



## QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DA VIDA DE PLACAS DE AÇO SOB À FADIGA VIA POLINÔMIOS DE HERMITE

**Nelson Afanador García**

**Francisco Evangelista Junior**

**Fábio Comes de Castro**

nafanadorg@aluno.unb.br ; nafanadorg@ufps.edu.co

fejr@unb.br

fabiocastro@unb.br

Universidade de Brasília

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, primeiro andar, Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

**Abstract.** *O objetivo deste trabalho é quantificar a incerteza no número de ciclos para falha por fadiga de componentes entalhados por meio do uso de polinômios de Hermite multidimensionais. A metodologia deformação-vida de estimativa de vida à fadiga é adotada e considera-se como variáveis aleatórias as propriedades do material e os níveis do carregamento aplicado. O uso de séries de polinômios de Hermite multidimensionais permitiu a predição da aleatoriedade do vetor de saída (número de ciclos para falha). Demonstra-se que um polinômio de Hermite multidimensional é capaz de estimar de forma adequada a propagação das incertezas associadas às variáveis de entrada. Os resultados sugerem que incertezas nas propriedades do material e no carregamento podem resultar em variações significativas no número de ciclos para falha de componentes sujeitos à falha por fadiga.*

**Keywords:** *Polinômio de Hermite Multidimensional, Fadiga, Quantificação da incerteza, Metodologia deformação-vida*

## 1 INTRODUÇÃO

A análise das incertezas associadas às propriedades do material, aos níveis do carregamento e às dimensões de membros estruturais é de fundamental importância na quantificação da confiabilidade de projetos mecânicos. Há dois métodos comumente usados para estimar a propagação da incerteza nos parâmetros do modelo: o método analítico e o método de Monte Carlo. No método analítico (Ghanem e Spanos, 2003; Adomian, 1980) a incerteza na saída é representada explicitamente como funções de incerteza nas variáveis de entrada. O método de Monte Carlo (Doll e Freeman, 1986; Iman e Conover, 1980) envolve um número suficientemente grande de simulações do modelo com uma amostra das variáveis aleatórias de entrada, estimadas mediante as funções de densidade de probabilidade,  $f_{\mathbf{X}}(x)$ , com grande custo computacional e tempo. É necessário utilizar outros métodos computacionais mais eficientes para estimar a incerteza em modelos complexos, que utilizem um número significativamente reduzido de soluções.

Recentemente, emergiu uma nova técnica aproximada e mais barata chamada Polinômios de Hermite Multidimensional ou Polinômios de expansão de caos, PEC (Blatman e Sudret, 2008; Phoon e Huang, 2007; Xiu, 2009). Os PEC podem ser classificados dentro de dois enfoques: formulação intrusiva e formulação não intrusiva; na formulação intrusiva a incerteza é expressada explicitamente dentro da análise do sistema, sob investigação (utiliza o método de Galerkin (Sudret e Der-Kiureghian, 2000)), na formulação não intrusiva o PEC são usados para criar superfícies de resposta (chamados método de superfície de resposta estocástico (Isukapalli, 1999) sem interferir na análise do sistema (S-K. Choi e Canfield, 2007).

A literatura não reporta nenhum estudo de caso que quantifique a incerteza da vida à fadiga de componentes mecânicos usando PEC. Esta pesquisa analisa a aleatoriedade das variáveis, como materiais e ao carregamento no número de ciclos para falha,  $N_f$ , sob a metodologia deformação-vida utilizando PEC num enfoque não intrusivo. Os coeficientes do polinômio foram determinados usando o método da colocação probabilístico (Tatang, 1995; Sudret, 2007). A principal contribuição desta pesquisa foi a quantificação da propagação da incerteza dos parâmetros do material e o carregamento através da determinação da  $f_{\mathbf{X}}(x)$ .

## 2 POLINÔMIOS DE EXPANSÃO DE CAOS

A variável aleatória  $u(\theta)$  está definida no espaço probabilístico  $(\Theta, F, P)$  expandida em uma base polinomial multivariada que segue uma função de distribuição de probabilidade. Em que, o espaço probabilístico é definido como uma tripla  $(\Theta, F, P)$  formada por um conjunto  $\Theta$  (chamado espaço amostral), uma  $\sigma$ -álgebra  $F$  (chamado eventos) em  $\Theta$  e uma medida positiva  $P$  nessa  $\sigma$ -álgebra tal que a probabilidade  $P(\Theta)=1$ . O polinômio multivariado pode ser escrito como um processo aleatório  $u(\theta)$ , como é apresentado na Eq. (1),

$$u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Psi_i[\xi(\theta)] \quad (1)$$

em que  $a_i$  são os coeficientes determinísticos desconhecidos,  $\xi_i(\theta)$  é um conjunto de variáveis aleatórias normais padronizadas distribuídas idêntica e independente e  $\Psi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \xi_{i4}, \dots, \xi_{in})$  são polinômios Hermite que forma uma base ortogonal  $L^2(\Theta, F, P)$  no qual é um espaço de Hilbert das variáveis aleatórias com variância finita.

