



META MODELOS PARA QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DA PREDIÇÃO DE FADIGA DE BAIXO CICLO EM MEMBROS ESTRUTURAIS

Iago Freitas de Almeida

Francisco Evangelista Junior

iago.freitas@hotmail.com

fejr.unb@gmail.com

Universidade de Brasília

Programa de Pós- Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, 1º andar,
Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal,
Brasil.

Resumo. *Este artigo tem como objetivo implementar Meta modelos do tipo $y = f(\hat{x})$, onde a partir de variáveis de entrada a resposta estrutural do sistema é determinada a partir de uma superfície de resposta ajustada por meio dos parâmetros do Meta modelo. A resposta do sistema estrutural é construída por uma superfície de resposta que modela a vida de fadiga de membros estruturais submetidos a carregamentos aleatórios com amplitude variável. É demonstrada para análise de diferentes técnicas de amostragem, tais como hipercubo latino, sequência de sobol e experimento fatorial para a construção do meta modelo eficiente na predição da incerteza da vida de fadiga pelo modelo implementado.*

Palavras-chaves: *Meta modelo, Regressão Polinomial, fadiga de baixo ciclo, Quantificação da Incerteza.*

1 INTRODUÇÃO

A análise da incerteza tem sido desenvolvida nas últimas duas décadas para métodos computacionais. Nestes métodos, a quantificação da mesma depende de repetidas simulações do modelo computacional subjacente da estrutura ou do sistema. No entanto, o grande número de simulações que são necessárias para uma melhor acurácia gera um custo computacional proibitivo com as plataformas computacionais disponíveis. Desta forma, um novo campo de pesquisa chamado de meta modelos (Chen et al., 2011; Sudret, 2012; Dubourg e Sudret, 2014; Pina et al., 2014) é utilizado com o objetivo de reduzir o custo computacional e otimizar o tempo de operação.

O uso de meta modelos consiste em uma solução alternativa para o problema físico (Chen et al., 2011; Sudret, 2012; Dubourg e Sudret, 2014; Pina et al., 2014). De forma simplificada, o mesmo consiste na substituição do modelo complexo por uma aproximação simples. Nesta metodologia, a resposta do sistema estrutural pode ser construída por uma superfície de resposta (Zhao e Qiu, 2013) ajustada por uma regressão polinomial, a qual geralmente considera o uso de experimento fatorial (Santilli et al., 2011; Montgomery, 2013; Tsao e Patel, 2015). No entanto, só recentemente amostragens mais eficientes tem se desenvolvido com sequência de sobol (Blatman, 2009) e hipercubo latino (Blatman, 2009; Shields e Zhang, 2016) para as variáveis de entrada.

Esta pesquisa considerou o uso de meta modelos como uma forma de prever o efeito de fadiga em membros estruturais dada a alta aleatoriedade da saída do modelo, visto que, nos dias de hoje, o mesmo consiste ainda em um grande obstáculo na área estrutural. Além disso, a superfície de resposta gerada pela regressão polinomial permite verificar a incerteza do sistema físico para qualquer solicitação proposta a fadiga. Por fim, uma comparação será realizada entre o experimento fatorial e as amostragens desenvolvidas com o uso de sequência de sobol e hipercubo latino.

2 SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

A metodologia de superfície de resposta (MSR) corresponde a um conjunto de técnicas estatísticas e matemáticas usadas no desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem um fenômeno. No problema a ser analisado, as variáveis de entrada são chamadas de variáveis independentes e são determinadas em ensaios experimentais. Já o desempenho e a qualidade do produto são chamados de resposta ou de variáveis dependentes. As funções de aproximação adotadas pela metodologia consideram o erro estatístico, geralmente assumindo uma distribuição normal de média dos erros residuais igual à zero de acordo com a Eq. (1). Assim:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) + e \quad (1)$$

sendo y a variável dependente; e o erro residual e x_1, x_2, \dots, x_k as variáveis independentes ou variáveis naturais. Em muitos casos, é conveniente trabalhar as equações de MSR em variáveis codificadas ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$). As variáveis codificadas correspondem a uma transformação das variáveis naturais, representado frequentemente, em valores entre -1 e 1. A forma da função de resposta f não é conhecida e deve ser obtida por aproximação. Neste caso, um polinômio de menor ordem é apropriado em regiões onde atuam variáveis aleatórias de

entrada. Desta forma, um polinômio de primeira ou de segunda ordem é mais conveniente para gerar as superfícies de resposta.

O modelo de primeira ordem pode apresentar curvatura devido à interação entre as variáveis independentes. Neste caso, a curva formada pela função de resposta é inadequada para o modelo proposto. Portanto, é convencional se adotar quando houver interação entre variáveis um polinômio de segunda ordem ou de ordem superior. No caso da obtenção destes polinômios, a *MSR* se utiliza da técnica de regressão por mínimos quadrados ao qual considera uma minimização dos erros residuais e será apresentado a seguir.

