



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES POLIGONAIS DE ELEMENTOS LINEARES DE CONCRETO ARMADO SUJEITAS À FLEXÃO COMPOSTA

Flávia Castro de Faria

Amilton Rodrigues da Silva

flaviacastrofaria@gmail.com

amiltonengcivil@bol.com

Departamento de Engenharia Civil

Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil

Resumo. O concreto é o material mais utilizado na confecção de elementos estruturais para a construção civil no mundo. Devido à sua baixa resistência à tração ele é reforçado com barras de aço formando o concreto armado. Elementos lineares de concreto armado são comuns em edifícios de múltiplos pavimentos, pontes, galpões industriais, entre outros. O objetivo desse trabalho é utilizar um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão composta, de forma que, a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. Para isso, foi implementada uma rotina capaz de fornecer os esforços resistentes de uma seção poligonal de concreto reforçado com barras de aço utilizando formulações desenvolvidas em dissertações e teses do PROPEC-EM-UFOP. As variáveis contínuas de projetos são as áreas das barras e os parâmetros da deformada da seção. Através de um processo iterativo, controlando o tamanho do passo a cada iteração, o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto será aproximado por um problema linear, o qual terá seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

Palavras-Chave: Otimização, Concreto Armado, Simplex, Flexão Composta.

1 INTRODUÇÃO

Concreto é um material de construção resultante da mistura de aglomerantes, água e agregados em proporções adequadas. Dentre suas principais vantagens cita-se: ter baixo custo; ser moldável, permitindo grande variabilidade de formas e de concepções arquitetônicas; ter métodos de manuseio e dimensionamento bem difundidos; entre outras. Devido suas vantagens, o concreto é o material mais utilizado na confecção de elementos estruturais empregado na construção civil.

As principais deficiências do concreto são a fragilidade e sua baixa resistência à tração, em torno de 10% da sua resistência a compressão. Para suprir essas deficiências percebeu-se a necessidade de adicionar ao concreto simples supracitado um material de boa resistência à tração e ductilidade, propriedades encontradas no aço. Com esse material composto de concreto simples e barras de aço, tem-se então o concreto armado, onde as barras absorvem as tensões de tração e o concreto absorve as tensões de compressão.

De acordo com ABNT NBR 6118 (2014) elementos de concreto armado são aqueles cujo comportamento estrutural depende da aderência entre concreto e armadura, e nos quais não se aplicam alongamentos iniciais das armaduras antes da materialização da aderência.

O sucesso de um projeto de engenharia é alcançado quando é possível conciliar a segurança com um baixo custo em um tempo hábil. Segundo a ABNT NBR 6118 (2014) os requisitos de qualidade de uma estrutura de concreto são classificados em três grupos distintos, capacidade resistente, desempenho de serviço e durabilidade.

A otimização visa alcançar esse sucesso, ou seja, dar a algo o seu rendimento ótimo, criando-lhe as condições mais favoráveis ou dando a elas seu melhor partido possível, tornar algo ótimo ou ideal. Neste caso, o sucesso será posicionar e quantificar as barras de aço em uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita à flexão composta, obtendo-se assim, a quantidade mínima de aço para que a seção suporte os esforços solicitantes impostos ao elemento de concreto em análise.

2 OBJETIVOS

Um projeto estrutural deve garantir de forma primordial e com um custo acessível que a estrutura seja capaz de cumprir de maneira eficaz todas suas funções, como, por exemplo, suportar os carregamentos que a mesma está imposta. Uma maneira de garantir os objetivos citados acima com segurança e economia é fazendo a otimização do produto e/ou serviço. Segundo Maia (2009), uma grande vantagem de otimizar projetos é o abandono de parâmetros baseados na intuição ou na experiência dos engenheiros, enfatizando a busca por uma solução que atenda as exigências de projetos otimizando uma função objetivo, geralmente relacionada com o custo de produção e execução do projeto.

Visando a otimização de elementos poligonais em concreto armado, o principal objetivo deste trabalho é utilizar um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão composta, de forma que a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes e garantindo a segurança estrutural.

No desenvolvimento desse trabalho foi implementada uma rotina capaz de fornecer os esforços resistentes de uma seção poligonal de concreto reforçado com barras de aço. Para isso utilizou-se formulações desenvolvidas em dissertações e teses do PROPEC-EM-UFOP (Caldas, 2004, Muniz, 2005, Silva, 2007).

Neste trabalho utilizou-se a linguagem de programação C++ para executar a implementação computacional. Toda implementação computacional necessária para o

desenvolvimento desse trabalho proposto foi construída usando o software Visual Studio Community 2015 da Microsoft disponível na data dessa publicação no endereço: <https://www.visualstudio.com/pt-br/downloads/download-visual-studio-vs.aspx>.

Através de um processo iterativo, controlando o tamanho do passo a cada iteração, o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto será aproximado por um problema linear, o qual terá seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex.

3 O MÉTODO SIMPLEX

O método Simplex é um algoritmo iterativo que busca a solução que minimiza uma determinada função objetivo atendendo a específicas restrições de igualdade e desigualdade. Foi desenvolvido há mais de 65 anos por Dantzig e após a evolução dos computadores tornou-se uma ferramenta poderosa de otimização no campo da economia, administração e engenharia.

Nesse método, as restrições e a função objetivo devem ter relações lineares com as variáveis de projeto, sendo por isso chamado de programação linear. A programação linear é iniciada e analisada na sua forma padrão dada pela Eq. (3.1) abaixo. Nessa expressão, \mathbf{c} e \mathbf{x} são vetores em \mathfrak{R}^n , \mathbf{b} é um vetor em \mathfrak{R}^m e \mathbf{A} é uma matriz $m \times n$.

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{sujeita a} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Se o vetor \mathbf{x} satisfaz o problema da Eq. (3.1) diz-se que ele é um ponto viável. O conjunto de pontos viáveis forma um poliedro convexo com suas faces dadas por polígonos. Em problemas de otimização linear o mínimo local é sempre o mínimo global, característica atribuída também aos problemas convexos, já que o problema linear é um problema convexo.

Todo problema de otimização linear com restrições de igualdade e desigualdade pode ser facilmente colocado na forma padrão dada pela Eq. (3.1), como pode ser visto em Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985) e Nocedal e Wright (2006).

Bazaraa e Shetty (1993) apresentam em seu livro as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT (Karush, Kuhn e Tucker) demonstrando que, se um ponto viável \mathbf{x}^* de um problema de programação linear satisfaz essas condições então o menor valor que a função objetivo pode assumir respeitando todas as restrições é esse ponto. O método Simplex gera em seu processo iterativo uma sequência de pontos viáveis básicos, parando quando um desses pontos satisfizer as condições de otimalidade de primeira ordem de KKT identificando esse ponto como o ponto de ótimo.

