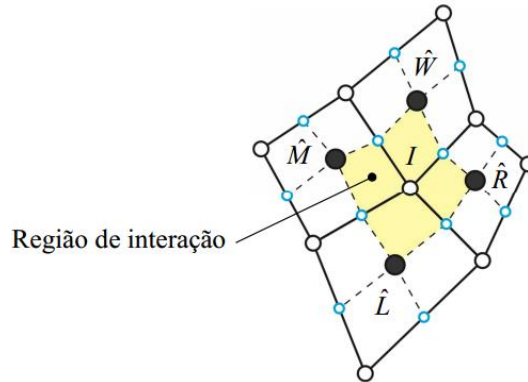


Figura 1 – Região de Interação utilizada nos métodos MPFA-O e MPFA-FPS.

De forma geral, os esquemas MPFA conseguem diminuir efeitos de orientação de malha e melhoram a acurácia da solução, mesmo para os chamados tensores completos. Tal melhoria se deve ao fato de obter-se um estêncil estendido, de nove pontos (para malhas quadrilaterais em domínios bidimensionais) decorrente da aproximação do fluxo em cada superfície de controle. Nesse trabalho, foram implementados dois métodos MPFA, o MPFA-O e o MPFA-FPS (*Full Pressure Support*).

O método MPFA-O pode apresentar soluções no campo de pressões com oscilações espúrias quando o tensor de permeabilidade apresenta elevada razão de anisotropia, ou em de malhas computacionais com elevada razão de aspecto. Isso acontece porque o campo de pressões é aproximado por um conjunto de funções lineares definidas em elementos triangulares, ou seja, existem regiões onde a pressão é extrapolada, já no MPFA-FPS a aproximação do campo de pressões é feita por funções bilineares, que dão suporte completo nas regiões de interação, ou seja, tem-se um gradiente de pressão mais robusto, visto que tem-se um grau de liberdade a mais, na equação. De forma geral, essa metodologia será aplicada na discretização da equação da pressão, e será observada a influência do MPFA na metodologia multiescala.

3 APROXIMAÇÃO MULTIESCALA

O MsFVM foi originalmente desenvolvido para possibilitar a resolução da equação elíptica da pressão de forma acurada e eficiente, em um espaço transformado, onde o número de graus de liberdade é consideravelmente menor do que no espaço original. Esta metodologia assemelha-se às metodologias denominadas upscaling, porém, mantendo sempre a conexão entre os espaços, e fornecendo soluções viáveis no espaço original. Para um melhor entendimento, considere um domínio Ω discretizado através de uma malha denominada fina, com n_f volumes, que representa o espaço vetorial original. Duas malhas auxiliares são construídas, a primeira denominada malha grossa primal com n_c volumes, é criada a partir da aglomeração de volumes da malha fina original, e representa o espaço transformado, a segunda é

criada através da aglomeração de volumes grossos primais, chamada de malha grossa dual, conforme pode ser visualizado na Fig. 2.

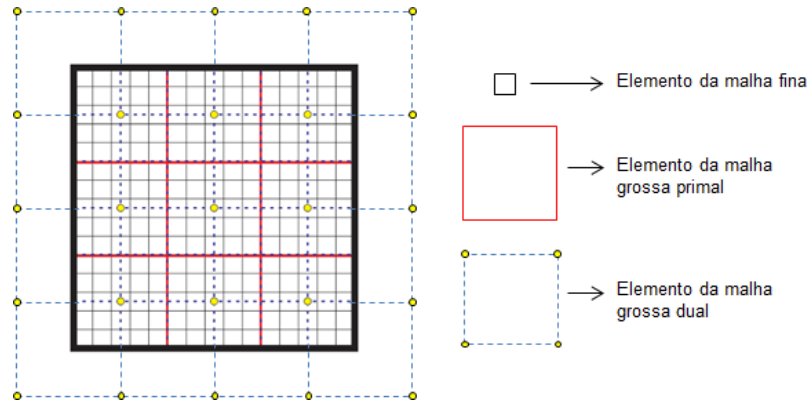


Figura 2 – Domínio Ω , volumes malha fina (Ω^f) - linhas finas e pretas, malha grossa primal Ω_p^c - linhas vermelhas, e malha grossa dual Ω_d^c - linhas tracejadas azuis, e ponto de colocação da malha grossa primal x^p (círculos amarelos).

Deseja-se obter o campo de pressão na malha fina, porém antes é preciso obter a pressão na malha grossa, e para isso necessita-se de um operador que transmita informações entre as malhas. Portanto, define-se um operador de prolongamento (\tilde{P}_{op}) que transmite informações da malha grossa para a fina. De forma análoga, define-se um operador de restrição (\tilde{R}_{or}) que transmite informações da malha fina para a grossa. Esses operadores possuem representações de forma matricial de dimensões $n_f \times n_c$ e $n_c \times n_f$ respectivamente. Desta forma, é possível obter-se uma formulação totalmente algébrica da metodologia multiescala, facilitando a sua aplicação, e a inclusão de novas físicas, como compressibilidade, por exemplo. Na seção a seguir, será detalhada esta formulação algébrica

3.1 Descrição Matemática do MsFVM

No método multiescala, pode-se definir a pressão no interior do volume fino (P^f), como:

$$\tilde{P}^f = \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c \quad (6)$$

onde \tilde{P}^c é a pressão no interior da célula (*cell-center*) de um volume grosso primal e \tilde{P}_{op} é o operador de prolongamento. Para construir o operador de prolongamento é necessário resolver um conjunto de funções de base ϕ_i^f . Essas funções são definidas como soluções de problemas elípticos homogêneos, em cada volume da malha grossa dual, como mostra as Eq.7-9:

$$-\vec{\nabla} \cdot (\tilde{K} \cdot \vec{\nabla} \phi_i^f) = 0 \quad \text{em } \Omega_d^c \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tilde{K} \frac{\partial \phi_i^I}{\partial \tau} \right) = 0 \quad \text{em } \partial \Omega_d^c \quad (8)$$

$$\phi_i^I(\mathbf{x}^p) = \delta_{Ip} \quad (9)$$

onde o índice “ i ” representa o volume de controle da malha fina contido no volume da malha grossa dual, “ I ” é o índice que indica em qual volume de controle da malha grossa primal, a função está sendo definida, τ indica a componente tangencial do fluxo na fronteira do volume da malha grossa dual, e δ_{Ip} é a função delta de Kronecker. Note que a condição e contorno da Eq. 8, desacopla os subproblemas na malha grossa.