2.1 Regressão por Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados consiste em estimar coeficientes de uma regressão polinomial. Segundo Gaspar et al. (2014) este modelo é muito utilizado em problemas de confiabilidade estrutural. Geralmente, polinômios de menor ordem são utilizados, como por exemplo, de primeira (Eq.(2)) e segunda ordem (Eq.(3)). No uso de polinômios de primeira ordem, estabelece-se para este polinômio que $n > k$ observações na variável de resposta e ξ_{ij} correspondem a cada amostra ou nível da variável codificada ξ_j . Assim:

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \xi_{ij} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \xi_j + \sum_{j=1}^k a_{jj} \xi_j^2 + \sum_{i < j=2}^k \sum_{i < j=2}^k a_{ij} \xi_i \xi_j + e \quad (3)$$

No processo de regressão do polinômio de primeira ordem, um dos parâmetros utilizados na superfície de resposta, consiste na minimização do somatório de erros residuais (*SSE*) de acordo com a Eq. (4). Na Equação (5) se apresenta a forma matricial do polinômio de primeira ordem, sendo dado em função de uma matriz modelo *A*. De acordo com a representação matricial da equação de regressão, *y* representa um vetor de $n \times 1$ e *A* representa uma matriz $n \times p$, onde $p = k + 1$. O vetor *a* representa os coeficientes da regressão sendo da ordem $p \times 1$. O *e* corresponde ao vetor de erros aleatórios de $n \times 1$.

$$SSE = \sum_{i=1}^n e^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - a_0 - \sum_{j=1}^k a_j \xi_{ij} \right)^2 = 0 \quad (4)$$

$$y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + e \quad (5)$$

Onde:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1k} \\ 1 & \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_{n1} & \xi_{n2} & \cdots & \xi_{nk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

A regressão de segunda ordem e de ordens superiores apresenta parâmetros semelhantes à regressão linear. Assim, constata-se que o modelo em formato matricial também é semelhante

ao apresentado, havendo apenas, a necessidade de expansão das matrizes. Portanto, para este trabalho o uso da regressão de primeiro grau foi utilizada, visto que, a regressão de ordem superior apresenta uma maior dificuldade para exposição dos parâmetros de regressão.

O erro médio quadrático ou *root mean square error (RMSE)* consiste em outra medida utilizada frequentemente e retrata as diferenças entre os valores estimados por uma regressão e os valores da observação. O *RMSE* serve para agregar as magnitudes dos erros residuais e segundo Yan et al. (2011) é dado por:

$$RMSE = \sqrt{\frac{SSE}{n}} \quad (7)$$

Outro parâmetro adotado no método dos mínimos quadrados consiste no coeficiente de determinação (r^2). Para um ajuste perfeito, $SSE=0$ e $r^2=1$, ou seja, significa que a reta explica 100% da variabilidade dos pontos. Entretanto, se $r^2=0$ e $SSE = S_t$, o ajuste não apresentará nenhuma melhoria. O S_t corresponde a soma dos resíduos totais entre os pontos de entrada e a média dos mesmos. No caso do coeficiente de determinação com um valor próximo de 1 o mesmo não indica que a curva esta realmente ajustada. Alguns pontos que seguem a distribuição não – linear possuem $r^2 =1$ ou próximo de 1. Uma boa solução para pontos em distribuição linear é plotar e analisar o comportamento de cada um em relação à reta de regressão.

$$r^2 = \frac{S_t - SSE}{S_t} \quad (8)$$

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (9)$$

Para o processo de regressão polinomial utilizando superfície de resposta é necessário o uso de codificação das variáveis de entrada. Para este trabalho, uma das metodologias empregadas consiste no uso de experimento fatorial. Segundo Myres et al. (2009), o experimento fatorial corresponde a um modelo que considera dados experimentais através do uso de alguns fatores necessários na análise dos efeitos de interação com a variável de resposta.

2.2 Experimento Fatorial

O método fatorial apresenta duas características importantes que são: os fatores e os níveis. Os fatores adotados na metodologia correspondem às variáveis de entrada (independentes) de um experimento. Já os níveis são valores específicos que são atribuídos ao fator.

Neste trabalho um dos fatoriais a ser adotado é o fatorial composto central ou *Center Composite Design (CCD)* ao qual corresponde a uma adaptação do fatorial 2^k , onde há a adição de um ponto central e está representado pelos pontos em negrito na Fig. (1). Este tipo de experimento fatorial de nível 2 assume linearidade nos efeitos do fator. No entanto, essa linearidade segundo Myers et al. (2009) acontece por aproximação e adição de interações entre os fatores. Outro modelo de fatorial que é abordado neste trabalho consiste no fatorial de 3 níveis ou fatorial completo ou *Full Factorial (FF)*, quando estes são quantitativos expressam valores mínimo, intermediário e máximo de níveis e são representados por todos

os pontos na Fig. (1). Além disso, pode-se observar na Fig. (1) que a codificação dos dados para esta pesquisa é entre $-2, -1, 0, 1, 2$.

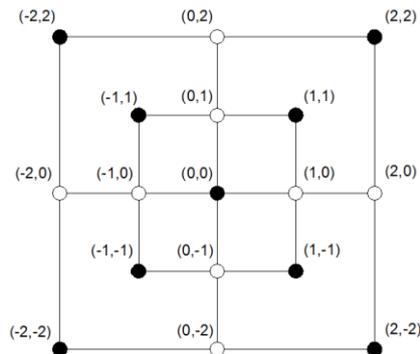


Figura 1. Projeto de Experimento Fatorial

2.3 Amostragem Hiper-cubo Latino (LHS)

Para as variáveis de entrada de uma regressão de superfície polinomial valores aleatórios também podem ser considerados. A amostragem por Hiper-cubo latino ou *Latin Hypercube Sampling (LHS)* é um método para geração de valores randômicos (Fig.(2)) que utiliza Monte Carlo. No caso de uma função com n variáveis, o intervalo de cada variável é dividido igualmente de acordo com a distribuição que cada variável segue.