4 ELEMENTOS LINEARES DE CONCRETO ARMADO SOB FLEXÃO COMPOSTA

4.1 Considerações Referentes a Otimização

O Primeiro passo para executar uma otimização é definir de maneira bem clara a variáveis de projeto, a função objetivo e as restrições do problema em questão. Segundo Bastos (2004) o projeto estrutural ótimo é obtido a partir de diversas análises, levando-se em consideração as inúmeras possibilidades das variáveis de projeto dentro de um conjunto viável de soluções condicionado às restrições de norma e de desempenho.

4.1.1 Função Objetivo

Também conhecida como função desempenho, é a função que deseja-se determinar o seu mínimo ou o seu máximo. Em problemas determinísticos de otimização estrutural a função objetivo geralmente é o volume ou o peso da estrutura, e as restrições estão relacionadas aos requisitos normativos quanto a tensões e deslocamentos (Verzenhassi, 2008). Neste caso como o objetivo é determinar a quantidade mínima de barras de aços e suas posições para que a estrutura em análise resista aos esforços solicitantes com segurança, deve-se então determinar o mínimo da função objetivo, Eq. (4.1).

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n A_{si} \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), n é o número de barras, A_{si} são as áreas das n barras, e \mathbf{x} é o vetor de incógnitas, ou variáveis de projeto, definido no item seguinte.

4.1.2 Variáveis de Projeto

São as variáveis que se alteram durante o processo de otimização. Pode-se descrever um sistema de otimização por um conjunto de quantidades, neste conjunto pode existir dois tipos de variáveis, as discretas e as contínuas. As variáveis do primeiro tipo podem assumir apenas valores inteiros, ou seja, índices que são associados a descrição do problema, como, por exemplo, o índice que define a posição de um elemento no vetor cujos elementos definem os diâmetros comerciais de armadura para estruturas de concreto armado. Já o segundo tipo, as variáveis contínuas, podem assumir um valor real qualquer dentro de um determinado intervalo, como, por exemplo, o diâmetro de uma armadura pode ser considerado um valor real qualquer maior que zero.

Nesse trabalho tem-se como variáveis de projeto o diâmetro (ou área) das barras e os parâmetros que definem a deformada da seção, ou seja, deformação axial da seção, rotação da seção no eixo x e rotação da seção no eixo y . No algoritmo de otimização essas variáveis são consideradas contínuas.

4.1.3 Restrições

São funções de igualdade ou desigualdade que descrevem situações de projeto que devem ser atendidas. Em problemas de dimensionamento esses critérios são definidos por normas específicas. No caso deste trabalho são definidas as seguintes restrições: deformação limite no concreto; deformação limite no aço; esforços internos na seção maiores ou iguais aos esforços solicitantes; diâmetro das barras (limite inferior e superior); tamanho do passo. Essa última restrição é definida para que seja válida a aproximação linear usada no método descrito em seções seguintes desse trabalho.

- Deformações limites

A deformada da seção mostrada na Fig. 4.1 em relação ao eixo xy é dada pela Eq. (4.2). Essa mesma deformada pode ser determinada em relação a outro sistema de referência.

Considerando o sistema $x'y'$ mostrado na Fig. 4.1 com $\operatorname{tg}\theta = k_x/k_y$, tem-se a Eq. (4.3) para a deformada da seção, onde $\varepsilon' = \varepsilon$ e $K_x' = k_y \operatorname{sen}\theta + k_x \cos\theta$.

$$\varepsilon_{(x,y)} = \varepsilon + yk_x - xk_y \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{(x',y')} = \varepsilon' + y'k_x' \quad (4.3)$$

Para o sistema $x'y'$ define-se h_1 e h_2 como sendo a altura dos pontos em relação x' para os pontos da seção mais distantes desse eixo. Esses pontos serão dois dos vértices da seção poligonal qualquer, a Fig. 4.1 ilustra esses pontos.

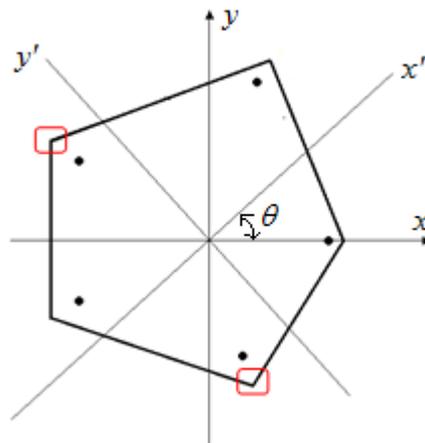


Figura 4.1 – Seção poligonal qualquer

Sendo ε_{cu} e ε_{c2} as deformações limites para o concreto, chegam-se as Eq. (4.4) a (4.7) para as restrições referentes às deformações limites no concreto. De acordo com a NBR 6118 (2014) para concreto até C50, tem-se $\varepsilon_{cu} = -0,35\%$ e $\varepsilon_{c2} = -0,2\%$. No caso de seções totalmente comprimidas a norma limita que a deformação na fibra mais comprimida seja menor que ε_{cu} e que a deformação na fibra a uma distância de $3/7h$ da fibra mais comprimida seja menor ou igual a ε_{c2} . Essas distâncias são representadas por h_3 e h_4 nas restrições dadas pelas Eq. (4.6) e (4.7).

$$C_1(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x' h_1 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (4.4)$$

$$C_2(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x' h_2 - \varepsilon_{cu} \geq 0 \quad (4.5)$$

$$C_3(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x' h_3 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (4.6)$$

$$C_4(\mathbf{x}) = \varepsilon + k_x' h_4 - \varepsilon_{c2} \geq 0 \quad (4.7)$$

Definindo h_{b1} e h_{b2} como sendo a altura das barras em relação x' para as barras na seção mais distantes desse eixo, chega-se as restrições, Eq. (4.8) e (4.9), para a deformação nas barras mais solicitadas. A NBR 6118 (2014) limita a deformação no aço tracionado ao valor de 1%.

$$C_5(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x \cdot h_{b1}) \geq 0 \quad (4.8)$$

$$C_6(\mathbf{x}) = 0,01 - (\varepsilon + k_x \cdot h_{b2}) \geq 0 \quad (4.9)$$

- Esforços Solicitantes

O momento obtido a partir da configuração das barras analisadas (M_R) deve ser maior ou igual ao momento solicitante. As Eq. (4.10) e (4.11) mostra como determinar esses esforços a partir de dados dos materiais, da seção poligonal, e da deformada da seção.

$$M_{R_x} = \int_A \sigma(x, y) y d_A + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) y_i A_{s_i} \quad (4.10)$$

$$M_{R_y} = \int_A \sigma(x, y) x d_A + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) x_i A_{s_i} \quad (4.11)$$

$$C_7(\mathbf{x}) = M_R - M_S \geq 0 \quad (4.12)$$

O esforço axial obtido a partir da configuração adotada das barras (N_R) deve ser igual ao esforço normal solicitante (N_S). A restrição dada pela Eq. (4.14) é uma restrição de igualdade, por isso, nesse texto ela é representada pela letra D , enquanto que todas as outras são restrições de desigualdades representadas nesse texto pela letra C .

$$N_R = \int_A \sigma(x, y) d_A + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i, y_i) x_i A_{s_i} \quad (4.13)$$

$$D_1(\mathbf{x}) = N_R - N_S = 0 \quad (4.14)$$

- Restrição para os diâmetros das barras

As barras devem ter diâmetros menores ou iguais ao diâmetro definido pelo usuário e maior que zero. Sendo x_i um elemento do vetor $\mathbf{x} = (A_{s1} \dots A_{sn} \ \varepsilon \ k_x \ k_y)$ que definem as variáveis contínuas de projeto, então:

$$C_{i+7}(\mathbf{x}) = x_i \quad (4.15)$$

$$C_{i+n+7}(\mathbf{x}) = \bar{A}_s - x_i \geq 0 \quad (4.16)$$

Nas Eq. (4.15) e (4.16), \bar{A}_s é a área limite para as barras, ou seja, área da barra de diâmetro dado pelo usuário, e $i = 1, 2, \dots, n$ com n sendo o número de barras.