Portanto o operador de prolongamento é definido por:

$$\tilde{P}_{op_{i,I}} = \phi_i^I(x_i) \quad (10)$$

Assim, como tem-se um operador que transmite informações da malha grossa para a malha fina, precisa-se de um operador que transmita informações da malha fina para a grossa. Este operador é denominado operador de restrição (\tilde{R}_{or}), e determina como é realizado o mapeamento da malha fina para a malha grossa, sendo definido considerando-se a conservação da massa (\tilde{E}_i). Ou seja,

$$\tilde{E}_i = 0 \quad \text{em } \Omega_i^f, i = 1, \dots, n_f \quad (11)$$

com n_f representando o número total de volumes na malha fina.

A equação 11 representa a conservação de massa na malha fina, e desta forma, a equação de conservação da massa na malha grossa é dada por:

$$\sum_{\Omega_i^f \in \Omega_{p,I}^c} \tilde{E}_i = 0 \quad \text{em } \Omega_{p,I}^c, I = 1, \dots, n_c \quad (12)$$

onde n_c representa o número total de volumes na malha grossa.

Sendo assim, o operador de restrição é construído a partir da Eq. 12, juntamente com a Eq. 11, resultando

$$\tilde{R}_{or(I,i)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Omega_i^f \subset \Omega_{p,I}^c \\ 0 & \text{se } \Omega_i^f \not\subset \Omega_{p,I}^c \end{cases} \quad (I = 1, \dots, n_c; i = 1, \dots, n_f) \quad (13)$$

Com os operadores que mapeiam as informações entre as malhas fina e grossa definidos, é possível resolver um sistema de equações na malha grossa, para obter \tilde{P}^c .

Considerando que a Eq. 3 pode ser escrita, na forma discreta, como:

$$\tilde{T}^f \tilde{P}^f = \tilde{Q}^f, \text{ para todo } \tilde{P}^f \in \Omega^f \quad (14)$$

onde \tilde{T}^f é a matriz de transmissibilidade da malha fina com dimensão $n_f \times n_f$ e \tilde{Q}^f é o vetor com as informações de termos fontes/sumidouro e/ou quantidades conhecidas das condições de contorno da malha fina, de dimensão $n_f \times 1$. Assim é possível definir o problema elíptico na malha grossa como:

$$\tilde{T}^c \tilde{P}^c = \tilde{Q}^c, \forall \tilde{P}^c \in \Omega^c \quad (15)$$

portanto existe um vetor solução \tilde{P}^c no espaço Ω^c .

Ao substituir a Eq. 6 na Eq. 14, e pré-multiplicando toda equação pelo operador de restrição (\tilde{R}_{or}) chega-se, a:

$$\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (16)$$

Comparando a Eq. 16 com a Eq. 15 tem-se que:

$$\tilde{T}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \quad (17)$$

$$\tilde{Q}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f$$

E resolvendo a Eq. 15, tem-se:

$$\tilde{P}^c = (\tilde{T}^c)^{-1} \tilde{Q}^c \quad (18)$$

E ainda, usando as Eqs. 6, 17 e 18, a solução para o campo de pressão, obtida através da formulação multiescala é dada por:

$$\tilde{P}^{ms} = \tilde{P}_{op} (\tilde{T}^c)^{-1} \tilde{Q}^c \equiv \tilde{P}_{op} [\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op}]^{-1} \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (19)$$

3.2 Cálculo do Campo de Velocidade

As condições de contorno reduzidas e o desacoplamento entre os problemas locais acarretam inconsistência da pressão nas fronteiras dos volumes grossos duais, portanto não é possível obter um campo de velocidade conservativo na malha fina, através da pressão calculada pela Eq. 19. Para contornar esse problema, calcula-se novamente a pressão, \tilde{P}^p , em cada volume grosso primal, utilizando condições de contorno de Neumann, sendo o fluxo calculado a partir das pressões conhecidas, obtidas pelo método multiescala, \tilde{P}^{ms} , nos volumes da malha fina localizados nas fronteiras dos volumes primais (Lunati e Lee, 2009; Zhou, 2010; Møyner, 2012).

Com o valor do campo de pressões recalculado P^p nas fronteiras dos volumes duais, basta obter o campo de velocidades (i.e. fluxos), localmente conservativo em todo o domínio. Adicionalmente, podem ser realizadas iterações de Jacobi no campo de pressão para garantir a consistência da solução, caracterizando um IMsFVM (*Iterative Multiscale Finite Volume Method*).

3.3 Métodos dos Volumes Finitos Multiescala Iterativo (I-MsFVM)

Na definição das funções de base, assume-se que não existe fluxo normal ao longo das fronteiras dos volumes da malha grossa dual, induzidos por quaisquer termos fonte ou sumidouro. O uso dessas condições acarreta uma inconsistência na solução do campo de pressão, o que torna o campo de pressão ineficiente para a determinação de um campo de velocidades acurado o suficiente para a aplicação na determinação do problema de transporte. Para contornar esse problema, recalcula-se a pressão utilizando as condições de contorno de Neumann, afim de obter-se um campo de pressão acurado e eficiente.