Uma das principais vantagens do LHS é que o mesmo não necessita de muitos pontos, diferenciando-se, portanto do Monte Carlo tradicional ao qual necessita de uma grande quantidade de pontos. Desta forma, o número de pontos por variável necessária diminui, de modo que o tempo de processamento reduz consideravelmente. Pode-se ainda afirmar que esta abordagem assegura que cada uma das variáveis de entrada tem todas as porções da sua gama de valores representados.

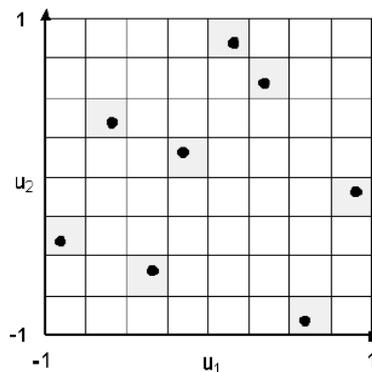


Figura 2. Amostragem Hiper-cubo Latino (Adaptado de: BLATMAN, 2009)

2.4 Sequência de Sobol (SS)

Semelhante ao LHS, a sequência de Sobol pode ser responsável por gerar valores aleatórios como variáveis de entrada. Pode-se ainda relatar que o mesmo consiste um exemplo de baixa discrepância quase aleatória e que fora introduzida pelo matemático russo Ilya M. Sobol (1967). Esta sequência utiliza uma base igual a dois para formar divisórias sucessivamente mais finas e uniformes do intervalo. A sequência de Sobol considera x_n pontos para cada dimensão de acordo com a Eq. (10).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_S(x_i) \right) = \int_{I^s} f_S \quad (10)$$

Sendo que, I^s corresponde ao domínio de $[0,1]$ de cada dimensão e f_S corresponde a uma função real de integração sobre o domínio I^s . Para o método, a convergência deve ser a mais rápida possível. No entanto, para a integral convergir é necessário que os pontos gerados preencham de forma homogênea o domínio de acordo com a Fig.(3).

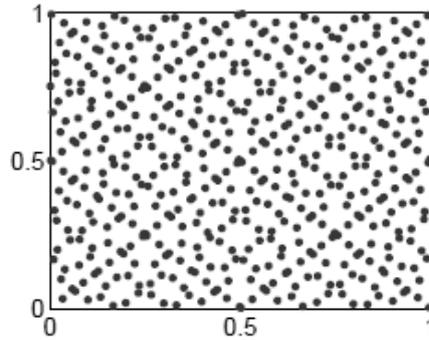


Figura 3. Sequência de Sobol (Adaptado de: BLATMAN, 2009)

3 FADIGA EM MEMBROS ESTRUTURAIS

Frequentemente componentes estruturais são submetidos a carregamentos repetitivos, resultando estes, em tensões cíclicas as quais podem gerar danos físicos microscópicos aos materiais envolvidos. Assim, de acordo com Dowling (2013) para qualquer tensão menor que a tensão última do material, esse dano pode se acumular e com aplicações cíclicas dessa tensão, pode-se surgir macro trincas que levarão a falha do material. Este processo recebe o nome de fadiga e consiste em uma grande área de estudo da engenharia.

A estimativa da vida de fadiga de baixo ciclo de componentes entalhados pela metodologia deformação-vida necessita das tensões e deformações atuantes na raiz do entalhe. Estas tensões e deformações podem ser determinadas via elementos finitos, porém demandam um tempo de processamento elevado. Como solução do problema, métodos de aproximação podem ser utilizados, como por exemplo, o método de Neuber (1961, *apud* Negrão, 2014) dados pelas Eq. (11) e (12).

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E_m} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2H'} \right)^{\frac{1}{n'}} \quad (11)$$

$$\Delta \sigma \cdot \Delta \varepsilon = \frac{(K_f \cdot \Delta S)^2}{E_m} \quad (12)$$

Sendo K_f o fator de concentração de fadiga, $\Delta \sigma$ a variação de tensão e $\Delta \varepsilon$ consiste na variação de deformação na raiz do entalhe, ΔS a variação da tensão nominal, n' o coeficiente de endurecimento para deformações cíclicas, H' o expoente de encruamento cíclico, e E_m corresponde ao módulo de elasticidade do material.

Para a verificação do número de ciclos de vida à fadiga (N_f) considera-se o modelo de Morrow (1968 *apud* Negrão, 2014) através de processos iterativos. A Equação (13) descreve o modelo de forma simplificada, sendo σ_m a tensão média que é calculada pelas tensões $\Delta\sigma$, σ'_f o coeficiente de resistência a fadiga cíclica, ε'_f o coeficiente de ductilidade a fadiga, ε_a a amplitude de deformação total e b e c são coeficientes de regressão log-log.

$$2N_f = \left[\frac{\varepsilon_a - \left(\frac{\sigma'_f - \sigma_m}{E_m} \right) \cdot (2N_f)^b}{\varepsilon'_f} \right]^{\frac{1}{c}} \quad (13)$$

4 METODOLOGIA

O problema a ser analisado consiste em um membro estrutural dado na Fig. (4), onde o mesmo é representado por uma placa metálica com entalhes nas bordas sobre carregamento axial. A Figura (4a) ilustra a geometria da placa e o carregamento aplicado (F), enquanto a Fig. (4b) apresenta a história de tensão nominal induzida em MPa. Na Tabela 1 apresentam-se os valores determinísticos para uma liga de alumínio 2024-T351 que serão utilizados na regressão polinomial de segunda ordem (Fig. (6)).