- Restrições para o tamanho do passo

Definido o ponto de partida \mathbf{x}_k , será obtido o próximo ponto que atenda as restrições de projeto e gere uma redução na função objetivo a partir da equação iterativa $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$,

onde \mathbf{d} é um vetor que define o passo na direção do ponto de ótimo. Para que seja válida a aproximação linear usada no método descrito nesse trabalho, deve-se limitar o tamanho do passo, ou seja, $|d_i| \leq \Delta_i$ com $i = 1, 2, \dots, n+3$. Dessa forma, chega-se ao conjunto de restrições dadas a seguir.

$$C_{i+2n+7}(\mathbf{x}) = \Delta_i + d_i \geq 0 \quad (4.19)$$

$$C_{i+3n+10}(\mathbf{x}) = \Delta_i - d_i \geq 0 \quad (4.20)$$

4.1.4 Propriedades Geométricas

A identificação da seção será feita através do seu número de vértices e de suas coordenadas planas. Os vértices devem ser colocados em uma sequência contornando a seção poligonal no sentido anti-horário, como pode ser visualizado na Fig. 4.2 abaixo. As barras de aço que compõem a armadura do elemento linear de concreto armado são definidas de forma pontual no interior da seção.

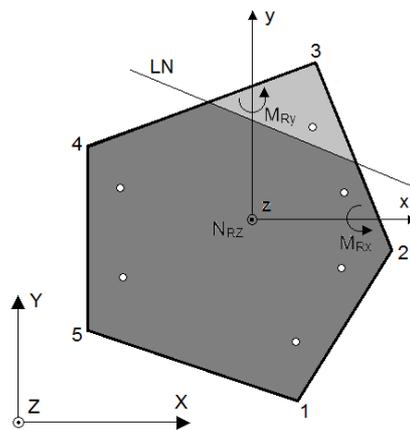


Figura 4.2 – Definição do sistema de coordenadas e seção transversal

4.1.5 Materiais

A identificação dos materiais será feita por meio de suas relações tensão-deformação. Essas, por sua vez, serão definidas através de curvas definidas por um número qualquer de faixas de deformação, onde em cada faixa pode ser definido um polinômio de até grau 3 para a relação tensão-deformação do material. A Fig. 4.3 abaixo ilustra um gráfico para uma curva possível de ser representada na metodologia utilizada nesse trabalho. Esta curva pode ser dividida em um número qualquer de faixas, representada pelos F_i . Para cada faixa serão definidos os coeficientes que caracterizarão a curva polinomial a ser considerada e suas deformações limites à direita e à esquerda, representada pelos L_i .

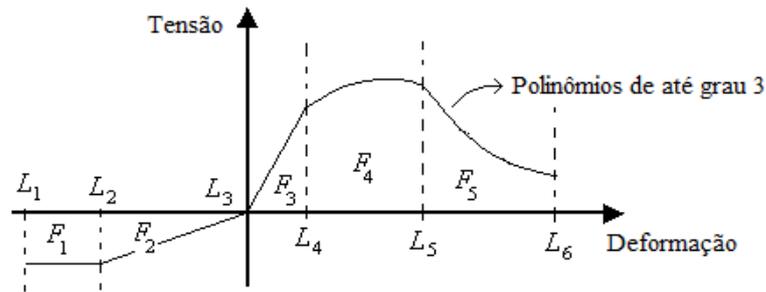


Figura 4.3 – Relação tensão deformação ilustrativa de um material

4.1.6 Relação Tensão-Deformação do Concreto

O modelo da curva tensão-deformação do concreto que será usado nesse trabalho é o modelo fornecido pela NBR 6118 (2014). A Eq. (4.21) abaixo mostra as equações analíticas desse modelo.

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{para } \varepsilon < 0 \\ 0,85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] & \text{para } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c2} \\ 0,85f_{cd} & \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu} \\ 0 & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad (4.21)$$

Na Eq. (4.21), as tensões e deformações de compressão são tomadas positivas e as de tração negativas. Os valores adotados para o parâmetro n são definidos abaixo.

$$n = \begin{cases} \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa: } n = 2 \\ \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa: } n = 1,4 + 23,4 \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \end{cases}$$

Já os valores para os parâmetros ε_{c2} (deformação específica de encurtamento no início do patamar plástico) e ε_{cu} (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura) são:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} \text{ e } \varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}, \text{ para concreto de classe até C50; e } \varepsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰}(f_{ck} - 50)^{0,53}$$

$$\text{ e } \varepsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 36\text{‰} \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4, \text{ para concreto de classe C55 até C90.}$$

A Figura 4.4 abaixo mostra a curva tensão-deformação do concreto dada pela Eq. (4.21). Esta curva compreende concretos das classes até C90. Para classe de concreto até C50 no intervalo $0 < \varepsilon < \varepsilon_{c2}$ a curva é descrita por uma parábola, sendo, por isso, chamada no meio técnico de curva parábola-retângulo. Já para classes C55 até C90 a curva não tem mais a forma analítica de uma parábola nesse trecho, já que o parâmetro n , definido na Eq. (4.21) acima, para esses concretos não é mais inteiro e igual a dois.