O conjunto de polinômios ortogonais multidimensionais é comumente chamado caos homogêneo de grau  $p$ , a dimensão  $i$  e  $\theta$  representa os resultados no espaço de possíveis resultados de eventos aleatórios. Outra forma de representar os polinômios ortogonais multidimensionais segundo Ghanem e Spanos (2003) é mostrado na Eq. (2),

$$u(\theta) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots \quad (2)$$

em que  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p})$  denota os polinômios de Hermite de ordem  $p$  em termos das variáveis aleatórias normais independentes multidimensionais  $\xi = [\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p}]$ .

Há uma relação entre as funções  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p})$  e  $\Psi_i(\xi)$  um a um. A soma na Eq. (1) é realizada de acordo com a ordem do polinômio de Hermite, enquanto que a Eq. (2) se faz um recontagem, iniciando com os polinômios de ordem menor.

É possível construir os polinômios de Hermite de qualquer dimensão e grau usando a função de probabilidade normal padronizada ou um algoritmo.

## 2.1 Construção de Polinômios de Expansão de Caos

Os polinômios de Hermite podem ser gerados a partir da função de densidade de probabilidade normal padronizada, como pode ser visto na Eq. (3) para cada grau e dimensão segundo Ghanem e Spanos (2003),

$$\Gamma_p(\xi) = (-1)^p e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \quad (3)$$

em que  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p})$  denota os polinômios de Hermite de ordem  $p$  em termos das variáveis aleatórias normais independentes multidimensionais  $\xi = [\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}, \dots, \xi_{i_p}]$ .

Na literatura é possível encontrar algoritmos que permitam a construção dos polinômios de Hermite de ordem  $n+1$  em termos das ordens dos polinômios anteriores, como é apresentado na Eq. (4).

$$H_{n+1}(\xi(\theta)) = \xi H_n(\xi(\theta)) - n H_{n-1}(\xi(\theta)) \quad (4)$$

A serie da Eq.(2) pode ser truncada num número finito de termos  $N$  e  $\hat{u}$  é uma resposta aproximada, Eq. (5) que vai depender do número de termos do truncamento  $N$ ,

$$u(\theta) \approx \hat{u}(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \Psi_i[\xi(\theta)] \quad (5)$$

em que o número de termos do truncamento  $N$  numa expansão de ordem  $p$  envolvendo  $n$  variáveis aleatórias é dada pela Eq. (6).

$$N = \frac{(n+p)!}{n! p!} \quad (6)$$

Na determinação dos coeficientes  $a_\alpha$  existem vários métodos que podem ser utilizados dependendo do tipo de formulação utilizada no modelo matemático.

## 2.2 Determinação dos coeficientes de polinômios de expansão de caos

Se distinguem duas classes de métodos para a determinação dos coeficientes; o método intrusivo e não-intrusivo.

A propagação da incerteza na simulação computacional do modelo via polinômios de caos com um enfoque intrusivo, onde todas as variáveis dependentes e os parâmetros aleatórios na equação que governa são substituídos por seus polinômios de expansão de caos gera um sistema de equações determinísticas a ser resolvido. Este procedimento precisa fazer modificações do código computacional (determinístico) existente. O método não intrusivo é mais simples na teoria, porém uma formulação não intrusiva para problemas complexos pode ser de difícil implementação e um alto custo computacional segundo Hosder e Walters (2010).

Entre os métodos não - intrusivos destacam-se: método da projeção (Keese e Matthies, 2005 Ghiocel e Ghanem, 2002; Maitre et al., 2001), método da colocação estocástica (Xiu, 2009; Xiu e Hesthaven, 2005), método da regressão não-intrusiva (Blatman e Sudret, 2011; Blatman e Sudret, 2010; Berveiller et al., 2006; Isukapalli, 1999). O método da regressão não-intrusiva ou método da colocação estocástica com regressão desenvolvido por Isukapalli, será utilizado nesta pesquisa. A quantidade e qualidade dos pontos de colocação para cada variável aleatória padronizada definirá a qualidade da aproximação.

