



## HIPERCUBO LATINO E POLINÔMIO DO CAOS APLICADOS AO ESTUDO DE INCERTEZAS EM SISTEMAS MECÂNICOS

Layane Rodrigues de Souza Queiroz

Romes Antonio Borges

spinellyh@gmail.com

romes@ufg.br

Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Otimização, Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão.

Av. Dr. Lamartine P. de Avelar, 1120, Setor Universitário, 75708-560, Catalão-GO, Brasil.

**Resumo.** *Boa parte dos sistemas mecânicos sofrem com incertezas que surgem a partir da imprecisão dos dados ou da natureza dinâmica do problema. Diferentes métodos têm sido utilizados para lidar com a propagação de incertezas, entre eles o Hiper cubo Latino e o Polinômio do Caos. O método do Hiper cubo Latino permite obter a função densidade de probabilidade do processo aleatório a partir da amostragem sobre pontos do domínio do processo. Por sua vez, o método do Polinômio do Caos permite separar as componentes estocásticas e determinísticas da resposta aleatória a partir do uso de polinômios ortogonais condizentes com a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias que representam as incertezas. Este trabalho analisa os métodos Hiper cubo Latino e Polinômio do Caos para a quantificação de incertezas em sistemas do tipo massa-mola-amortecedor com/sem não linearidades, além de considerar as respostas em função da frequência e do tempo. A análise dos métodos a partir de simulações numéricas mostra que o Polinômio do Caos é uma boa escolha para lidar com incertezas, mesmo em sistemas não lineares.*

**Palavras-chave:** *Propagação de incertezas, Hiper cubo Latino, Polinômio do Caos, Sistema Massa-Mola-Amortecedor.*

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas mecânicos é de grande importância para as engenharias, principalmente quando o comportamento dinâmico do sistema é afetado por efeitos de incertezas e não linearidades. Torna-se então necessário considerar esses efeitos, os quais podem surgir a partir da imprecisão ou incompletude dos dados, ou da natureza dinâmica do problema. Assim, buscam-se respostas robustas (isto é, um projeto robusto) que sejam capazes de representar a realidade do sistema sendo projetado mesmo sobre condições de mudança.

Entre os métodos empregados para a quantificação de incertezas, tem-se os baseados em amostragem, como a simulação de Monte Carlo e de Hipercubo Latino, que buscam gerar amostras de valores aleatórios associados a um dado domínio. Apesar desses métodos serem fáceis de aplicar, eles acabam sendo caros computacionalmente, uma vez que é preciso um número grande de amostras para obter uma convergência aceitável na prática. O Hipercubo Latino possui uma taxa de convergência geralmente melhor do que a do Monte Carlo.

Olsson et al. (2003) fizeram um estudo de várias técnicas de amostragem aplicadas a problemas de engenharia, em que destaca a eficiência do Hipercubo Latino. Robert e Casella (2011) apresentaram uma revisão do estado-da-arte sobre o Monte Carlo, em particular, com o uso de cadeias de Markov. Santos (2014) discutiu vários métodos de amostragem inteligentes, com destaque para a comparação entre aqueles que podem ser incorporados no Monte Carlo para melhorar a sua convergência. As comparações ocorrem para a resolução de problemas relacionados a confiabilidade de estruturas. Viana (2014) fez uma discussão generalizada a respeito do Hipercubo Latino, mostrando que é crescente o número de artigos envolvendo o uso deste método, além de levantar cinco questões sobre o seu uso, que incluem: o motivo dele ser bastante empregado, suas deficiências e como ele vem sendo melhorado com o emprego de métodos de otimização.

Por outro lado, existem métodos que não são baseados em amostragem e tratam as incertezas por meio de aproximações. Uma abordagem consiste em descrever as incertezas usando a expansão de Karhunen-Loeve em termos de variáveis aleatórias. Apesar desta expansão reduzir a dimensionalidade do espaço aleatório, ela requer o conhecimento da função de covariância associada as incertezas. Lira Júnior (2012) empregou a expansão de Karhunen-Loeve para descrever campos de permeabilidade de poços de produção de óleo e relata o seu alto custo computacional, de forma que é preciso usar a técnica da matriz de núcleo para obter resultados satisfatórios.