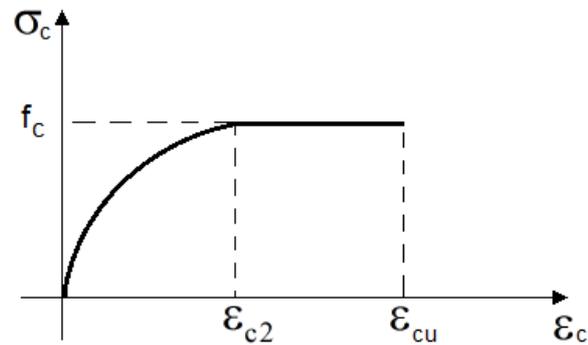


Figura 4.4 – Diagrama tensão-deformação do concreto

4.1.7 Relação Tensão-Deformação do Aço

A relação tensão-deformação para o aço que será usada nesse trabalho é dada pela Eq. (4.22). Essa equação é fornecida pela ABNT NBR 6118 (2014) e vale tanto para as barras de aço CA25 e CA50 quanto para os fios de aço CA60, diferenciando entre elas apenas nos valores da deformação e tensão de escoamento. A Fig. 4.5 ilustra o gráfico dessa equação.

$$\sigma_c = \begin{cases} E_s \varepsilon & \text{para } -\varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ -f_y & \text{para } \varepsilon < -\varepsilon_y \\ f_y & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases} \quad (4.22)$$

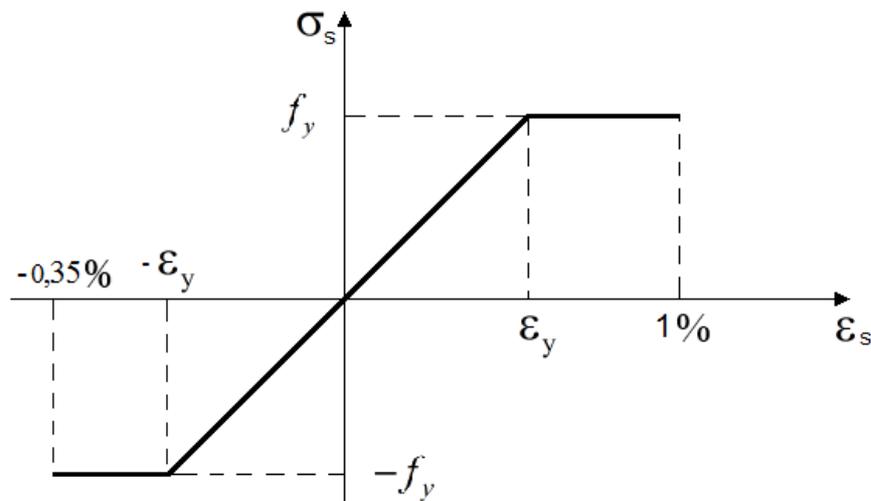


Figura 4.5 – Diagrama tensão-deformação do aço

4.1.8 Esforços Resistentes

Elementos lineares, também chamados de elementos de barra, sob ação conjunta de flexão e força axial centrada estão sujeitos a uma distribuição de tensão normal em uma seção transversal imaginária qualquer. A partir dessa distribuição de tensão pode-se determinar os momentos fletores, M_{Rx} , M_{Ry} e o esforço normal N_{Rz} os quais são definidos como esforços resistentes da seção transversal em análise. Estes são descritos segundo um sistema de coordenadas xyz com origem em um ponto qualquer do plano que contém a seção. Os

esforços resistentes são obtidos por integração das tensões normais ao longo da seção transversal.

Em termos de solução analítica do problema, a origem do sistema local de referência não interfere no resultado. No entanto, segundo Caldas (2004), a utilização da origem do sistema de referência local coincidente com o centroide plástico da seção mostra-se mais adequada quando se trabalha com seções assimétricas observando-se menores problemas de convergência em métodos iterativos quando essa metodologia é empregada dentro de um programa de análise de elementos finitos de barra.

5 FORMA PADRÃO DO MÉTODO SIMPLEX

O problema de otimização será dado por:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \text{ sujeito a } C_i(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ com } i = 1, \dots, m \text{ e } D_1(\mathbf{x}) = 0 \quad (5.1)$$

Na Equação (5.1), $m = 13 + 4n$ é o número de restrições de desigualdade, com n sendo o número de barras na seção. Substituindo a função objetivo e as restrições do problema não linear, mostrado na Eq. (5.1), por suas expansões em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem, tem-se o problema linear de otimização dado na Eq. (5.2).

$$\min_{\mathbf{d}} \nabla^T f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} \text{ sujeito a } \nabla^T C_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} \geq -C_i(\mathbf{x}_k) \text{ e } \nabla^T D_1(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} = -D_1(\mathbf{x}_k). \quad (5.2)$$

Na equação acima, i varia de 1 até m (número de restrições de desigualdade) e ∇ indica a derivada da expressão a qual antecede em relação as variáveis de projeto ($n+3$). \mathbf{d} refere-se ao passo do processo incremental de solução do problema não linear.

Colocando o problema linear da Eq. (5.2) na forma padrão do método Simplex, tem-se:

$$\min_{\mathbf{d}^*} \begin{bmatrix} \nabla^T f(\mathbf{x}_k) & -\nabla^T f(\mathbf{x}_k) & \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* \quad (5.3)$$

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times p} & -\begin{bmatrix} \nabla^T C \\ \nabla^T D \end{bmatrix}_{m \times p} & -\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0}_{1 \times m} \end{bmatrix}_{m \times m} \end{bmatrix} \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} -[C(\mathbf{x}_k)]_{m \times 1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na expressão acima, $\mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{+T} & \mathbf{d}^{-T} & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T$, onde \mathbf{d}^+ e \mathbf{d}^- são dois vetores com $p = n + 3$ componentes (número de variáveis de projeto), \mathbf{u} é um vetor com m componentes (número de restrições de desigualdade), $\mathbf{I}_{m \times m}$ é uma matriz identidade de ordem m , e $\mathbf{0}_{1 \times m}$ é um vetor linha com m termos nulos. Para maiores detalhes de como chegar nessa forma padrão consultar Vanderplaats (1984), Haftka e Kamat (1985).

As derivadas em relação à função objetivo e as restrições $C_i(\mathbf{x})$, com exceção das restrições devido aos esforços solicitantes, são obtidas de forma analítica derivando estas expressões em relação a $x_1 = A_{s1}, \dots, x_n = A_{sn}, x_{n+1} = \varepsilon, x_{n+2} = k_x$ e $x_{n+3} = k_y$. Já as derivadas em relação aos esforços solicitantes são obtidas usando o método aproximado das diferenças finitas.

6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste trabalho utilizou-se a linguagem de programação C++ para executar a implementação computacional com a metodologia de programação orientada a objetos (POO). Pode-se dizer que esse tipo de representação fornece um modo intuitivo de ver o processo de programação, isto é, modelar objetos do mundo real, seus atributos e seus comportamentos (Deitel e Deitel, 2001).

A seguir são descritas as linhas de raciocínio para obter uma resposta otimizada do problema de definição da armadura de aço longitudinal de seções transversais poligonais de concreto sujeitas a esforços combinados de flexão e carga axial.

6.1 Algoritmo

Nessa seção é descrito o algoritmo para definir n e \mathbf{x} que minimiza a função objetivo $f(\mathbf{x})$ definida na seção 4.4.1 desse trabalho.

Passo 1 - Definir a seção transversal, propriedades mecânicas dos materiais, diâmetro da armadura e esforços solicitantes (M_x , M_y e N_z). Conforme mostram as Fig. 4.2, 4.3 e 6.1.