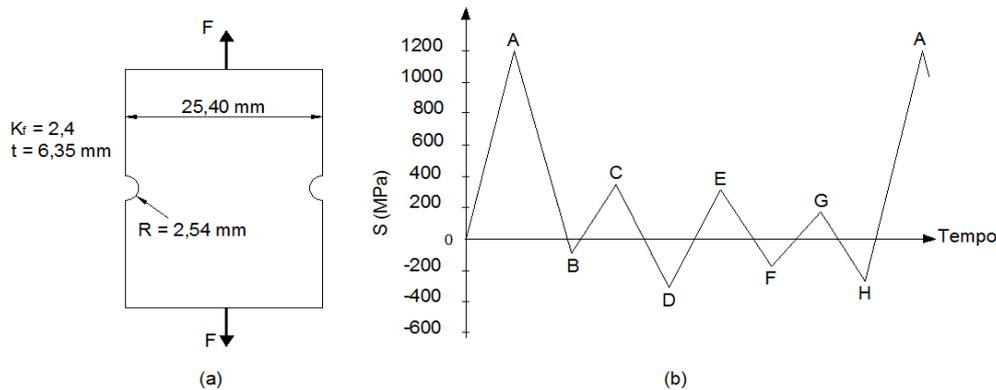


Figura 4. Placa com furo sob força axial (a) e história de tensão aplicada (b).

Tabela 1. Valor das variáveis Determinísticas

Variáveis Determinísticas	E (MPa)	F (MPa)	G (MPa)	H (MPa)	E_m (MPa)	b (-)	c (-)	K_f (-)
Média	310	-172	172	-241	73100	-0,113	-0,713	2,4
Coeficiente Variação (%)	-	-	-	-	-	-	-	-

(-) adimensional

As variáveis de entrada deste trabalho consistem nas variáveis probabilísticas apresentadas na Tabela 2. As tensões A , B , C , D seguem uma distribuição normal. Pode-se ainda afirmar que os parâmetros do material H' , n' , σ'_f e ε'_f também atendem a uma distribuição normal. Além disso, se apresentam as respectivas médias, desvios padrões e coeficientes de variação para as oito variáveis de entrada.

Tabela 2. Valor das variáveis aleatórias

Variáveis Probabilísticas	H' (-)	n' (-)	σ'_f (MPa)	ε'_f (-)	A (MPa)	B (MPa)	C (MPa)	D (MPa)
Média	662	0,07	927	0,409	1200	-69	345	-310
Desvio Padrão	99,3	0,0105	139,05	0,0613	240	13,8	69	62
Coefficiente Variação (%)	15	15	15	15	20	20	20	20

(-) adimensional

Esta pesquisa consiste em uma análise de um fenômeno através de uma implementação realizada no ambiente de programação MATLAB. Além disso, o fenômeno a ser analisado poderá ser de qualquer tipo e consiste em um problema a ser solucionado. No entanto, para este trabalho será considerado o comportamento dos parâmetros de fadiga do membro estrutural da Fig. (4). O processo de análise de um fenômeno é descrito pela Fig. (5), onde são necessários variáveis de entrada do mesmo para se obter uma resposta ou saída através de equações do próprio fenômeno.

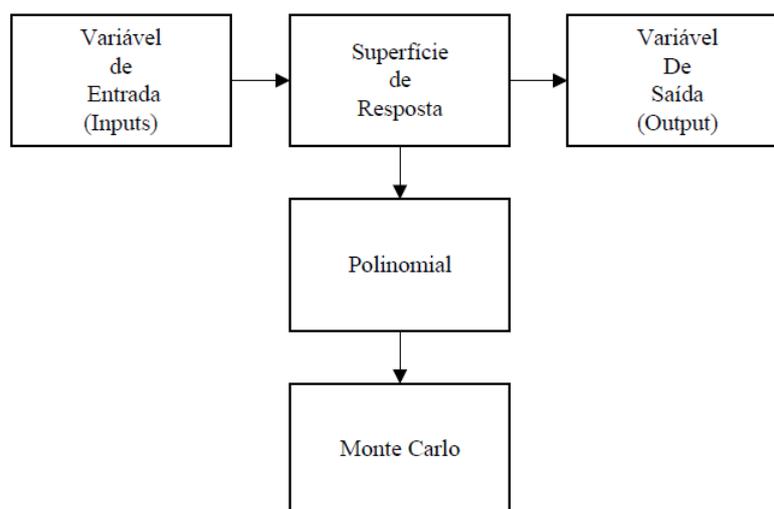


Figura 5. Processo de análise de um fenômeno

Para a regressão polinomial, ou seja, para a superfície de resposta será considerado o FF e CCD. Outra metodologia utilizada consiste no uso de LHS e SS na geração de valores aleatórios que serão utilizados como *Inputs* e comparados os seus resultados aos dos fatoriais. No caso do FF, serão considerados pontos a um e dois desvios padrões ($FF^{1/II}$) e outro modelo a dois desvios padrões (FF^{II}) tendo, portanto 13121 e 6561 pontos por variável de entrada respectivamente. No entanto para o CCD, o número é relativamente inferior, tendo apenas 513 pontos ($CCD^{1/II}$) e 257 pontos (CCD^{II}) por variável de entrada sendo semelhante ao FF. Por outro lado, para os valores aleatórios do SS^{II} e do LHS^{II} , considera-se um domínio de [-2,2] desvios padrões e com 125 amostras para cada *input* em ambos os casos. Por fim, será realizada uma análise comparativa dos valores de LHS e SS para 2, 3 e 4 desvios padrões com 125 amostras por superfície de resposta. No entanto, para o número de

ciclos de vida das variáveis de entrada para a regressão, fora considerado uma rotina implementada por Negrão (2014) e que fora adaptada para atender a este trabalho.