## 2.3 Seleção dos pontos de colocação

A seleção dos pontos de colocação de um polinômio de caos de dimensão  $n$  e de ordem  $p$  correspondem às raízes do seguinte polinômio, ou seja,  $p+1$ , de cada uma das variáveis de entrada (Webster et al., 1996; Tatang, 1995; Villadsen e Michelsen, 1978). O conjunto de pontos de colocação são eleitos de todas as combinações possíveis  $(\xi_{1,1}, \xi_{2,1}, \xi_{3,1}, \dots, \xi_{n,1})$ ,  $(\xi_{1,2}, \xi_{2,2}, \xi_{3,2}, \dots, \xi_{n,2})$ ,  $\dots$ ,  $(\xi_{1,N}, \xi_{2,N}, \xi_{3,N}, \dots, \xi_{n,N})$ , com a maior probabilidade. O número de pontos de colocação selecionados devem ser o dobro do número de coeficientes desconhecidos a serem estimados nos polinômios de caos, para obter um estimador robusto do coeficiente (Isukapalli, 1999).

Um diagrama de fluxo relacionado por (Isukapalli, 1999; Huang et al., 2009) é dado na Fig. 1, em que se indica os passos a seguir no modelo da colocação estocástico com regressão.

Os PEC é um método espectral, (Blatman, 2009; Huang et al., 2009; Ghanem e Spanos, 2003; Isukapalli, 1999; Papoulis, 1991; Phoon e Huang, 2007) que permite a propagação da incerteza das variáveis aleatórias de entrada através da construção de funcionais não lineares dependentes da solução (Ghanem e Spanos, 2003; Le-Maitre e Knio, 2010) à variável aleatória de saída. Isto facilita a quantificação da incerteza da saída através de  $f_X(x)$  (Tatang, 1995). A convergência da solução aproximada é medida por comparação dos PEC de diferentes graus segundo Isukapalli (1999) ou entre PEC e SMC (Le-Maitre e Knio, 2010; Sudret, 2007), assegurando a precisão dos resultados. A convergência espectral vai depender da alta diferenciabilidade das funções de Hermite contido em cada variável aleatória normal padrão segundo Xiu (2010).

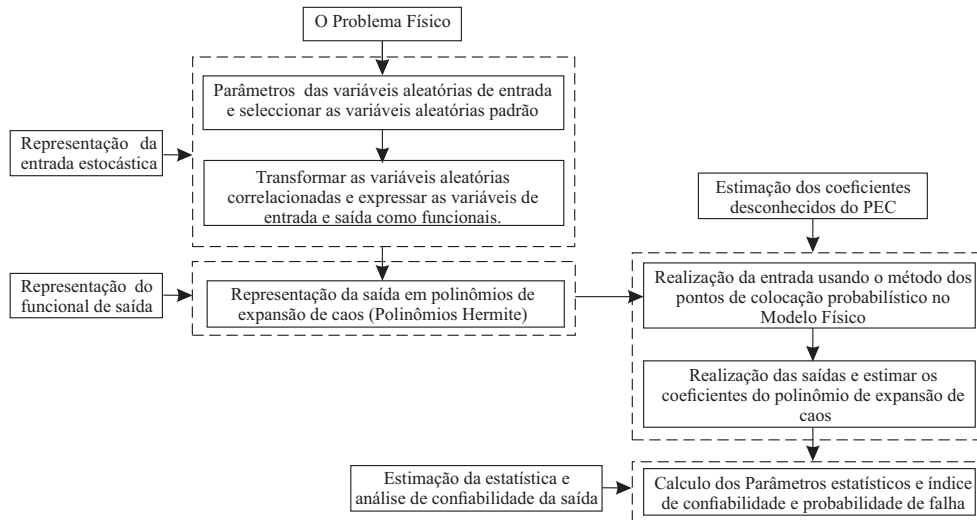


Figura 1: Diagrama de fluxo do método da colocação baseado em regressão. Adaptado de Isukapalli (1999) e Huang et al. (2009)

### 3 ANÁLISE DE FADIGA EM CORPOS ENTALHADOS SOB CARREGAMENTO DE AMPLITUDE CONSTANTE

Foi realizada uma análise probabilística da vida estimada à fadiga pela metodologia deformação-vida no cenário de componentes entalhados sob carregamento de amplitude constante, usando PEC e a SMC, como uma forma de avaliar os resultados obtidos da simulação com PEC. Na metodologia deformação-vida implementada, a relação de (Neuber, 1961) foi utilizada para estimar as tensões e deformações na raiz do entalhe e a relação de (Morrow, 1965) para calcular o número de ciclos para falha.