A medida que o meio torna-se anisotrópico, o uso dessas condições de contorno geram soluções não físicas, tanto no campo de pressão quanto no de saturação. Atualmente a melhor forma de se resolver problemas anisotrópicos, usando os métodos multiescala é usando técnicas iterativas. Lunati et al. (2011) e Hajibeygi (2011) iteram os operadores de prolongamento, melhorando a qualidade da solução nas fronteiras dos volumes duais, e para razões de anisotropia médias, tais como (10/1) essas técnicas se mostram viáveis. Para razões de anisotropia altas, o método se torna computacionalmente caro, visto que aumenta demasiadamente a quantidade de iterações necessárias, prejudicando a eficiência do método multiescala.

Nesse trabalho, propõe-se um método iterativo alternativo, recalculando a pressão em cada volume da malha grossa primal, utilizando as pressões anteriormente calculadas pelo MsFVM como condições de contorno de Dirichlet, de forma a melhorar a acurácia da solução. Este método pode ser ilustrado através da Fig. (3), para um problema unidimensional. Neste exemplo, considera-se três volumes grossos primais ($I=-1, I=0, I=1$) e deseja-se recalculer a pressão no volume grosso $I=0$. Para tal, utiliza-se as pressões calculadas em $I=-1$ (P_{old_lef}) e $I=1$ (P_{old_rig}), que fazem fronteira com $I=0$.

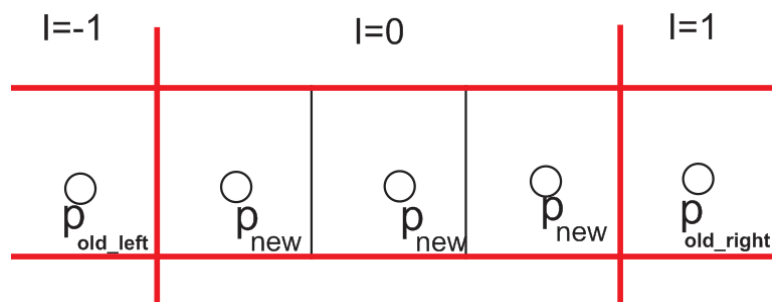


Figura 3 – Problema unidimensional com três volumes grossos primais ($I=-1, I=0$ e $I=1$).

Dessa forma, recupera-se a consistência da solução, e após a convergência do campo de pressão, segundo a tolerância especificada, resolve-se um problema de Neumann, também nos volumes da malha grossa primal, para garantir conservação local.

A convergência do campo de pressão pode ser bastante lenta, e em cada iteração tem-se um campo de velocidade oscilatório na escala fina, ou seja, o fluxo num determinado volume fino, que pertence à interface de um volume primal grosso, é muito maior do que o somatório do fluxo que atravessa toda a face primal avaliada. Com essa velocidade calcula-se a condição de contorno de Neumann, portanto mesmo com um campo de pressão acurado pelo método iterativo, o uso deste campo de velocidades para definir as condições de contorno, ter-se-á um campo de saturação com soluções não-físicas.

Observe que, com as iterações nos problemas de Dirichlet, eliminam-se as oscilações do campo de velocidade, e com poucas iterações, é possível obter soluções acuradas na pressão e na velocidade. Como será apresentado nos resultados, o erro da velocidade pode atingir até 100%, e com poucas iterações o erro cai para menos de 3%, porém ainda sendo um campo não localmente conservativo até que a solução multiescala convirja para a solução de referência (da escala fina). No momento do desacoplamento do problema de pressão, perde-se a conservação existente nas interfaces dos volumes grossos primais, por isso a necessidade de resolver um problema de Neumann para recuperar a conservação. Um dos objetivos deste trabalho é desenvolver uma metodologia multiescala que produza campos localmente conservativos.

Não é possível utilizar o fluxo calculado na solução multiescala, porque ele é oscilatório. Sabe-se que o somatório dos fluxos f_i nas n_{Faces} de cada elemento discreto satisfaz a Eq. (21).

$$\sum_{i=1}^{n_{Faces}} f_i = \sum_{i=1}^{n_{Faces}} -\frac{K}{\mu} \vec{\nabla} p \cdot \vec{N}_i = \bar{Q} \quad (21)$$

Se um problema não é conservativo tem-se que a Eq. (21) se transforma em:

$$\sum_{i=1}^{n_{Faces}} f_i - \bar{Q} = \varepsilon \quad (22)$$

onde ε é o resíduo da solução iterativa multiescala, que impede que o somatório dos fluxos seja conservativo. De forma que, quando a solução iterativa multiescala convergisse para a fina, $\varepsilon=0$.

Se em um volume grosso primal, após algumas iterações, tem um $\varepsilon = \delta$, deseja-se que ε seja nulo para que o problema seja conservativo, portanto para cada face do quadrilátero subtrai-se um percentual desse resíduo, de forma que o resíduo a ser subtraído numa determinada face (ε_{Face}) seja dado por :

$$\varepsilon_{Face} = X_{fator} \varepsilon, \quad \text{onde} \quad \varepsilon = \sum_1^4 \varepsilon_{Face} \quad (22)$$

assim, X_{fator} é o valor da ponderação que será aplicado em cada face. O ideal é que esse fator de ponderação leve em conta as propriedades do meio, por exemplo, em regiões que existam barreiras que atravessem as faces grossas primais, a subtração da vazão ou é baixíssima ou nula. Nesse trabalho, usa-se uma média geométrica simples, onde $X_{fator} = 1/4$, ou seja, o erro é subtraído igualmente em cada fluxo da face. De forma análoga, cada face do volume grosso primal contém vários volumes finos, então quando escolhe-se uma face, faz-se uma nova

ponderação do resíduo (Y_{fator}), para cada volume fino, onde $\varepsilon_{Por_Elemento} = Y_{fator} \varepsilon_{face}$, assim subtraindo $\varepsilon_{Por_Elemento}$ tem-se um novo fluxo conservativo, dado por:

$$\sum f_{i,face}^{Novo} = (f_1 - \varepsilon_1) + (f_2 - \varepsilon_2) + \dots = \sum f_{i,face}^{Antigo} - \varepsilon_{face} \quad (23)$$