Figura 6. Modelo de Polinômios de segunda ordem (P=2)

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta etapa, apresentam-se os resultados da solicitação a fadiga do membro estrutural. Na Tabela 3, são apresentados os parâmetros de regressão para os quatro casos estudados em que a somatória de erros (*SSE*) tende a diminuir consideravelmente quando os dados de entrada não seguem o padrão do fatorial. No caso do *RMSE*, percebe-se que o mesmo se assemelha ao *SSE*, ou seja, para valores de regressão *LHS* e *SS* os mesmos se apresentam inferiores aos dos experimentos fatoriais e, portanto a regressão se torna mais eficiente. Por fim, para o coeficiente de determinação, nota-se que mais de 95% da variabilidade dos pontos pode ser explicada pela regressão de todos os modelos.

Tabela 3. Parâmetros da regressão de P =2

Regressão $N_f(P=2)$	SSE	r^2	RMSE	Número de Amostras por Superfície
FF ^{II}	2,75 E+4	0,96	2,05	6561
FF ^{III}	3,50 E+4	0,95	1,63	13121
CCD ^{II}	1,34 E+3	0,97	2,28	257
CCD ^{III}	2,08 E+3	0,96	2,01	513
LHS ^{II}	1,61 E+2	0,96	1,14	125
SS ^{II}	5,37 E+1	0,99	0,65	125

Os resultados das superfícies regredidas para os Meta Modelos da Tabela 3 se apresentam nas Fig.(7) a (9) e expressam o número de ciclos de vida à fadiga do membro estrutural em função das três principais variáveis aleatórias que são o primeiro vetor de tensão solicitante cíclica (A), o coeficiente de resistência à fadiga cíclica (σ'_f) e o coeficiente de ductilidade a fadiga (ε'_f). As Figuras 7a e 7b correspondem ao FF^{II} e as Fig. 7c e 7d ao CCD^{II} e pode-se ainda aferir das mesmas que o fatorial composto central apresenta uma curvatura mais acentuada principalmente para as variáveis randômicas A e σ'_f . Além disso, também na mesma figura pode-se observar a existência de uma escala indicando o número de ciclos de

vida para cada superfície de resposta que apresenta uma predominância na mesma entre 5 e 15 ciclos de vida à fadiga.

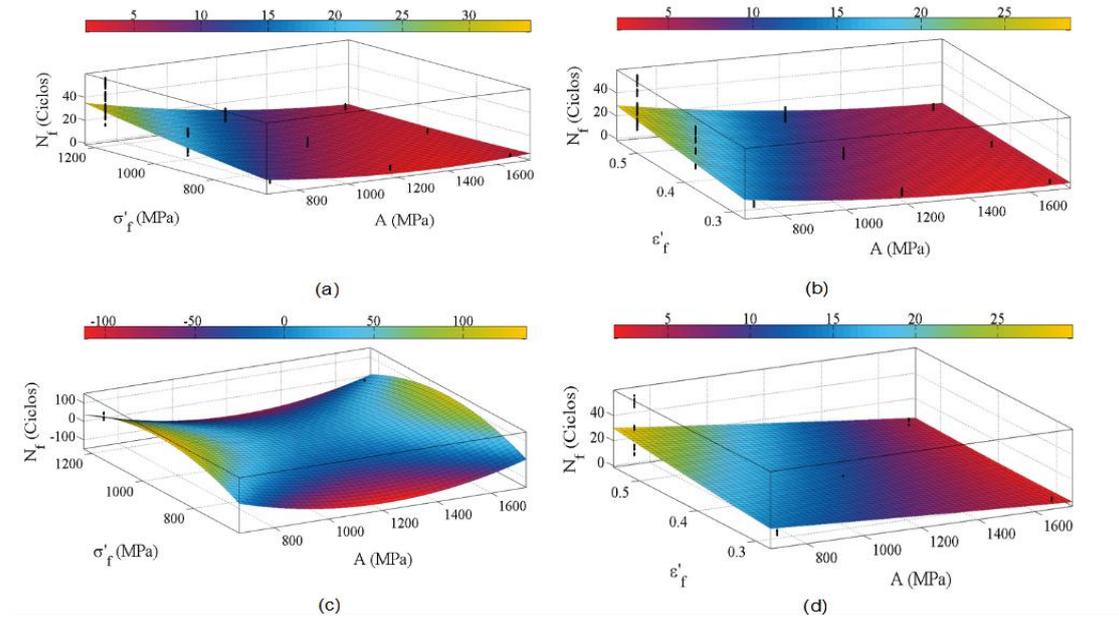


Figura 7. Superfície de Resposta a dois desvios padrões com as principais variáveis aleatórias para (a) e (b) com Fatorial Completo e para (c) e (d) com Fatorial Composto Central.