O estudo foi conduzido em uma placa com dois entalhes laterais semi-circulares submetida à força axial de amplitude constante (Bannantine et al., 1989; Socie et al., 1984). A configuração da placa é mostrada na Fig. 2, onde  $K_t$  é o fator de concentração de tensões elástico,  $K_f$  é o fator de concentração de tensões à fadiga e  $t$  é a espessura da placa. A placa foi fabricada em um aço AISI 4340 cujas propriedades mecânicas cíclicas estão listadas na Tabela 1, em que,  $\sigma_0$  é a tensão de escoamento e  $\sigma_u$ , é o limite de resistência à tração. As amplitudes da força aplicada e o número de ciclos para a falha à fadiga observados em laboratório estão listados na Tabela 2.

Tabela 1: Propriedades cíclicas do aço AISI 4340.

$\sigma'_f$ (MPa)	$b$ (-)	$\epsilon'_f$ (-)	$c$ (-)	$n'$ (-)
1165	-0,081	1,142	-0,67	0,123
$H'$ (MPa)	$\sigma_0$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)		
1162	648	786		
(-)	adimensional			

O número de ciclos para falha segundo a metodologia de Neuber–Morrow foi estimado utilizando os PEC. Uma análise similar empregando-se simulação de Monte Carlo foi realizada com o objetivo de comparar os resultados e a quantidade necessária de simulações utilizadas por PEC e SMC. Os parâmetros aleatórios considerados na modelagem via PEC e SMC são apresentados na Tabela 3.

Utilizando os PEC foram estimadas os ciclos de vida pela metodologia Neuber-Morrow, além disso, foi avaliada por simulação de Monte Carlo usando a mesma metodologia com o fim de comparar os resultados e a quantidade necessária de simulações utilizadas por PEC e SMC. Os parâmetros aleatórios considerados na modelagem via PEC e SMC são dados na Tabela 3.

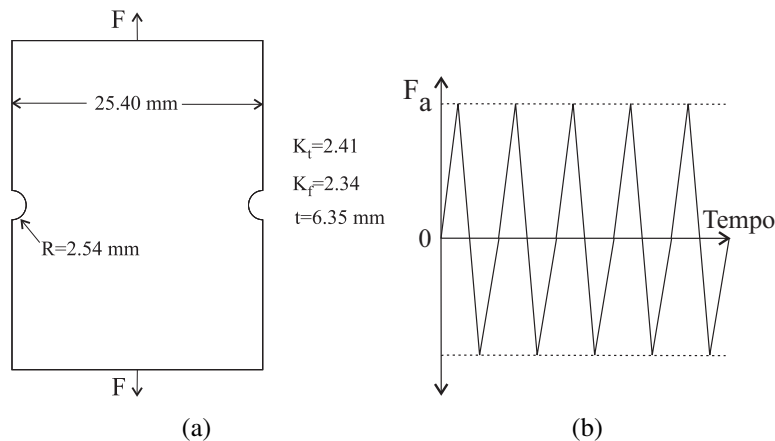


Figura 2: Placa com dois entalhes laterais semi-circulares (a) submetida a carregamento de amplitude constante (b).

As tensões que foram aplicadas e os ciclos de vida observados na placa estudadas por Socie et al. (1984) e Bannantine et al. (1989) estão indicadas na Tabela 2.

Tabela 2: Resultados dos ensaios de fadiga sob carregamento de amplitude constante.