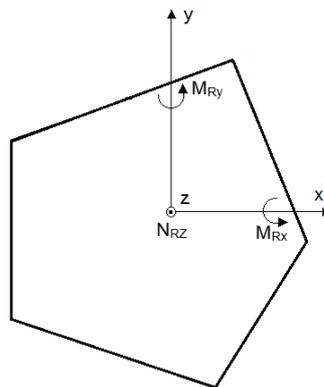


Figura 6.1 – Sistema local de coordenadas

Passo 2 - Deve-se determinar um ponto de partida que atenda a todas as restrições de projeto. Esse ponto é necessário para iniciar o processo iterativo de busca do ponto de ótimo usando aproximações lineares para as restrições e função objetivo a cada passo.

Passo 2.1 - Inserir o máximo de barras possíveis em uma camada na linha que define o contorno da seção. A Fig. 6.2 ilustra uma seção hipotética com o contorno mais externo possível todo preenchido por barras. Deve-se respeitar o espaçamento entre barras definido pelo usuário.

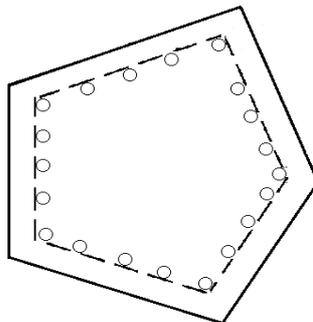


Figura 6.2 – Seção transversal com o máximo de barras possível

Passo 2.2 – A partir de uma deformada pequena que atenda as restrições de deformações limites, iniciar processo incremental iterativo para definir uma nova configuração para a deformada que mantenha as restrições de deformações satisfeitas e satisfaça também as restrições devidos aos esforços solicitantes. Caso não consiga definir essa nova configuração para a deformada deve inserir mais uma camada de barras respeitando afastamento necessário entre as barras e retornar ao passo 2.1.

Passo 3 - Definir uma nova configuração das barras que minimize a função objetivo $f(\mathbf{x})$. A seguir é mostrado um detalhamento desse passo.

Passo 3.1 - Definir $m = n$. Onde m é uma variável inteira que controla a quantidade de barras de um determinado diâmetro, dado pelo usuário, fixadas na seção poligonal. n é o número de barras obtidas no passo 2.

Passo 3.2 - Calcular os diâmetros das m barras que minimizam a função objetivo $f(\mathbf{x})$ respeitando todas as restrições definidas no item 4.1.3.

Neste passo será utilizado o método Simplex, descrito no item 3 desse trabalho, em conjunto com um algoritmo de programação sequencial (permite a solução do problema não linear através de um processo iterativo aplicado em uma sequência de problemas lineares) para definir uma nova configuração das barras que minimize a função objetivo. Dentre as restrições do problema tem-se as restrições que definem limites superior e inferior para as áreas das barras, sendo o limite inferior o valor zero, e o limite superior o valor da área de uma barra de diâmetro definido pelo usuário.

Passo 3.3 – A nova configuração das barras obtida no passo anterior, tende a manter os diâmetros das barras que contribuem de forma mais significativa para os esforços resistentes da seção e a reduzir até o limite inferior os diâmetros das barras que pouco contribuem. Fixar as barras que mantiveram o diâmetro limite, ou muito próximo dele, e retirar as barras que tiveram seu diâmetro zerado, ou muito próximo de zero. A Fig. 6.3 ilustra a retirada de umas barras e a fixação de outras.

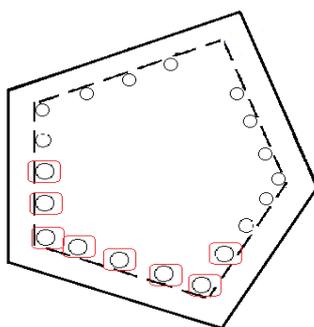


Figura 6.3 – Seção transversal com as barras com diâmetro limite demarcadas

Passo 3.4 - Das barras que não foram excluídas ou fixadas no passo 3.3, verificar a que possui maior área e fixa-la para o diâmetro estabelecido pelo usuário. Reduzir m de acordo com as barras fixadas e retiradas.

Passo 3.5 - Se $m > 0$ voltar ao passo 3.2. Caso contrário, ir para o passo 4.

Passo 4 - Encerrar o procedimento iterativo com o ponto de ótimo dado pela última configuração de barras tendo todas elas o mesmo diâmetro que foi definido pelo usuário.

O algoritmo apresentado usa o método simplex no passo 3.2 para alterar as áreas da seção transversal das barras e a deformada da seção de forma a minimizar a função objetivo, nesse caso essas variáveis são contínuas. No entanto, o algoritmo também fixa os diâmetros de algumas barras eliminando-as do conjunto de variáveis e retorna o processo de otimização em busca de um novo ponto até que todas as barras sejam fixadas. Nesse processo, o número de barras está sendo variado, portanto, pode ser considerado como uma variável discreta do problema.

Vale ressaltar que todas as figuras utilizadas para representar o método são meramente ilustrativas.

7 EXEMPLO

Nesse exemplo será determinada a menor quantidade de aço longitudinal para que a seção retangular da Fig.7.1 consiga resistir a um esforço combinado de uma carga axial de compressão de 120kN e um momento de 20kNm. A carga axial está atuando no centro geométrico da seção e o momento sobre o eixo x tracionando a parte inferior da seção retangular.

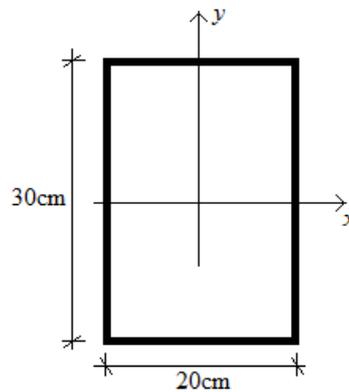


Figura 7.1 – Seção retangular sob flexão composta reta

O exemplo acima será resolvido utilizando as equações de equilíbrio da seção transversal, Eq. (7.1) e (7.2), e utilizando o programa desenvolvido neste trabalho.

7.1 Resolução através das equações de equilíbrio

As equações de equilíbrio 7.1 e 7.2 foram desenvolvidas considerando armaduras concentradas em um ponto e distribuição constante da tensão na região comprimida. Para que essa última consideração dê resultados satisfatórios, a região comprimida da seção é reduzida em 20%.

$$F_d = 0,68\sigma_c b d \beta_x + A_{s1} \sigma_{s1} + A_{s2} \sigma_{s2} \quad (7.1)$$

$$M_d = 0,68\sigma_c b d^2 \beta_x (1 - 0,4\beta_x) + A_{s1} \sigma_{s1} (d - d') - (d - h/2) F_d \quad (7.2)$$

Nas Eq. (7.1) e (7.2), F_d é o esforço axial atuando no centro geométrico da seção retangular e deve ser considerado positivo quando for de compressão, A_{s1} é a armadura no lado comprimido por M_d e A_{s2} é a armadura no lado tracionado, σ_c é a tensão na fibra mais

comprimida do concreto, σ_{s1} é a tensão no aço no lado comprimido por M_d e σ_{s2} é a tensão no aço no lado tracionado.