Ghanem e Spanos (1991) apresentaram uma descrição detalhada da expansão de Karhunen-Loeve, mas focaram no desenvolvimento do Polinômio do Caos para a base de polinômios ortogonais de Hermite, com aplicação em diferentes problemas de mecânica. Xiu e Karniadakis (2002a) generalizaram o Polinômio do Caos para a família de polinômios ortogonais de Askey, de forma que as variáveis podem seguir outras distribuições de probabilidade. Uma aplicação para a resolução de equações diferenciais parciais elípticas com incertezas foi feita por Xiu e Karniadakis (2002b), em que se aplicou a projeção de Galerkin para uma expansão em Polinômio do Caos.

No caso de sistemas em que se busca a resposta dinâmica, Gerritsma et al. (2010) propuseram uma forma de lidar com o Polinômio do Caos para considerar a dependência do tempo. Com isso, os autores conseguiram melhorar a convergência do método quando se busca uma resposta para longos intervalos de tempo. Kewlani et al. (2012) consideraram o

Polinômio do Caos no estudo da resposta dinâmica do movimento de um veículo com parâmetros incertos ou com incertezas oriundas do terreno. Os autores compararam as respostas via simulação por Monte Carlo e para o Polinômio do Caos generalizado.

Aplicações envolvendo o Polinômio do Caos para sistemas não lineares com incertezas foram feitas, por exemplo, por Lucor e Karniadakis (2004), que estudaram osciladores não lineares sujeitos a excitações aleatórias. Os autores consideraram osciladores de Duffing com força externa sujeita a diferentes tipos de incertezas, em que uma comparação com o sistema determinístico é realizada. Guerine et al. (2016) consideraram o Polinômio do Caos com a base de Hermite para lidar com o comportamento dinâmico não linear de um sistema de engrenagens com atrito. Os autores assumiram que o coeficiente de atrito é um parâmetro incerto, de forma que um sistema de oito graus de liberdade precisa ser resolvido.

Algumas desvantagens estão associadas ao emprego do Polinômio do Caos, como o rápido crescimento da dimensionalidade do problema, que depende do número de variáveis aleatórias, e da máxima ordem usada para a expansão. A literatura tem apontado que uma boa representação das incertezas geralmente exige muitas variáveis aleatórias independentes, enquanto sistemas não lineares precisam de uma expansão com muitos termos, isto é, ordem alta para os polinômios (Lucor e Karniadakis, 2004).

Este trabalho apresenta e aplica o método do Hipercubo Latino e a expansão em Polinômio do Caos, com a base de polinômios de Hermite e considerando a obtenção dos coeficientes da expansão pela projeção de Galerkin, para lidar com a propagação de incertezas em sistemas do tipo massa-mola-amortecedor. Para tanto, dois casos são avaliados, o primeiro para um sistema linear que considera a massa e a rigidez como parâmetros incertos, em que se busca a resposta do sistema no domínio da frequência. O segundo caso considera o sistema com não linearidade e incertezas na mola, tal que se busca a resposta dinâmica, em função do tempo.

O trabalho está organizado da seguinte forma. A seção 2 traz uma descrição do método de Hipercubo Latino, enquanto a seção 3 descreve o método do Polinômio do Caos mostrando a diferença da versão original, com base em polinômios de Hermite, com a versão generalizada, que considera qualquer polinômio da família de Askey. A seção 4 mostra como aplicar o Polinômio do Caos em sistemas massa-mola-amortecedor para dois casos, o primeiro para a resposta no domínio da frequência e a outro para a resposta no domínio do tempo. As simulações numéricas para cada caso são feitas na seção 5, em que se compara as soluções determinísticas/numéricas com as do Hipercubo Latino e do Polinômio do Caos para uma análise da sensibilidade dos parâmetros incertos. Conclusões e direções para trabalhos futuros são dadas na seção 6.

## **2 HIPERCUBO LATINO**

O método do Hipercubo Latino (HL) foi discutido inicialmente em McKay et al. (1979), como uma alternativa mais eficiente ao método do Monte Carlo (MC) e outros similares. O HL busca realizar a amostragem de variáveis aleatórias a partir de uma estratificação, que consiste em dividir o domínio das variáveis em intervalos de igual probabilidade chamados de estratos.

Enquanto o MC exige um grande número de pontos da amostra para representar com precisão as variáveis, uma vez que os pontos são gerados aleatoriamente e de forma independente, o HL gera pontos de forma aleatória controlada. Em outras palavras, no HL

faz-se a seleção aleatória de um ponto da amostra por estrato evitando que todos os pontos venham de uma mesma região. Quando existe mais de uma variável, os pontos são gerados para cada uma e depois combinados aleatoriamente visando respeitar um ponto por estrato. Segundo Chrisman (2014), se o HL requer  $p$  pontos da amostra para atingir uma dada precisão, no MC é preciso ao menos  $p^2$  pontos para atingir a mesma precisão.