$F_a$ (kN)	$N_f$ (ciclos)
88,96	62
71,17	635
62,28	1300

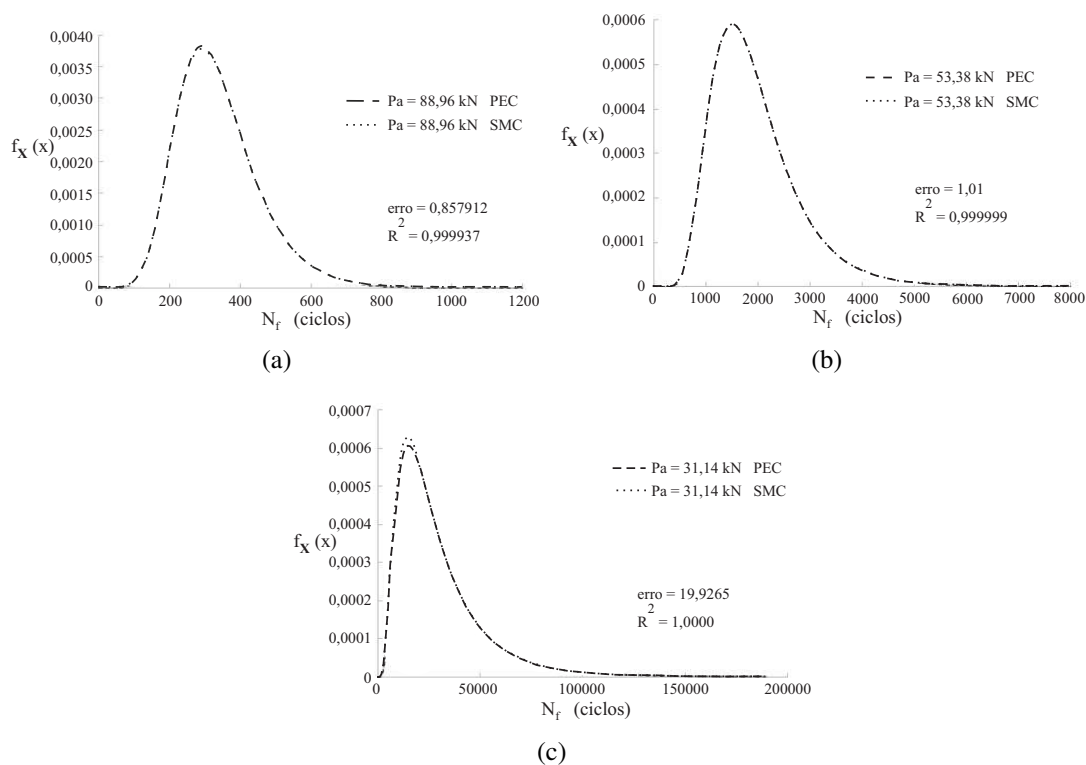
A fim de estimar o número de ciclos para falha que o corpo de prova pode resistir aplicando um carregamento constante foi necessário modificar o programa desenvolvido por . A modificação consistiu em incorporar os PEC e SMC na estimação do número de ciclos para falha,  $N_f$ , ou seja, estabelecer um polinômio de quarta dimensão (para quatro variáveis aleatórias inicialmente) e um grau adequado com o alvo de simplificar as operações e expressar  $N_f$  em função das variáveis aleatórias padronizadas de entrada. O grau obtido do polinômio foi comparado com os resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo, com o objetivo de estabelecer o melhor grau do polinômio.

**Tabela 3: Parâmetros aleatórios considerados na análise probabilística de vida à fadiga.**

Varáveis Aleatórias	$\mu$	V
$H'$ (MPa)	1162	0,15
$n'$ (-)	0,123	0,15
$\sigma'_f$ (MPa)	1165	0,15
$\epsilon'_f$ (-)	1,142	0,15

Estabelecido o PEC que representa o sistema mecânico descrito anteriormente é possível via simulação de Monte Carlo estabelecer a função de densidade de probabilidade da variável de saída,  $N_f$ , as diferentes estatísticas e a probabilidade de falha estimada com a metodologia Neuber-Morrow.

Para achar o PEC foi necessário apenas 70 simulações e o melhor grau foi estabelecido como o terceiro. A precisão do PEC foi comparada entre SMC para 1.000.000 de dados e 12.000 simulações para PEC, ou seja, PEC só precisou de 1,2 % das simulações realizadas com Monte Carlo. Os resultados mostrados nas Figs. 3(a)–(c) mostram que os métodos PEC e SMC resultaram em uma distribuição de probabilidade Lognormal e que as funções  $f_X(x)$  são similares.



**Figura 3: Função de densidade de probabilidade da vida de fadiga com carregamento constante (a)  $P_a=88,96$  kN, (b)  $53,38$  kN, (c)  $31,14$  kN**

É possível mediante PEC dado o vetor de médias, os coeficientes de variação e as distribuições de probabilidade encontrar a probabilidade de falha da placa com dois entalhes laterais semi-circulares utilizando a metodologia deformação-vida adotada pelo presente trabalho. A probabilidade de falha para o número de ciclos,  $N_f = 62$ , observado em laboratório, é indicada na Eq. (7).

$$P [N_f < 62] = 4.7791E - 07 \quad (7)$$

As funções de densidade de probabilidade foram utilizadas para achar a média e desvio padrão do PEC e a probabilidade de falha, assim como a média e desvio padrão da SMC. Os resultados estão listados na Tabela 4 e mostram que os PEC podem ser usados sem perda de acurácia.