A Figura 8 corresponde a um fatorial $FF^{1/II}$ e $CCD^{1/II}$ a um e dois desvios padrões com comportamento semelhante ao da Fig.(7). No entanto, devido a um maior número de amostras utilizadas na regressão se torna possível analisar a importância da variável ϵ'_f , uma vez que, para esta figura, a mesma tende a apresentar uma curvatura que antes era praticamente inexistente. Além disso, a presença de curvatura é característica de regressão de segunda ordem mostrando a influencia da variável no modelo.

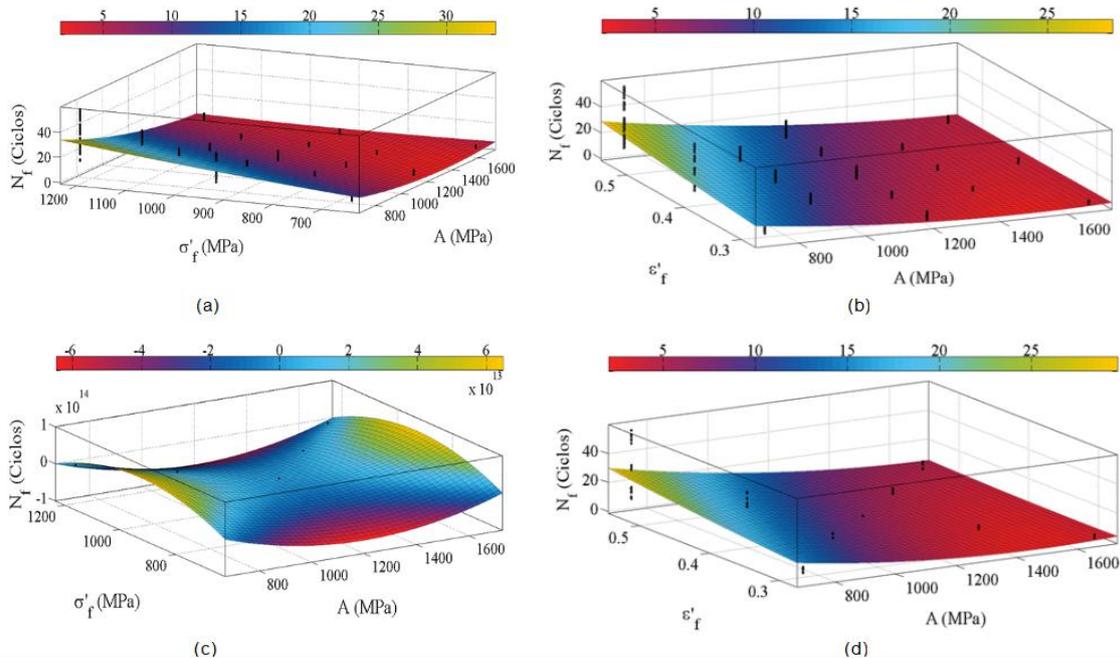


Figura 8. Superfície de Resposta a 1/2 desvios padrões com as principais variáveis aleatórias para (a) e (b) com Fatorial Completo e para (c) e (d) com Fatorial Composto Central.

Na Figura (9), as variáveis de entrada utilizadas na determinação das superfícies de resposta são randômicas a dois desvios padrões para LHS^{II} e SS^{II}. De acordo com a figura, os pontos estão uniformemente distribuídos pela superfície diferenciando-se, portanto, do formato padronizado utilizado pelos experimentos fatoriais. Além disso, a superfície de resposta para ambos os modelos da figura apresentam predominância entre 5 a 10 ciclos de vida à fadiga. Pode-se ainda aferir que a curvatura se torna mais acentuada que a do fatorial completo, porém não superior ao comportamento do fatorial composto central, pois o mesmo consiste em um método de aproximação mais acentuada.