Buscando uma solução otimizada em termo da quantidade de aço, será verificada a possibilidade de dimensionamento da seção considerando armadura apenas na região tracionada por M_d , ou seja, será tomado A_{sI} nulo.

Verificando o dimensionamento nos domínios 2b, 3 ou 4 (NBR 6118, 2014) e adotando $A_{sI} = 0$, tem-se como incógnitas A_{s2} e β_x . Nos domínios em análise tem-se que $\epsilon_c > 0,2\%$, e, portanto, $\sigma_c = f_{cd}$. Substituindo esses valores na Equação 6.2 e sendo, $M_d = 20kNm$, $d = 26,5cm$, $h = 0,3cm$, $b = 0,2cm$ e $f_{cd} = 25MPa/1,4$, obtém-se $\beta_x = 0,2170$ que pertence ao domínio 2b [0,1667; 0,2593], como considerado de início.

Sabe-se que para o domínio 2 tem-se $\epsilon_s = 1\%$ e, portanto, $\sigma_{s2} = -f_{yd}$ (o sinal negativo deve-se ao fato desse esforço normal ser de tração). Substituindo na Equação 6.1 obtém-se uma área de aço $A_{s2} = 0,45cm^2$.

7.2 Resolução através do programa desenvolvido

O algoritmo implementado nesse trabalho para análise de seções poligonais de concreto armado sujeito a flexão composta oblíqua, começa inserindo uma quantidade de armadura no contorno da seção respeitando o cobrimento da armadura em relação ao contorno externo e o espaçamento entre as barras, esses dados são definidos pelo usuário. Nesse exemplo foram considerados cobrimento e espaçamento de 3,0cm. Sendo assim, a seção será composta inicialmente por 16 barras de 10mm como mostra a Fig. 7.2. A Tabela 7.1 a seguir mostra as coordenadas dessas barras considerando centroide da seção coincidente com a origem do sistema de referência adotado.

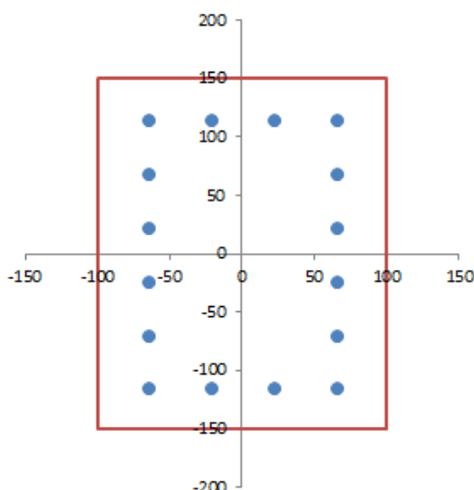


Figura 7.2 – Seção com barras longitudinais

Tabela 7.1 – Coordenadas das barras

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
x (mm)	-22	22	65	65	65	65	65	65
y(mm)	-115	-115	-115	-69	-23	23	69	115
	b9	b10	b11	b12	b13	b14	b15	b16
x (mm)	22	-22	-65	-65	-65	-65	-65	-65
y(mm)	115	115	115	69	23	-23	-69	-115

O próximo passo do algoritmo consiste em determinar uma deformada para a seção de tal forma que as restrições do problema sejam satisfeitas. Caso isso não seja possível deve ser inserida mais uma camada de barras na seção e o processo deve ser repetido. Partindo de uma deformada pequena para a seção, tem-se as restrições referentes às deformações limites atendidas. Para se ter uma deformada que atenda também as restrições referentes aos esforços solicitantes é utilizado um processo iterativo onde pequenos passos são dados nas variáveis da deformada na intenção de variar gradativamente os esforços resistentes, até que esses atendam as restrições referentes aos esforços solicitantes, sem deixar de atender as demais restrições. Isso pode ser conseguido obtendo um ponto possível básico para o problema de otimização linearizado como discutido em seções anteriores desse trabalho. Depois desse processo o algoritmo encontra as variáveis $\varepsilon = 3,76 \times 10^{-7}$, $k_x = -3,90 \times 10^{-3}$ e $k_y = 0$ que definem a equação da deformada da seção.

A Figura 7.3 mostra a variação dos parâmetros da deformada da seção com as iterações do processo descrito no parágrafo anterior. Na Fig. 7.3, ε é a deformação axial da seção transversal no ponto coincidente com a origem do sistema de referência, k_x e k_y são as rotações da seção em relação aos eixos x e y , respectivamente. No eixo horizontal do gráfico mostrado na Fig. 7.3 está indicado o número de iterações necessárias para se ter a deformada que satisfaça todas as restrições.

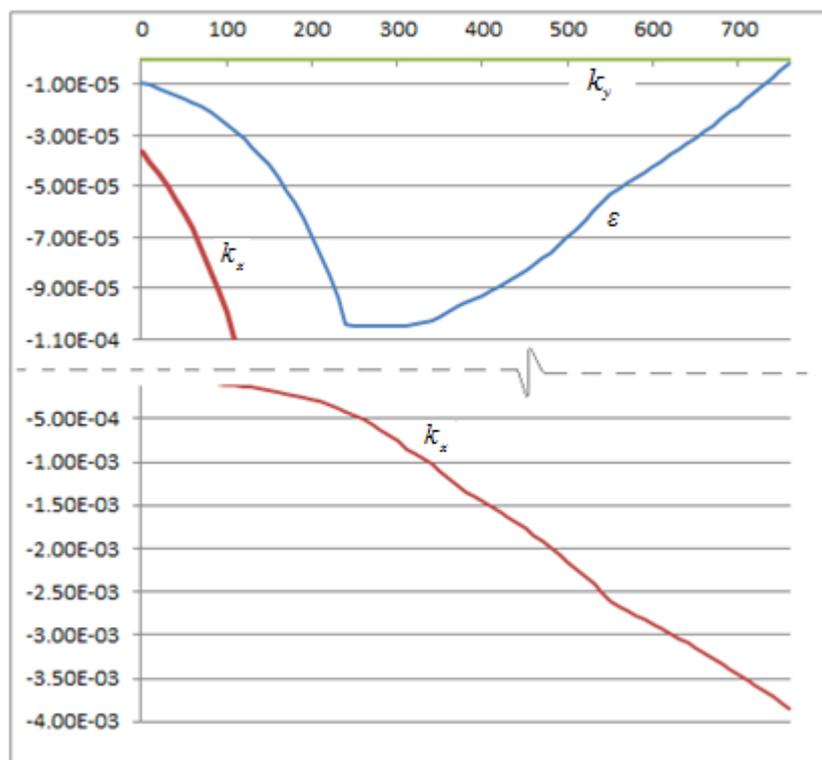


Figura 7.3 – Variação da deformada no processo iterativo

A Figura 7.4 a seguir mostra a variação dos esforços na seção transversal com as iterações do processo descrito anteriormente. Os esforços iniciam com os valores de $M_x = -0,3\text{kNm}$, $M_y = 0$ e $N = -10,9\text{kN}$, após 200 iterações o esforço normal atinge o valor de solicitação mantendo esse valor nas iterações seguintes. Por volta de 700 iterações todos os esforços atingem os valores de solicitação, definindo assim um ponto dado pelas 16 barras de 10mm, mostrada na Fig. 7.2 anterior, e deformada da seção com $\varepsilon = 3,76 \times 10^{-7}$,

$k_x = -3,90 \times 10^{-3}$ e $k_y = 0$, parâmetros para as variáveis de projeto que atende todas as restrições de projeto, ou seja, ponto de partida \mathbf{x}_0 para definição dos próximos pontos, através da equação iterativa $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$, que atendam as restrições e reduza o valor da função objetivo. O número de iterações mostrados nas Fig. 7.3 e 7.4 não refere-se às iterações do algoritmo simplex (passo 3.2) na definição do ponto possível básico, e sim nas iterações referentes ao passo 2 do algoritmo dado no item 6.1 desse trabalho.