**Tabela 4: Probabilidade de falha à fadiga para placa entalhadas sob carregamento de amplitude constante**

$F_a$ (kN)	$N_{fObs}$ (ciclos)	$N_{fPEC}$ $\mu$	$V_{PEC}$	$P [N_{fObs} < N_f < N_{fPEC}]$	$N_{fSMC}$ $\mu$	$V_{SMC}$
88,96	62	338	0,3436	56,55E-02	338	0,3454
71,17	635	696	0,3668	17,72E-02	696	0,3676
62,28	1300	1104	0,3867	29,04E-02	1104	0,3867

É possível estender o estudo ao caso de carregamento variável a fim de estabelecer a probabilidade de falha de uma placa com dois entalhes laterais semi-circulares, como parte da validação do PEC.

#### 4 MODELAGEM DE FADIGA EM CORPOS ENTALHADOS SOB CARREGAMENTO DE AMPLITUDE VARIÁVEL

Foi realizado diversas análises probabilísticas do número de ciclos para falha considerando-se incerteza em 4 propriedades do material, porém a aleatoriedade no carregamento não foi considerado. Nesta seção o carregamento será considerado aleatório desde a primeira componente do vetor de carregamento  $S0$ , até os quatro primeiros componentes do vetor de carregamento ( $S1, S2, S3$ ).

A continuação são apresentados os parâmetros aleatórios de entrada analisados, vide a Tabela 5 além de  $S0_4 = -310$  MPa;  $S0_5 = 310$  MPa;  $S0_6 = -172$  MPa;  $S0_7 = 172$  MPa;  $S0_8 = -241$  MPa;  $E = 73.100$  MPa;  $b = -0,113$ ;  $c = -0,713$  e  $K_f = 2,4$  e os resultados obtidos para 8 variáveis aleatórias para o caso de estudo de uma placa com furo central cujo material é uma liga de alumínio 2024-T351 submetida um carregamento variável.

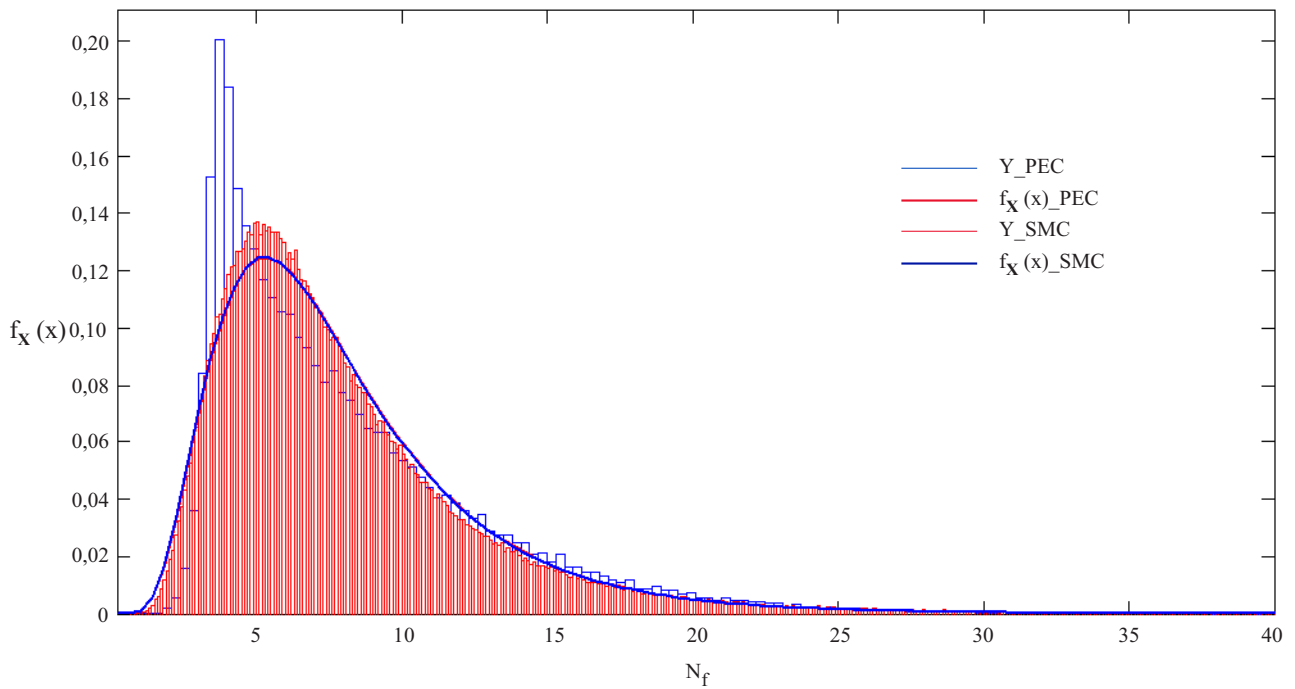
Estabelecido o PEC que representa o sistema mecânico descrito anteriormente é possível via simulação de Monte Carlo estabelecer a função de densidade de probabilidade da variável de saída,  $N_f$ , as diferentes estatísticas e a probabilidade de falha estimada mediante a metodologia Neuber-Morrow.