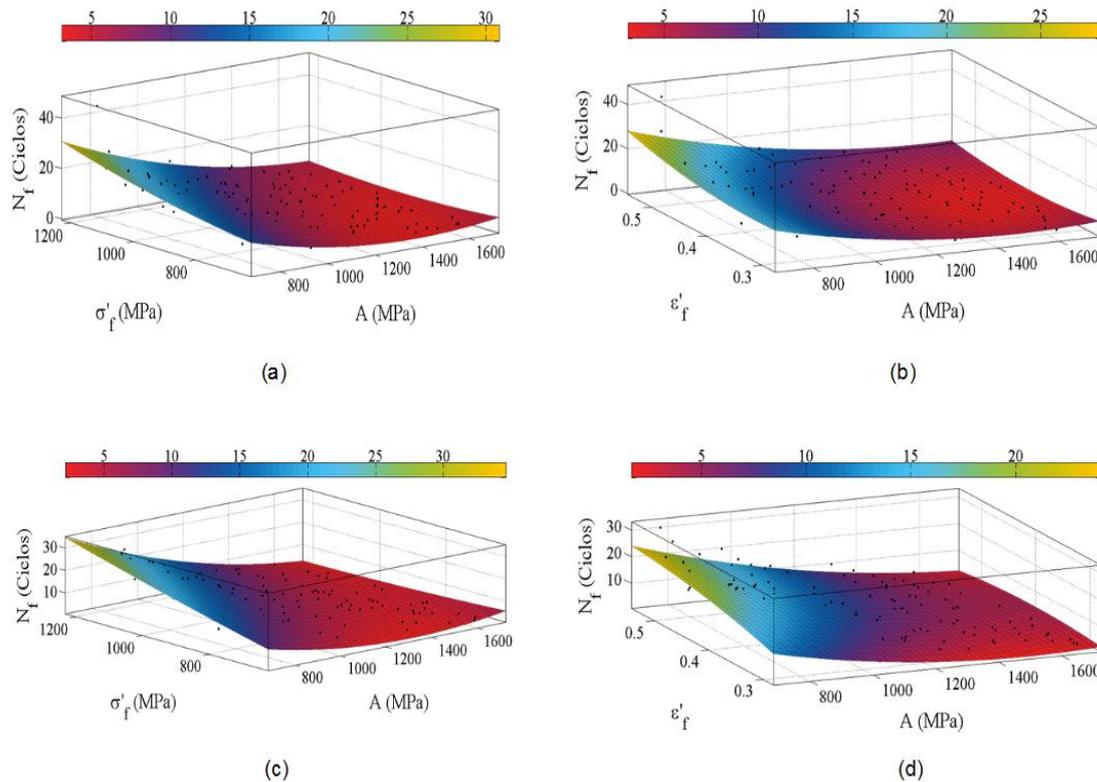


Figura 9. Superfície de Resposta a 2 desvios padrões com as principais variáveis aleatórias para (a) e (b) com Hipercubo Latino e para (c) e (d) com Sequência de Sobol.

A regressão das amostras da Tabela 3 proporcionou a determinação dos coeficientes dos polinômios para os Meta Modelos e através destes polinômios pode-se quantificar a incerteza através das funções densidades de probabilidades (*PDF*). Na Figura (10), apresenta-se as *PDFs* dos modelos da Tabela 3 e de LHS e SS a três desvios padrões, onde para cada modelo considerou-se 5E+5 simulações de Monte Carlo. A validação das *PDFs* é realizada através da comparação dos modelos com a rotina de Negrão (2014) que também considerou para 5E+5 simulações. Além disso, todos os modelos de ciclos de vida se adequaram melhor a distribuição de valor extremo generalizado e as *PDFs* que melhor se aderiram ao modelo de referência (MC^{REF}) de Negrão (2014) são o SS e o LHS a dois desvios padrões. Portanto, percebe-se que o uso de valores aleatórios como variáveis codificadas é muito eficiente e que os mesmos apresentam um comportamento muito superior ao experimento fatorial. Por fim, o uso do LHS e SS necessitou um número de amostras inferior ao FF e ao CCD e desta forma, apresentou-se mais eficiente com menor tempo de processamento e com resultados mais precisos.

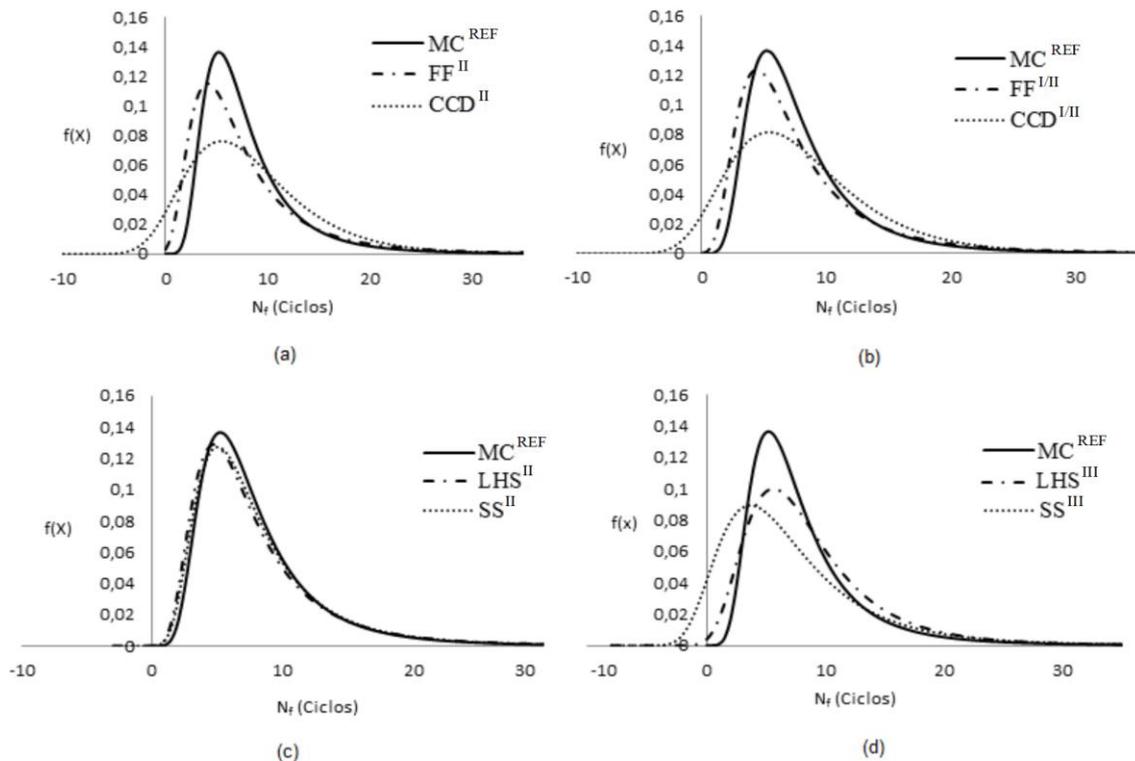


Figura 10. Função Densidade de Probabilidade da vida de fadiga para (a) FF^{II} , CCD^{II} e MC^{REF} , (b) $FF^{I/II}$, $CCD^{I/II}$ e MC^{REF} , (c) LHS^{II} , SS^{II} e MC^{REF} , (d) LHS^{III} , SS^{III} e MC^{REF} .