A Fig. 1 exemplifica o caso em que no MC ocorre a concentração dos pontos em uma determinada região do espaço amostral, enquanto no HL há uma cobertura mais homogênea e controlada do espaço, com um ponto por estrato, o que permite uma convergência mais rápida (Viana, 2015). A Figura 1(b) é um exemplo de construção do quadrado latino, que é um plano de projeção uniforme com uma amostra por estrato. No caso multidimensional, tem-se a divisão do espaço em hipercubos com a construção dos chamados hipercubos latinos, similar ao feito para o quadrado latino (Forrester et al., 2008).

Em linhas gerais, no método HL, ao considerar que há  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (espaço  $n$ -dimensional) e seja requerido  $p$  pontos da amostra (resulta nos  $p$  estratos) por variável, gera-se uma primeira matriz, chamada de  $H$ , de ordem  $p \times n$ , em que cada coluna de  $H$  representa uma permutação aleatória de  $1, 2, \dots, p$ .

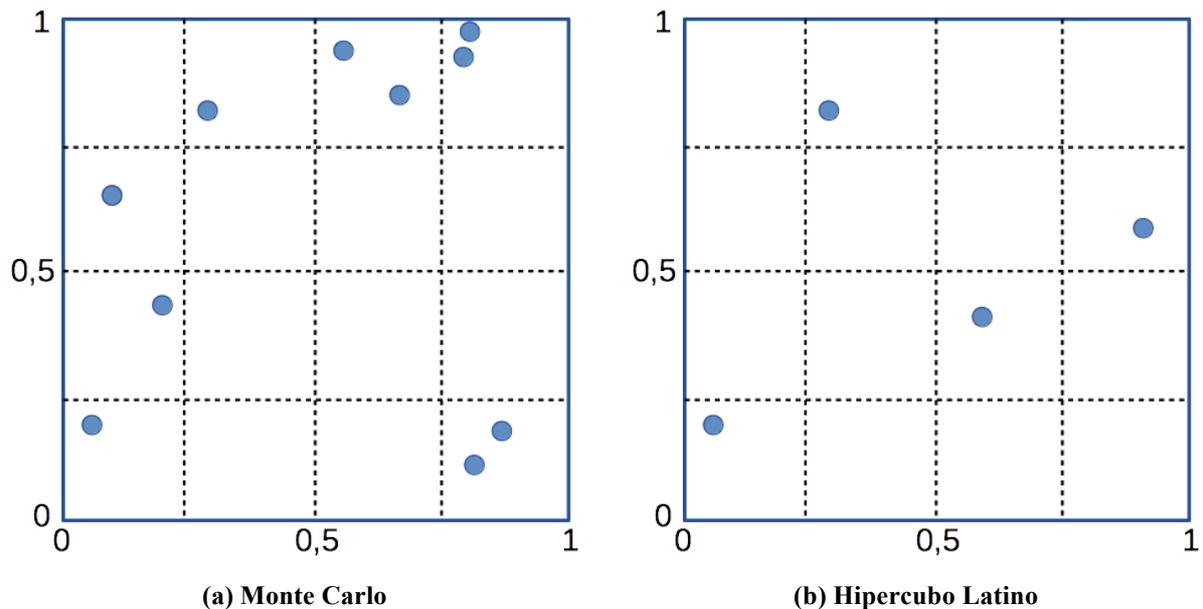


Figura 1. Amostragem para duas variáveis aleatórias.

Uma segunda matriz, chamada de  $R$ , também de ordem  $p \times n$ , é criada contendo números aleatórios entre (0,1) que foram gerados segundo alguma distribuição, sendo comum utilizar a distribuição uniforme. Torna-se interessante que a geração de  $R$  leve em consideração uma função densidade de probabilidade que esteja de acordo com a distribuição utilizada para representar a variável aleatória, podendo assim ser utilizada uma distribuição normal, log-normal, gaussiana, beta, gama, Weibull, entre outras, em substituição a distribuição uniforme.

Com as matrizes  $H$  e  $R$ , obtém-se a matriz  $L = (1/p)(P - R)$ . A partir da matriz  $L$ , pode-se gerar as amostras  $x_{ij}$  da variável aleatória  $X_j$  utilizando a função  $F_{x_j}^{-1}$ , que é a inversa da função de distribuição acumulada de probabilidade da variável amostrada (Ketson, 2014), ou seja:

$$x_{ij} = F_{x_j}^{-1}(L_{ij}) \quad (1)$$

em que  $L_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $L$ . A Fig. 2 traz um exemplo das matrizes  $H$ ,  $R$  e  $L$  para  $n=2$  e  $p=4$  dada uma distribuição Gaussiana, que é a normal com média zero e variância igual a um.