Repetindo esse processo para cada volume grosso primal, guarda-se o valor do novo fluxo conservativo, que será utilizado para calcular o novo resíduo do próximo volume grosso primal. Até que todo o meio esteja conservativo. Com o novo fluxo calculado para cada fronteira grossa primal, calcula-se um novo campo de pressão usando as condições de contorno de Neumann, desta vez localmente conservativo.

3.4 Cálculo do Erro da Solução Multiescala

Para avaliar a acurácia do procedimento descrito nesse trabalho, define-se os erros relativo e absoluto em cada iteração, E_{rel} e E_{abs} , dados por:

$$E_{rel} = \frac{|P - P^{ms}|}{|P|} \quad (24)$$

$$E_{abs} = |P - P^{ms}| \quad (25)$$

onde P e P^{ms} são as soluções de referência e multiescala, respectivamente. Também foi utilizado o erro médio definido como a média aritmética do erro relativo, definida por:

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N E_{rel_j} \quad (26)$$

onde N é a quantidade de elementos da malha fina avaliados. Nesse caso são selecionados os elementos da malha fina onde deseja-se avaliar o erro médio.

Por fim, foi utilizada a norma do supremo, ou infinito, dada por:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{i=1:N} \{|A_i|\} \quad (27)$$

onde A é um vetor de dimensão $N \times 1$.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos considerando-se um escoamento bifásico óleo-água, num domínio 2D utilizando a metodologia IMPES. As soluções de referência foram obtidas resolvendo-se a equação da pressão e saturação diretamente na malha fina, e as soluções via método multiescala foram obtidas considerando-se diferentes razões de engrossamento. Utilizou-se uma formulação de volumes finitos do tipo MPFA-O e MPFA-FPS para

a equação da pressão, e para a equação da saturação uma formulação explícita do tipo *upwind* de primeira ordem.

4.1 Escoamento bifásico numa Configuração de 1/4 de Cinco Poços num Reservatório homogêneo e levemente Anisotrópico

Considerou-se uma malha fina com 30x30 volumes, onde simulou-se apenas um quarto do domínio de um reservatório com cinco poços, onde as condições de contorno “externas” são de fluxo nulo ao longo de todas as fronteiras do reservatório e as condições de internas ao reservatório são: pressão prescrita no poço de produção ($\bar{p}_p = 0$), saturação da água $S_w = 1.0$, vazão prescrita no poço de injeção ($\bar{Q}_{inj} = 1$), as saturações residuais do óleo e da água no reservatório são $S_{or} = S_{wr} = 0.0$, a razão entre as viscosidades das fases é $\mu_o / \mu_w = 4$ (Fig.4). O tensor de permeabilidade absoluta, levemente anisotrópico é dado, por:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

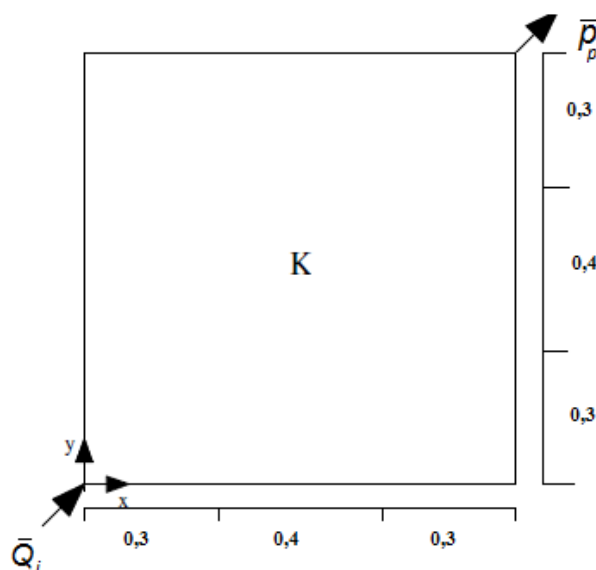


Figura 4. Domínio bidimensional do 1/4 Five Spot.

Neste exemplo, observou-se o comportamento da solução multiescala sem iteração, quando tem-se um meio levemente anisotrópico. Neste problema usou-se apenas as formulações de volumes finitos do tipo MPFA-O, para calcular a pressão tanto na malha fina, quanto no método multiescala.

Na Figura 5 observam-se as soluções de referência e multiescala, que foi obtida com uma malha grossa primal com dimensão de 3x3, caracterizando um fator de engrossamento de 10. É possível visualizar, qualitativamente, que para meios levemente anisotrópicos a solução multiescala é acurada. O erro máximo no campo de pressão é de 2.78%.