Uma última análise consiste em se verificar o desempenho do LHS e do SS para Meta modelos com 2, 3 e 4 desvios padrões. Além disso, o objetivo desta análise é observar o comportamento da distribuição a medida que o domínio das amostras randômicas aumenta. Na Tabela 4, encontra-se os parâmetros de regressão polinomial de segunda ordem. Assim, pode-se afirmar que a medida que o domínio diminui, o modelo passa a apresentar um melhor desempenho. Percebe-se também que o domínio entre 4 desvios padrões apresenta-se com uma somatória de erros alta e com coeficiente de determinação inferior a 90%, ou seja, menos de 90% da variabilidade dos pontos pode ser explicada pela regressão.

Tabela 4. Parâmetros com 2,3,4 desvios padrões da regressão de $P=2$

Regressão $N_f (P=2)$	SSE	r^2	RMSE	Número de Amostras por Superfície
LHS^{II}	1,61 E+2	0,96	1,14	125
SS^{II}	5,37 E+1	0,99	0,65	125
LHS^{III}	2,62 E+2	0,97	1,45	125
SS^{III}	1,61 E+3	0,92	3,59	125
LHS^{IV}	1,31 E+4	0,87	10,25	125
SS^{IV}	1,00 E+5	0,67	28,39	125

6 CONCLUSÕES

Em vista dos argumentos apresentados anteriormente, pôde-se demonstrar a eficiência e a precisão para experimento fatorial, hipercubo latino e sequência de sobol, aos quais foram usados como métodos de amostragem para Meta modelos. Desta forma, os mesmos foram considerados em regressão de segunda ordem para predição do número de ciclos de vida à fadiga. Além disso, verificou-se que as funções de densidade de probabilidade foram essenciais para prever a quantificação da incerteza.

Os modelos gerados por SS e LHS estimaram melhor a quantificação da incerteza para um número inferior de amostras. Assim, os mesmos demonstraram-se mais eficientes que o experimento fatorial. No entanto, ao analisar-se as superfícies de resposta geradas a dois desvios padrões ($\sigma = 2$), verificou-se que a regressão satisfaz a todos os Meta modelos propostos. Por fim, percebe-se que o LHS e o SS estimados para a determinação das *PDFs* apresentaram, para $\sigma < 2$, valores próximos à média da distribuição.

AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília pela estrutura fornecida para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Blatman, G., 2009. Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis. Doctorate thesis, Université Blaise Pascal – Clermont II. Ecolé Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Clermont – Ferrand.
- Chen, T., Hadinoto, K., Yan, W., e Ma, Y., 2011. Efficient meta-modelling of complex process simulations with time-space-dependent outputs. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 35, pp. 502-509.
- Dowling, N. E., 2013. Mechanical Behavior of Materials – Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue. Person, pp. 416 – 790.
- Dubourg, V., e Sudret, B., 2014. Meta-model-based importance sampling for reliability sensitivity analysis. *Structural Safety*, vol. 49, pp. 27-36.
- Gaspar, B., Teixeira, A.P., e Soares, C.G., 2014. Assessment of the efficiency of Kriging surrogate models for structural reliability analysis. *Elsevier, Probabilistic Engineering Mechanics*, vol 37, pp. 24 - 34.
- Montgomery, D.C., 2013. Design and Analysis of Experiments. John & Sons.
- Myers, R.H., Montgomery, D. C., e Cook, C. M, 2009. Response Surface Methodology – Process and Product Optimization Using Designed Experiments. New Jersey.
- Negrão, G.Q., 2014. *Implementação e avaliação da metodologia deformação-vida em componentes entalhados*. Dissertação de mestrado, Publicação ENM. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, pp. 7 – 18.
- Pina, A.C., Albrecht, C.H., Lima, B.S.L. P., e Jacob, B.P., 2014. Wavelet network meta-models for the analysis of slender offshore structures. *Engineering Structures*, vol. 68, pp. 71-84.

Santilli, A., Puente, I., e Tanco, M., 2011. A factorial design study to determine the significant parameters of fresh concrete lateral pressure and initial rate of pressure decay. *Construction and Building Materials*, vol. 25, pp. 1946 – 1955.

Shields, M.D., e Zhang, J., 2016. The generalization of Latin hypercube sampling. *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 148, pp. 96 – 108.

Sudret, B., 2012. Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. *Asian – Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications. Published by Research Publishing*. Singapore, pp. 1 – 7.

Tsao, H.S.J., e Patel, M.H., 2015. A general intuitive pattern for optimally sequencing treatment combinations in 2^k factorial experiment and a simple estimation algorithm. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 85, pp. 423-436.

Yan, W., Hu, S., Yang, Y., Gao, F., e Chen, T., 2011. Bayesian migration of Gaussian process regression for rapid process modeling and optimization. *Chemical Engineering Journal*, vol. 166, pp. 1095-1103.

Zhao, W., e Qiu, Z., 2013. An efficient response surface method and its application to structural reliability and reliability-based optimization. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol.67, pp. 34-42.