Embora o HL seja um método que traz boa uniformidade para representar uma variável, ele começa a ter problemas quando o número de variáveis aleatórias aumenta. O principal problema é manter a uniformidade de preenchimento do espaço, isto é, realizar uma amostragem homogênea do espaço a fim de garantir um ponto por hipercubo. Uma forma de contornar esse problema é buscar a maximização da mínima distância entre os pontos e reduzir a correlação entre os pontos, porém não é uma tarefa trivial de ser alcançada em termos de otimização (Viana, 2015).

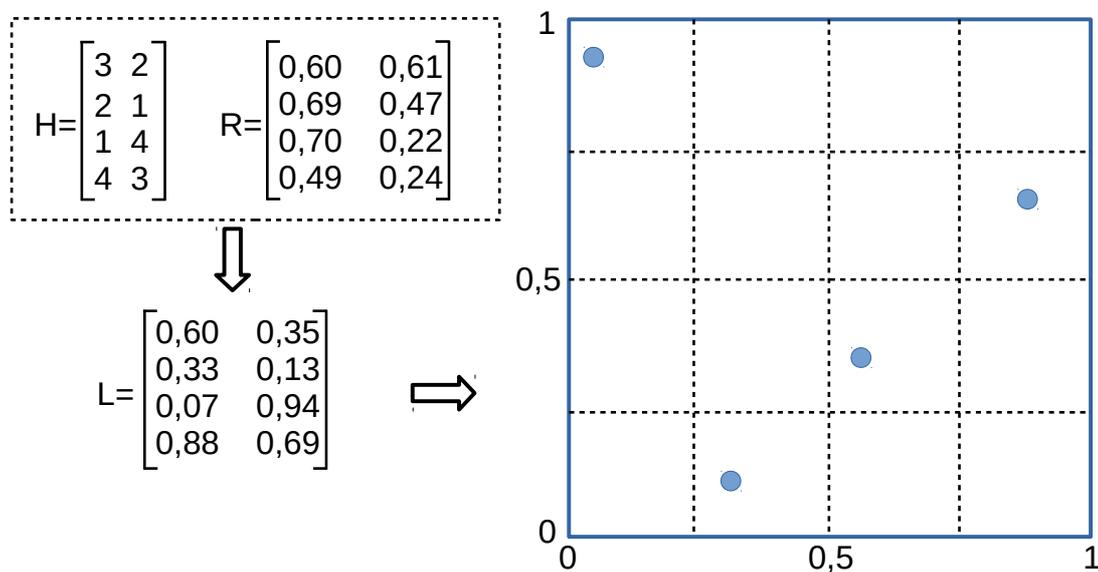


Figura 2. Aplicação do Hipercubo Latino para duas variáveis com quatro pontos.

### 3 POLINÔMIO DO CAOS

O método do Polinômio do Caos (PC) foi proposto inicialmente para resolver equações diferenciais estocásticas. Atualmente, a expansão em PC tem também sido aplicado para resolver sistemas mecânicos com modelagem estocástica, em especial, quando há a presença de incertezas. A expansão em PC permite criar uma relação robusta entre a resposta do sistema e as variáveis aleatórias, uma vez que pode determinar a média e o desvio padrão da resposta aleatória.

O PC foi definido com base em uma expansão dos polinômios de Hermite para processos estocásticos de segunda ordem (isto é, aqueles com variância finita) em termos de variáveis aleatórias gaussianas ortonormais independentes considerando o espaço de Hilbert  $L^2$ . Segundo Xiu et al. (2003), o PC com base em polinômios de Hermite é também chamado de PC Homogêneo, dado o seu desenvolvimento na teoria do caos homogêneo de Wiener.

Apesar do PC homogêneo ser utilizado também para lidar com processos envolvendo outros tipos de polinômios ortogonais, a sua convergência nesses casos é lenta. Por isso, uma versão generalizada do PC foi proposta envolvendo o uso de bases de polinômios ortogonais do Esquema de Askey, resultando no chamado PC Generalizado ou PC de Wiener-Askey (Schoutens, 1999).