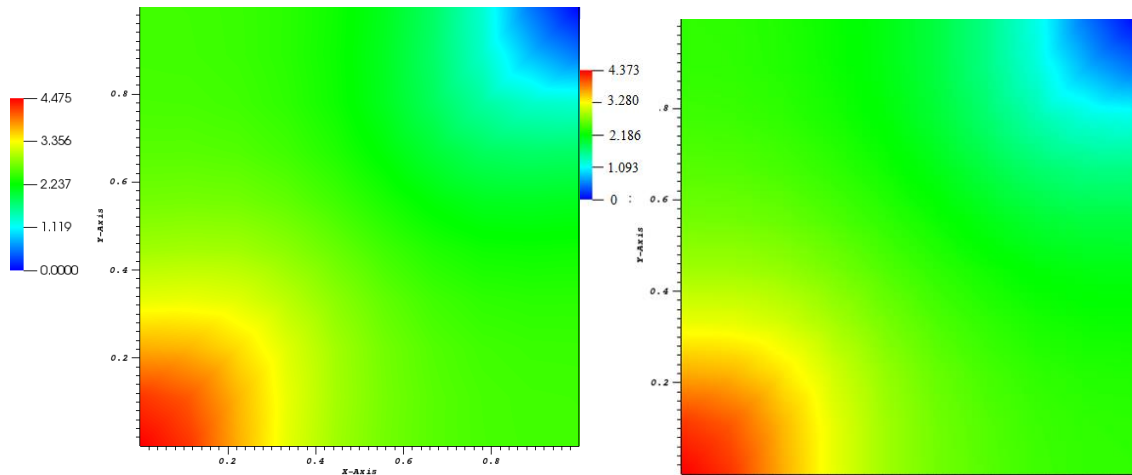


Figura 5. Campo de Pressão – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.

A Figura 6 mostra os campos de saturação para um PVI (*Porous Volume Injected*) igual a 0.15. Observa-se que o campo de saturação obtido pela solução multiescala é mais difusivo, quando comparado com a solução de referência. O erro relativo do campo de saturação não chega a $E_{rel} = 1.81\%$. Na Figura 7 tem-se as curvas de contorno, onde é possível comparar a frente de saturação, para ambos os métodos, e perceber que são bastante similares, confirmando a boa acurácia da solução.

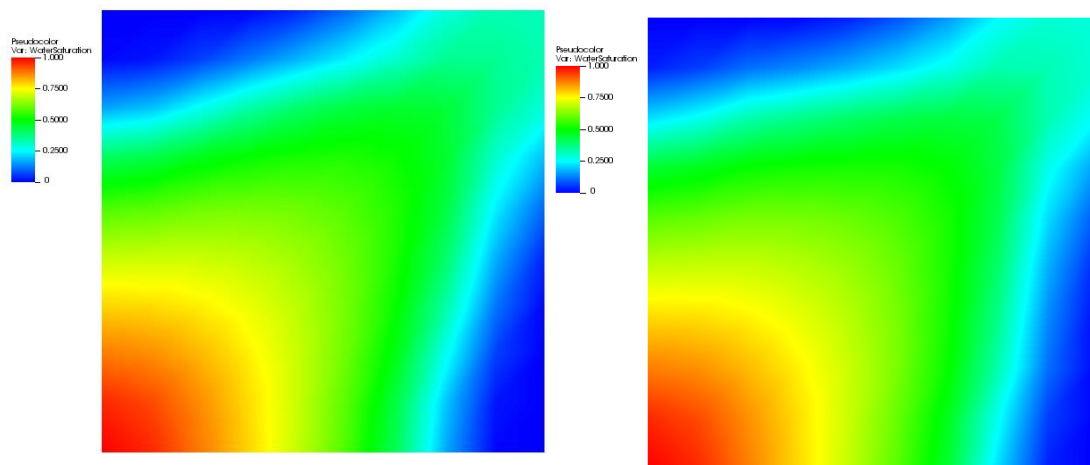


Figura 6. Campo de Saturação – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.

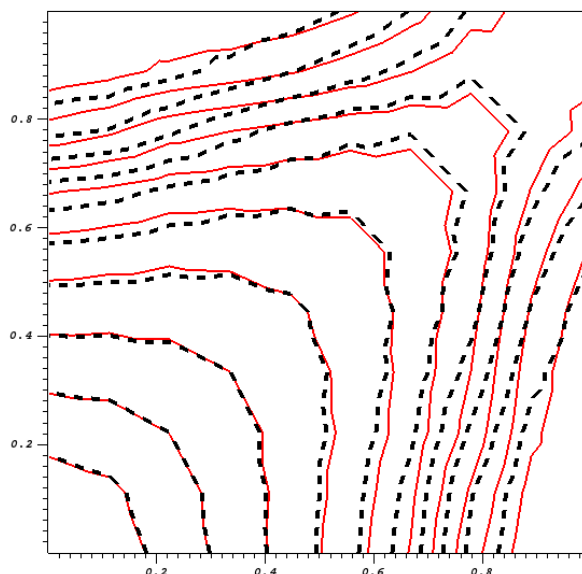


Figura 7 – Curvas de Contorno - a) Solução de referência-Preta ; b) Solução Multiescala-Vermelha

4.2 Escoamento bifásico numa Configuração de ¼ de Cinco Poços num Reservatório homogêneo Com razão de anisotropia 10

Considere o mesmo problema descrito na secção anterior, porém agora considerando um tensor de permeabilidade com razão de anisotropia, definido por $K_{yy} = 10K_{xx}$ e $K_{yx} = K_{xy} = 0$. Novamente, usou-se apenas a formulação de volumes finitos do tipo MPFA-O, para discretizar a equação da pressão. Neste exemplo mostra-se a solução de referência, a do método multiescala sem iteração e a do método multiescala iterativo.

A Figura 9 mostra os campos de saturações para um PVI=0.11, para a solução multiescala e a solução de referência. Percebe-se que os campos de saturações são bastante diferentes. O erro no campo de pressão chegou a 60%, e 104% no campo de velocidade. Portanto como relata a literatura, a solução multiescala não iterativa, pode gerar soluções não-físicas para o campo de saturação.