**Tabela 5: Parâmetros aleatórios considerados na análise probabilística dos ciclos de vida do corpo de prova com 8 variáveis aleatórias.**

Variáveis Aleatórias	$\mu$	V
$H'$ (MPa)	662	0,15
$n'$ (-)	0,070	0,15
$\sigma'_f$ (MPa)	927	0,15
$\epsilon'_f$ (-)	0,409	0,15
$S0_1$ (MPa)	1200	0,20
$S0_2$ (MPa)	-69	0,20
$S0_3$ (MPa)	345	0,20
$S0_4$ (MPa)	-310	0,20

Para achar o PEC foi necessário 90 simulações e o melhor grau foi estabelecido como o segundo; a precisão do PEC foi comparada com a SMC para 1.000.000 de dados por variável contra 50.000 simulações do PEC, onde PEC apenas precisou de 5 % das simulações de Monte Carlo. Os métodos PEC e SMC resultaram em uma distribuição de probabilidade Lognormal com funções  $f_X(x)$  similares, conforme mostrado na Fig. 4.



**Figura 4: Função de densidade de probabilidade à fadiga com carregamento variável para o corpo de prova e 8 variáveis aleatórias.**

É possível mediante PEC, para o vetor de médias, os coeficientes de variação e as distribuições de probabilidade dados, determinar a probabilidade de falha da chapa de aço com dois entalhes laterais semi-circulares, submetida à fadiga considerando 8 variáveis aleatórias e utilizando a metodologia deformação-vida. A probabilidade de falha é indicada na Eq. (8), para o número de ciclos de vida à fadiga estimada para os valores meios das variáveis de entrada (Determinístico).

$$P [N_f < 6.97] = 50.25E - 02 \quad (8)$$

Enquanto que, a média e o desvio padrão estimados via PEC são, 8,04 e 4,71 ciclos de vida à fadiga, respectivamente, enquanto que por SMC a média e o desvio padrão estimados foram de 8,07 e 4,92 ciclos de vida, observando-se uma semelhante distribuição dos resultados pelos dois procedimentos.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho demonstrou a eficiência do uso do polinômio de Hermite Multidimensional para simular variáveis estocásticas de entrada (propriedades do material e nível de carregamento aplicado) com um custo computacional reduzido, a fim de determinar a resposta de saída (número de ciclos para falha por fadiga) da metodologia deformação-vida de estimativa de vida à fadiga. Esta pesquisa demonstrou que a variação nas variáveis aleatórias de entrada do material causa uma propagação importante da incerteza através do modelo analítico de 2,4 vezes a variação de entrada considerada.

A quantificação de incerteza do número de ciclos para falha por fadiga,  $N_f$ , é sensível à aleatoriedade do carregamento principalmente, mais que à incerteza nas propriedades do material. Considerando a aleatoriedade do material e o carregamento é possível ter variações que podem chegar ao 58,6 %, considerando variações do 15 e 17 % respectivamente. Os resultados demonstraram amplamente a diminuição do tempo computacional com pouca ou nenhuma perda de precisão utilizando os Polinômios de Hermite Multidimensional

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasil; ao programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil pelo apoio e a Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior - CAPES.

## REFERENCES

- Adomian, G. (1980). *Applied Stochastic Processes*. First. Vol. 1. New York: Academic Press.
- Bannantine, J., J. Comer e J. Handrock (1989). *Fundamentals of metal fatigue analysis*. New York, State United: Prentice Hall.
- Berveiller, M., B. Sudret e M. Lemaire (2006). “Stochastic finite elements a non-intrusive approach by regression”. Em: *European Journal of Computational Mechanics* 15.1-3, pp. 81–92.