No PC generalizado as variáveis aleatórias podem seguir a distribuição uniforme (requer polinômios de Legendre), beta (polinômio de Jacobi), exponencial (polinômio de Laguerre), gama (polinômio de Laguerre generalizado), entre outras. Também é possível considerar variáveis discretas com a distribuição de Poisson (polinômios de Charlier), binominal (polinômio de Krawtchouk), hipergeométrica (polinômio de Hahn), etc (Xiu et al., 2003).

Partindo de Ghanem e Spanos (1991), faz-se adiante o desenvolvimento do PC homogêneo, utilizando a base de polinômios de Hermite, para dado um processo estocástico de segunda ordem. Para a resposta do sistema representada por um processo estocástico  $X(w)$ , em que  $w$  representa um evento aleatório, a expansão em PC é dada por:

$$X(w) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}(w)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4(\xi_{i_1}(w), \xi_{i_2}(w), \xi_{i_3}(w), \xi_{i_4}(w)) + \dots \quad (2)$$

em que os  $a_{i_j \dots}$  representam os coeficientes da expansão;  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$  representa o polinômio do caos de ordem  $p$  e de dimensão  $n = \infty$ , que é ortogonal em termos das variáveis aleatórias gaussianas independentes dadas em  $\xi = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_n})$ . Por conveniência, omite-se o argumento  $w$  das variáveis em  $\xi$ .

A Eq. (2) pode ser reescrita a partir de uma indexação baseada em termo resultando em:

$$X(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{a}_j \Phi_j(\xi) \quad (3)$$

em que existe uma bijeção entre os termos  $\Gamma_p$  com  $\Phi_j$ , assim como entre  $a_{i \dots}$  e os novos coeficientes  $\hat{a}_j$ .

Os polinômios em  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots\}$  formam uma base ortogonal completa em termo das variáveis aleatórias independentes em  $\xi$ , de forma que produto interno coincide com o valor esperado  $E$  no espaço de Hilbert, isto é:

$$\langle \Phi_r, \Phi_s \rangle = E[\Phi_r, \Phi_s] = \int_C \Phi_r(\xi) \Phi_s(\xi) \rho(\xi) d\xi \quad (4)$$

em que  $\rho(\xi)$  representa a função peso e  $C$  é o suporte (intervalo de ortogonalidade). Os polinômios são ortogonais quando o produto interno é nulo, isto é, a integral resultará em zero para  $r \neq s$ .

A função peso assume a forma da função de distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias  $\xi$  sendo consideradas. No caso particular do PC homogêneo, em que o  $C$  representa o intervalo  $(-\infty, \infty)$ , a função peso dos polinômios ortogonais de Hermite é dada por (Xiu et al., 2003):

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \quad (5)$$

que também representa a função densidade de probabilidade de variáveis aleatórias gaussianas  $n$ -dimensionais, como é o caso de  $\xi$ .

Na expansão do PC homogêneo, o polinômio do caos  $\Gamma_p$ , de ordem  $p$  e dimensão  $n$ , é obtido calculando-se o polinômio de Hermite  $n$ -dimensional (Ghanem e Spanos, 1991), isto é:

$$\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (-1)^n \left( e^{\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right) \left( \frac{\partial^n}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_n} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \right) \quad (6)$$

que pode ser rescrito como um produto de  $n$  polinômios em uma única variável, considerando que  $\Phi_0 = 1$ , a saber (Lira Junior, 2012):

$$\Gamma_p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_2) \dots \Phi_n(\xi_n) = \Phi_j(\xi) \quad (7)$$

É importante destacar que, no caso da expansão do PC generalizado, as variáveis aleatórias em  $\xi$  não são necessariamente gaussianas. Neste caso, faz-se a escolha de uma base de polinômios ortogonais (esquema de Askey) de acordo com a distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias consideradas. Logo, o produto interno na Eq. (4) deve considerar a função peso, na Eq. (5), definida de acordo com a base de polinômios usada, e da mesma forma para o intervalo representado pelo suporte  $C$ .

Os coeficientes  $\hat{a}_j$  na Eq. (3) são obtidos seguindo a Eq. (8), calculados a partir da projeção de Galerkin (Cunha, 2010), que consiste na projeção da resposta com relação a cada polinômio da base  $\Phi$  por meio do produto interno, além de considerar as propriedades de ortogonalidade, isto é:

$$\hat{a}_j = \frac{\langle X(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle}{\langle \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle} = \frac{\int_C X(\xi)\Phi_j(\xi)\rho(\xi)d\xi}{\langle \Phi_j(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle} \quad (8)$$

uma vez que somente para  $i = j$  o produto interno  $\langle \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i(\xi), \Phi_j(\xi) \rangle$  é não nulo. Observa-se que o numerador depende da resolução de uma integral  $n$ -dimensional em  $\xi$ , enquanto o denominador pode ser resolvido analiticamente.