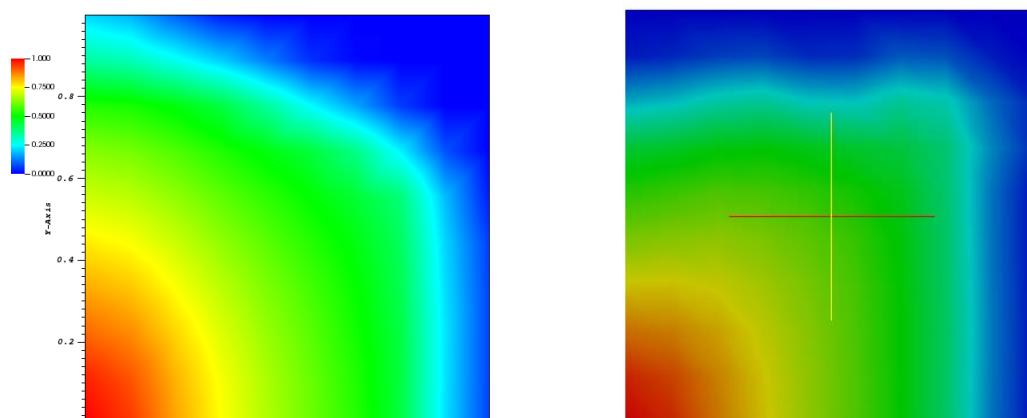


Figura 9. Campo de Saturação – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.

A Figura 10 mostra o campo de saturação da solução multiescala iterativa, e as curvas de contorno. Observe que o método iterativo é capaz de corrigir as oscilações do campo de saturação, fazendo o erro cair para 2.8%, em apenas 7 iterações.

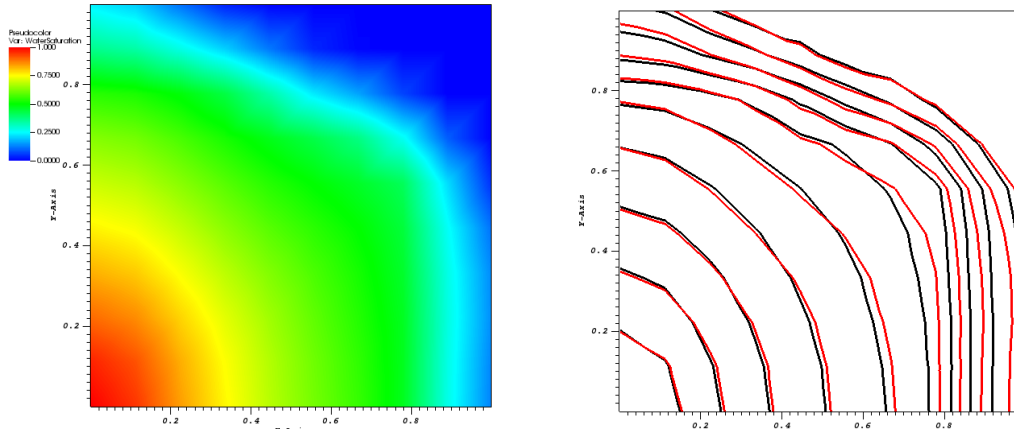


Figura 10. Campo de Saturação – a) Solução Multiescala Iterativa ; b) Curvas de Contorno; Preta Solução de Referência, Vermelha Solução Multiescala Iterativa.

A Figura 11 mostra a solução iterativa multiescala, e a solução de referência. O erro no campo de pressão é de 6.15%.

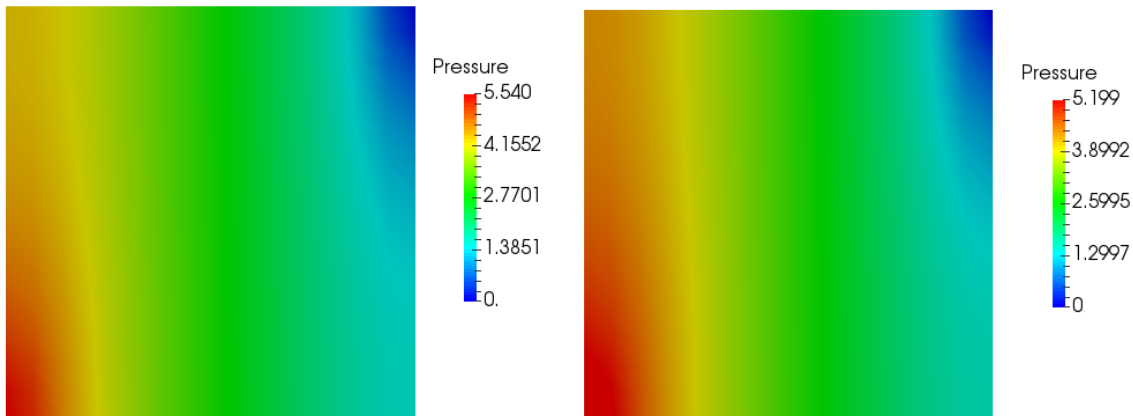


Figura 11. Campo de Pressão – a) Solução de referência; b) Solução Multiescala.

4.3 Escoamento Monofásico numa Configuração de ¼ de Cinco Poços num Reservatório altamente heterogêneo e anisotrópico

Neste último exemplo, comparou-se a influência das formulações MPFA-O e MPFA-FPS na acurácia da solução multiescala. Para isso, foi resolvido o mesmo problema já descrito nessas seções anteriores, porém com um tensor de permeabilidade, anisotrópico e heterogêneo, extraído do trabalho do Herbin e Hubert (2008), descrito a seguir:

$$\underline{K}(x, y) = \begin{bmatrix} y_1^2 + \theta x_1^2 & -(1-\theta)x_1y_1 \\ -(1-\theta)x_1y_1 & x_1^2 + \theta y_1^2 \end{bmatrix}, \text{ com } \theta = 10^2 \quad (25)$$

Na Figura 12 observa-se o comportamento do campo de pressão da solução de referência, observe que para esse caso em particular as soluções MPFA-O e MPFA-FPS são bastante diferentes.