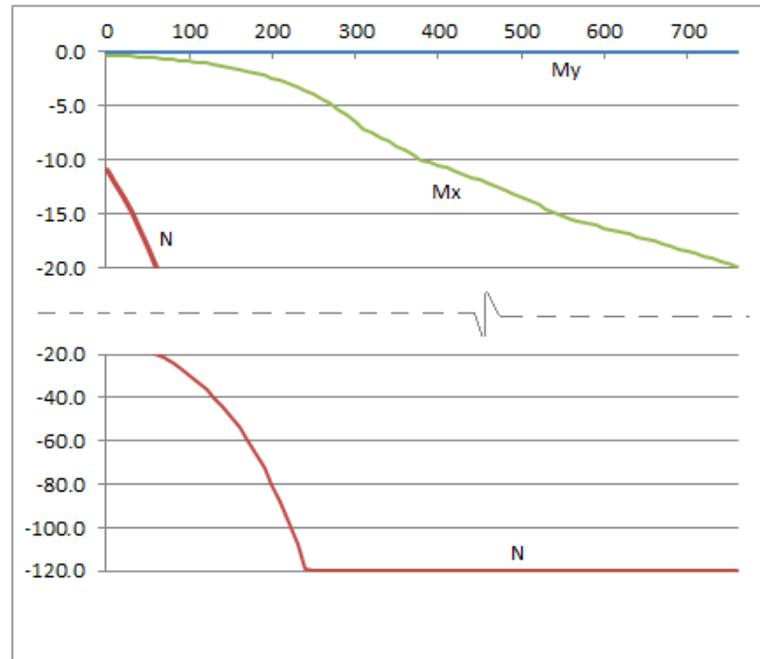


Figura 7.4 – Variação dos esforços na seção no processo iterativo

Após a definição do ponto de partida \mathbf{x}_0 é determinado \mathbf{d} resolvendo o problema de otimização descrito na seção 4.2 desse trabalho. Dentre o conjunto de restrições do problema encontra-se as restrições que limitam o tamanho do passo \mathbf{d} para que seja válida a aproximação linear para a função objetivo e restrições do problema. A Fig. 7.5 a seguir mostra a variação da área de cada barra ao longo do processo iterativo.

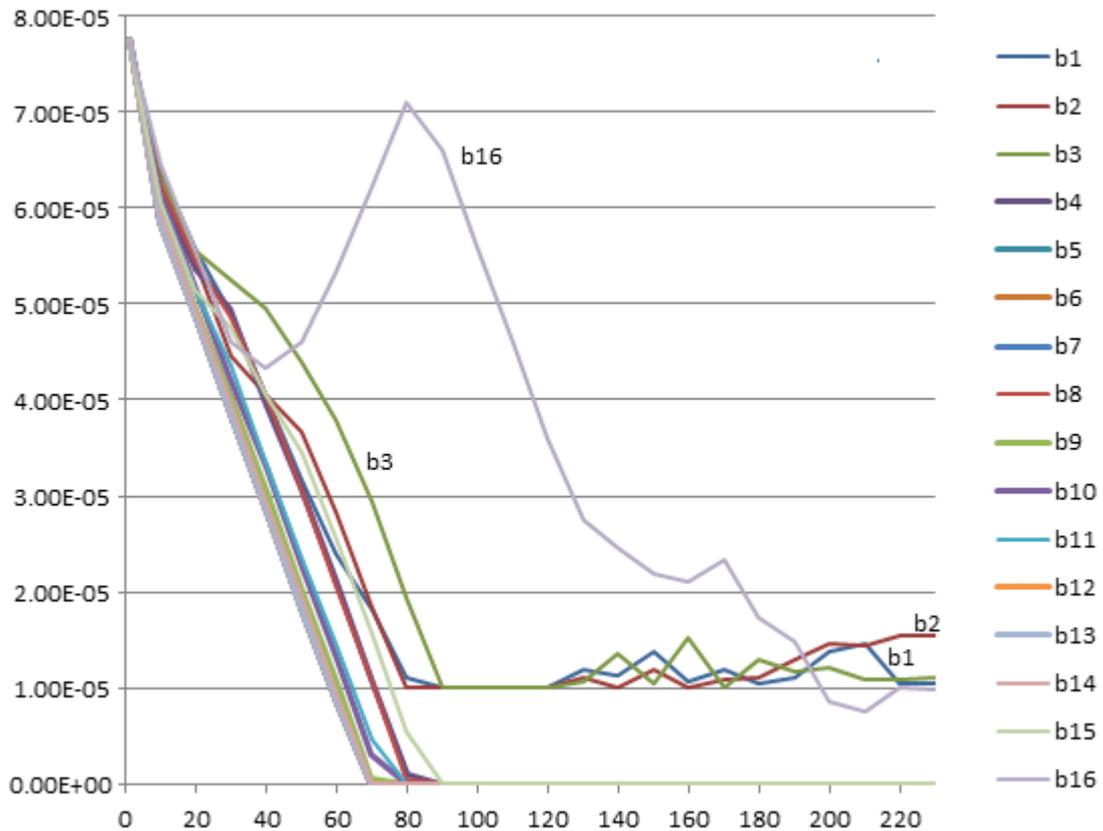


Figura 7.5 – Variação da área das barras no processo iterativo

Como as 16 barras tem inicialmente diâmetro de 10mm, observa-se da Fig. 7.5 que as curvas de redução das áreas de todas as barras partem do mesmo ponto. Após 90 iterações somente quatro barras tem área não nula, b1, b2, b3 e b16. Essas barras são as quatro barras no lado inferior da seção retangular, como pode ser comprovado da Tabela 7.1 e Fig. 7.2.

A Figura 7.6 a seguir mostra a redução da função objetivo durante o processo iterativo. O eixo vertical dessa figura nos dá a área de aço em m^2 após um determinado número de iterações. O valor final da soma das áreas de aço das quatro barras obtido pelo processo iterativo apresentado nesse trabalho é de $0,46cm^2$.