- Blatman, G. (2009). “Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis”. Mestrado em Engenharia Civil. Clermont-Ferrand: Universite Blaise Pascal, p. 222.
- Blatman, G. e B. Sudret (2008). “Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach”. Em: *Comptes Rendus MÃ©canique* 336.6, pp. 518–523.
- (2010). “An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis”. Em: *Probabilistic Engineering Mechanics* 25.2, pp. 183–197.
- (2011). “Adaptive sparse polynomial chaos expansions based on Least Angle Regression”. Em: *Journal Computational Physics* 230.6, pp. 2345–2367.
- Doll, J. e D. Freeman (1986). “Randomly Exact Methods”. Em: *Science* 234.4782, pp. 1356–1360.
- Ghanem, R.G. e P.D. Spanos (2003). *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. United State: Dover Publications.
- Ghiocel, D. e R. Ghanem (2002). “Stochastic Finite Element Analysis of Seismic Soil Structure Interaction”. Em: *Journal Eng. Mechanics* 128.1, pp. 66–77.
- Hosder, S. e R. Walters (2010). “Non-Intrusive polynomial chaos methods for uncertainty quantification in fluid dynamics”. Em: 48th AIAA Aerospace sciences meeting including the new horizons forum e aerospace exposition. Orlando, USA.
- Huang, S., B. Liang e K. Phoon (2009). “Geotechnical probabilistic analysis by collocation based stochastic response surface method an EXCEL add in implementation”. Em: *Georisk* 3.2, pp. 75–86.
- Iman, R. e W. Conover (1980). “Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models, with an Application to Risk Assessment”. Em: *Communications in Statistics-Theory and Methods* 9.17, 1749–1842.
- Isukapalli, S. S. (1999). “Uncertainty Analysis of Transport Transformation Models”. PhD thesis. New Jersey, United State: The State University of New Jersey, p. 141.
- Keese, A. e H. Matthies (2005). “Hierarchical parallelisation for the solution of stochastic finite element equations”. Em: *Journal Computers and Structures* 83.14.
- Le-Maitre, O.P. e O.M. Knio (2010). *Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics*. London, UK: Springer.
- Maitre, O. et al. (2001). “A stochastic projection method for fluid flow I basic formulation”. Em: *Journal of Computational Physics* 173.3, pp. 481–511.
- Morrow, J. (1965). “Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals”. Em: *ASTM STP* 378.1.1, p. 45.

- Neuber, H. (1961). “Theory of stress concentration for shear-strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law”. Em: *Journal of applied mechanics* 28.1, pp. 544–550.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. First. Vol. 1. New York: McGraw-Hill.
- Phoon, K.K. e S.P. Huang (2007). “Uncertainty Quantification Using Multi-Dimensional Hermite Polynomials, ASCE 2007, pp. 1?10.” Em: *J. ASCE* 1.1, pp. 1–10.
- S-K. Choi, R. Grandhi e R. Canfield (2007). *Reliability-based structural design*. London: Springer.
- Socie, D., N. Dowling e P. Kuranth (1984). “Fatigue life estimation of notched members”. Em: *ASTM STP 833* 833.1, pp. 284–299.
- Sudret, B. (2007). “Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models : Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods”. PhD thesis. Clermont Ferrand, France: UniversitÃ’ Blaise Pascal, p. 173.
- Sudret, B. e A. Der-Kiureghian (2000). *Stochastic Finite Elements and Reliability: A State of the Art Report*. Rel. t c. University of California, Berkeley.
- Tatang, M. (1995). “Direct Incorporation of Uncertainty in Chemical and Environmental Engineering Systems”. PhD thesis. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, p. 141.
- Villadsen, J. e M. Michelsen (1978). *Solution of differential equation models by polynomial approximation*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall.
- Webster, M., M. Tatang e G. McRae (1996). *Application of the Probabilistic Collocation Method for an Uncertainty Analysis of a Simple Ocean Model*. Rel. t c. MIT Joint Program on the Science e Policy of Global Change Reports Series No. 4, Massachusetts institute of Technology.
- Xiu, D. (2009). “Fast Numerical Methods for Stochastic Computations A Review”. Em: *Communications in Computational Physics* 5.2-4, pp. 242–272.
- (2010). *Numerical Methods for Stochastic Computations*. New Jersey: Princeton University Press.
- Xiu, D e J S Hesthaven (2005). “High Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs”. Em: *SIAM J. Sci. Comput.* 27.3, pp. 1118–1139.