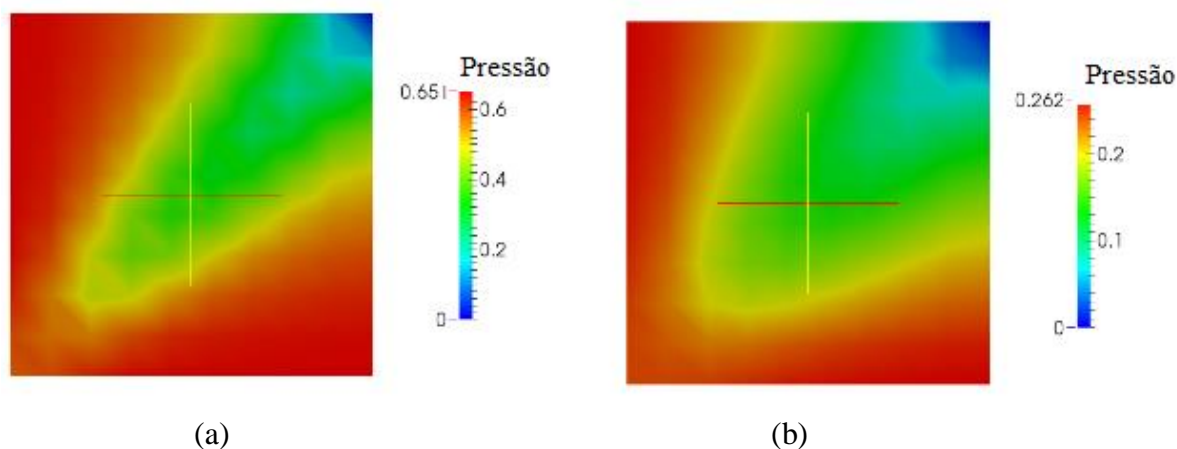


Figura 12. Campo de Saturação - Solução de referência; a) MPFA-O; b) MPFA-FPS

A Figura 13 apresenta a solução I-MsFVM. Observe qualitativamente que a solução multiescala obtida pelo MPFA-O não consegue reproduzir fielmente o campo de pressão da solução de referência, embora o erro usando a norma do infinito seja de 4.1%. Já a solução obtida pelo I-MsFVM/MPFA-FPS, apresenta-se em bastante conformidade com a solução de referência.

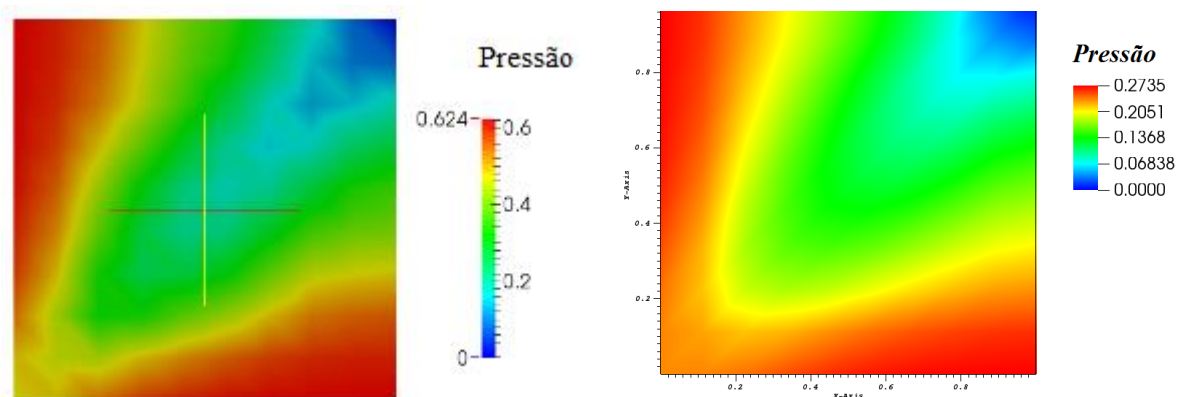


Figura 13. Campo de Pressão - a) I-MsFVM MPFA-O ; b) I-MsFVM MPFA-FPS

As figuras 14 e 15 mostram a convergência do campo de pressão para diferentes passos de iterações. No primeiro passo, usando a formulação I-MsFVM/MPFA-O, o erro no campo de pressão é de 34,7%, e observe que conforme aumenta o número de iterações, o erro cai, até chegar a 4,1% em 30 iterações. Ainda assim a solução I-MsFVM/MPFA-O apresenta-se muito mais difusiva do que a MPFA-O de referência. Em se tratando da solução I-MsFVM/MPFA-FPS, o erro no campo de pressão é de 38%, e com apenas 30 iterações é possível reduzir erro para 4,2%.

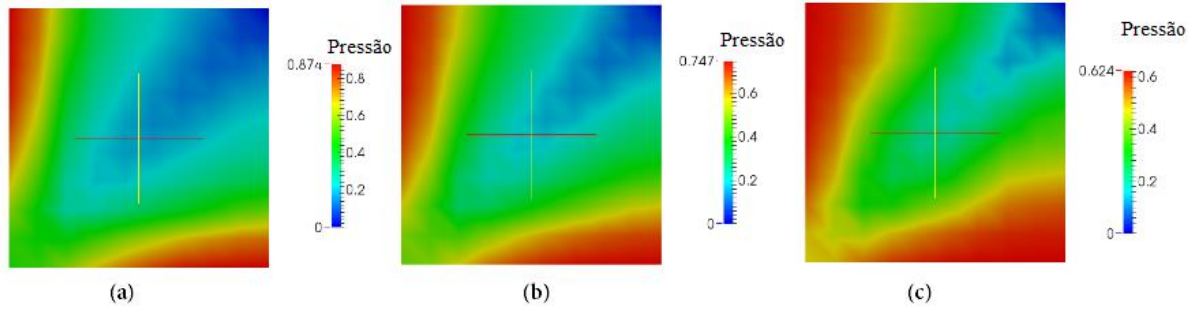


Figura 14. Campo de Pressão para o I-MsFVM-O- a) 1 iteração; b) 10 iterações; c) 30 iterações