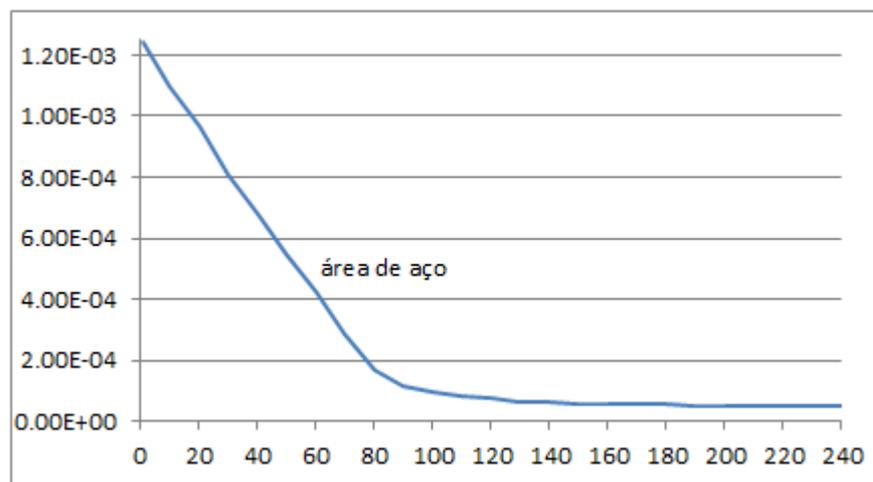


Figura 7.6 – Variação da soma das áreas das barras no processo iterativo

A Figura 7.7 a seguir mostra a variação das restrições referentes as deformações limites na fibra mais comprimida e na barra mais tracionada durante o processo iterativo. Por questão de ilustração no gráfico as deformações de compressão na fibra mais comprimida foram tomadas com seus valores absolutos. Observa-se da figura que as deformações para o ponto de partida eram bem menores que a deformação limite para o aço (1%) e concreto (0,35%). Durante o processo iterativo as áreas de aço vão reduzindo, a deformada da seção vai aumentando, e as restrições, por força do método implementado, são todas atendidas, no entanto a folga que as restrições de desigualdade tinham no início vão diminuindo com o avanço nas iterações, como pode ser evidenciado na Fig. 7.7.

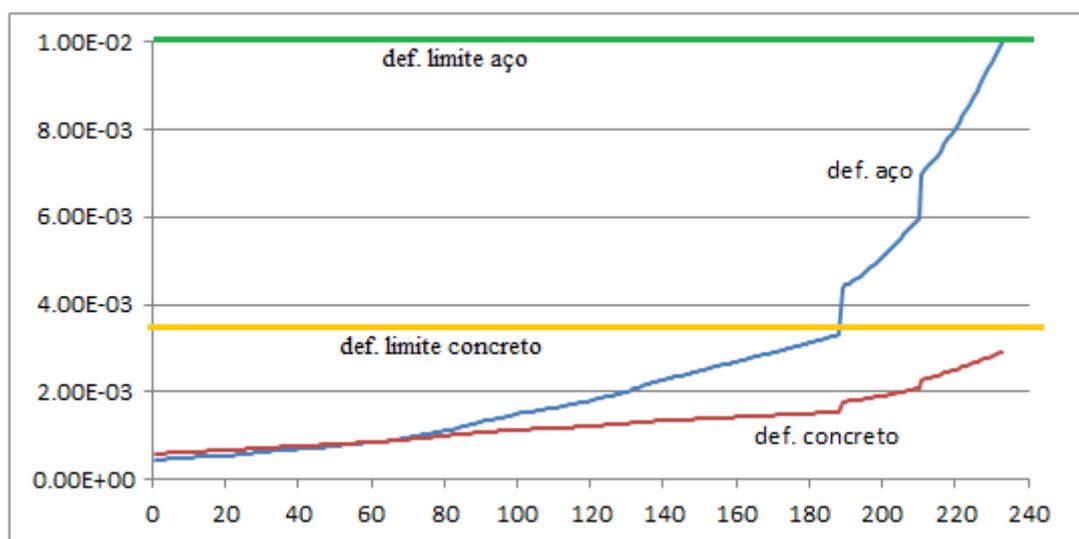


Figura 7.7 – Variação das restrições referentes as deformações no processo iterativo

Como pode ser observado nessa seção, a área de aço mínima obtida usando as equações de equilíbrio ($0,45\text{cm}^2$) e o programa implementado nesse trabalho ($0,46\text{cm}^2$) são praticamente coincidentes. A pequena diferença deve-se ao fato de que no programa implementado a variação da tensão normal na seção transversal é representada conforme diagrama tensão deformação do concreto definido pela NBR6118 (2104), enquanto que nas equações de equilíbrio essa variação é considerada constante reduzindo a área comprimida em 20%.

8 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi utilizado um algoritmo de otimização para definir a quantidade de aço e sua posição dentro de uma seção poligonal qualquer de concreto sujeita a flexão oblíqua composta, de forma que, a quantidade de aço seja a mínima necessária para resistir aos esforços solicitantes. Através de um processo iterativo, controlando o tamanho do passo a cada iteração, o problema não linear de determinação dos esforços resistentes da seção em relação às variáveis de projeto é aproximado por um problema linear, o qual teve seu ponto ótimo definido a cada passo usando o método Simplex. Como observa-se do exemplo apresentado, o método implementado nesse trabalho junto com o algoritmo Simplex trabalhou satisfatoriamente para a conclusão dos objetivos desse trabalho. O número de iterações elevado no processo se deve a linearização do problema, no entanto, verificou-se que o tempo computacional para análise de cada iteração é baixo, uma vez que a cada passo é resolvido um problema linear.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) o apoio financeiro e a bolsa de pesquisa concedida para desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Bastos, E.A., 2004. *Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil
- Bazaraa, M. e Shetty, C., 1993. *Nonlinear programming-theory and algorithms*. Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Caldas, R.B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos de Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Deitel, H.M. e Deitel, P. J., 2001. *C + + Como Programador*. Bookman.
- Haftka, R. e Kamat, M. 1985. *Elements of structural optimization*. Martinus Nijhoff Publishers, Boston.
- Maia, J.P.R, 2009. *Otimização Estrutural: estudo e aplicação em problemas clássicos de vigas utilizando a ferramenta Solver*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Muniz, C.F.D.G. *Modelos Numéricos para Análise de Elementos Estruturais Mistos*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2005.
- NBR ABNT 6118., 2014. *Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento*. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro, MG, Brasil.
- Nocedal, J. e WRIGHT, S., 2006. *Numerical optimization*. Second edition. Springer.
- Silva, A.R. *Análise Numérica de Vigas Mistas com Iteração Parcial*, Dissertação de Mestrado, PROPEC, Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, UFOP, 2007.
- Vanderplaats, G., 1984. *Numerical optimization technique for engineering design - with applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1984.
- Verzenhassi, C. C., 2008. *Otimização de Risco Estrutural Baseada em Confiabilidade*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação Escola de Engenharia de São Carlos Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.