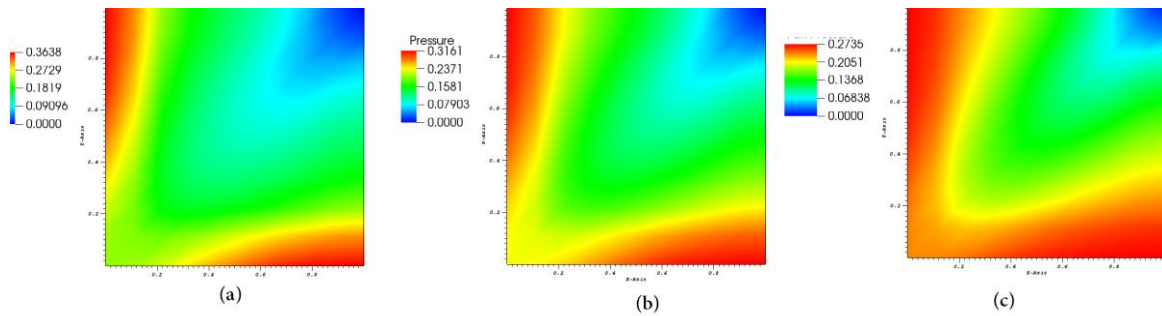


Figura 15. Campo de Pressão para o I-MsFVM-FPS a) 1 iteração; b) 10 iterações; c) 30 iterações

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho apresentou-se uma versão de um método de volumes finitos multiescala iterativo capaz de resolver problemas elípticos heterogêneos e anisotrópicos utilizando formulações de volumes finitos do tipo MPFA-O e MPFA-FPS. E utilizando um procedimento iterativo alternativo aos encontrados na literatura, efetuando iterações de Jacobi em problemas de Dirichlet, e ao final resolvendo um problema de Neumann para garantir conservação local. Para um campo anisotrópico e altamente heterogêneo foi possível obter um campo de pressão acurado o suficiente para obter-se um campo de velocidades consistente e localmente conservativo, o que é essencial para a solução do problema de transporte. Embora esses resultados sejam preliminares, a solução I-MsFVM/MPFA-FPS apresentou resultados melhores quando comparados aos resultados obtidos pelo I-MsFVM/MPFA-O. Portanto os resultados se mostram bastante promissores. É importante em trabalhos futuros, observar a influência da razão de engrossamento, e a influência dos métodos MPFA's na taxa de convergência do método multiescala.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), CENPES-PETROBRÁS (SIGER-Rede Temática de Simulação e Gerenciamento de Reservatórios) e a FINEP (Financiamento de Estudos e Projetos) pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aarnes J. E. , 2003. On the use of a mixed multiscale finite element method for greater flexibility and increased speed or improved accuracy in reservoir simulation, *Multiscale Model. Simul.*, vol. 2, pp. 421–439.
- Aavatsmark, I; Barkve, T; Bøe Ø; Mannseth, T. , 1998. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I. Derivation of the methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*; vol. 19, pp. 765–781.
- Edwards, M. G; Rogers, C. F., 1998. Finite Volume Discretization with Imposed Flux Continuity for the General Tensor Pressure Equation. *Computational Geoscience*; vol 2, pp. 259–290.
- Hajibeygi, H., 2011. *Iterative multiscale finite volume method for multiphase flow in porous media with complex physics*, Sharif University of Technology.
- Herbin, R.; Hubert, F., 2008. *Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids*, in *Finite Volumes for Complex Applications V*, R. Eymard and J.-M. H´erard, eds., ISTE, London; John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, pp. 659–692.
- Hesse, A.M., Mallison, B. T, Tchelepi A. H., 2008. Compact Multiscale Finite Volume Method for Heterogeneous Anisotropic Elliptic Equations. *Multiscale Modeling & Simulation*, Vol. 7, No. 2 , pp. 934-962.
- Hou, T., & Wu, X. H., 1997. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, vol. 134, pp.169-189.
- Lunati, I. , Jenny, P. , 2007. Treating highly anisotropic subsurface flow with the multiscale finite-volume method. *Multiscale Modeling & Simulation* , Vol. 6, n. 1, pp. 308-318.
- Lunati, I. & Lee, S. H., 2009. An operator formulation of the Multiscale Finite-Volume Method with correction function. *Multiscale Modeling & Simulation* , Vol. 8, n. 1, pp. 96-109.
- Lunati, I., Tyagi M., & Lee S.H., 2011. An iterative multiscale finite volume algorithm converging to the exact solution. *Journal of Computational Physics*, vol. 230, pp. 1849–1864.
- Møyner, O., 2012. *Multiscale Finite Volume Methods: extension to unstructured grids with applications in reservoir simulation*. MSc dissertation, University of Science and Technology.
- Zhou, H., & Tchelepi, H. A., 2008. Operator-based multi-scale method for compressible flow. *The Society of Petroleum Engineers*, vol. 13, pp. 267-273.
- Zhou, H., 2010. *Algebraic Multiscale Finite-Volume for reservoir simulation*. Ph.D. Thesis, Stanford University.
- Wang, Y., Hajibeygi, H., Tchelepi, H.A., 2016. Monotone multiscale finite volume method. *Computational Geosciences*, vol. 20, n. 3, pp. 509-524.