Do ponto de vista aplicado, a Eq. (3), que contém uma expansão infinita, é substituída por uma finita, ao mesmo tempo que se usa um número finito de variáveis aleatórias. Assim, a expansão finita em PC passa a ser:

$$X(w) = \sum_{j=0}^N \hat{a}_j \Phi_j(\xi) \quad (9)$$

em que  $N$  representa o número de termos da expansão dado um polinômio de ordem máxima  $p$  e a dimensão de  $\xi$  sendo  $n < \infty$ . O valor de  $N$  é obtido por:

$$N = \frac{(n+p)!}{n!p!} - 1 \quad (10)$$

Segundo Ghanem e Spanos (1991), grande parte dos problemas mecânicos que envolvem variáveis aleatórias podem ser escritos como:

$$(L - \Pi(w))X(w) = F(w) \quad (11)$$

em que  $L$  é a componente determinística e  $\Pi(w)$  é a componente aleatória do sistema, enquanto  $X(w)$  é a resposta relacionada com a excitação  $F(w)$ .

Por sua vez, a componente aleatória, que contém as incertezas, pode ser escrita como  $\Pi(w) = \alpha(w)R$ , em que  $R$  representa a parte determinística. O processo  $\alpha(w)$  pode ser expresso na forma de uma expansão de Karhunen-Loeve, isto é:

$$\alpha(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(w)g_i \quad (12)$$

sendo  $g_i$  funções determinísticas associadas a covariância do processo  $\alpha(w)$ . Pode ser conveniente, em situações em que a covariância é desconhecida, representar  $\alpha(w)$  por uma expansão em PC usando a Eq. (3).

A resposta aleatória  $X(w)$  na Eq. (11), expressa por uma expansão em PC  $n$ -dimensional finita de  $N$  termos, é dada por:

$$X(w) = \sum_{j=0}^N x_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (13)$$

Os coeficientes  $x_j$  na Eq. (13) podem ser obtidos a partir da substituição das Eqs. (12) e (13) na Eq. (11), em seguida multiplicando o resultado por cada  $\Phi_j$  e tomando a média, além de considerar as propriedades de ortogonalidade dos polinômios em  $\Phi$ . Assim, chega-se em:

$$x_r \langle \Phi_r^2 \rangle \mathbf{L} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^N x_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle \mathbf{R} = F \langle \Phi_r \rangle \quad \text{para } r = 0, 1, \dots, N \quad (14)$$

que resulta em sistema de  $N+1$  equações para obter os coeficientes  $x_j$ . Os coeficientes  $\langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle$  podem ser obtidos analiticamente pela Eq. (4), ou numericamente, por exemplo, usando o método da quadratura, enquanto  $\mathbf{R} = \sum_i R_i g_i$ .

Após a resolução do sistema na Eq. (14), as estatísticas da resposta  $X(w)$  do sistema, isto é, a sua média (ou valor esperado) e variância, são expressas respectivamente por:

$$\mu_X = x_0 \quad (15)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^N x_j^2 \langle \Phi_j^2 \rangle \quad (16)$$

Por fim, tabelas contendo os polinômios do caos de até quarta ordem ( $p=4$ ) e até quatro dimensões ( $n=4$  variáveis aleatórias), para a base com os polinômios de Hermite, podem ser encontradas em Ghanem e Spanos (1991).

## 4 APLICAÇÕES EM SISTEMAS MASSA-MOLA-AMORTECEDOR

Com o intuito de mostrar o desenvolvimento da expansão em PC para o estudo das incertezas, além de analisar a sua eficácia frente ao HL, faz-se adiante a aplicação em sistemas mecânicos do tipo massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade. Sistemas desse tipo são comuns durante a descrição e representação de mecanismos complexos da engenharia, bem como podem ser estendidos para representar outros sistemas reais.

Na análise, o primeiro caso considera a resposta no domínio da frequência para um sistema linear, em que a massa e a rigidez são parâmetros incertos. O segundo caso já considera um sistema não linear, com a não linearidade presente na mola, e as incertezas presentes nos coeficientes de rigidez, em que se busca a resposta no domínio do tempo.

### 4.1 Resposta no Domínio da Frequência

Seja um sistema massa-mola-amortecedor, sem atrito entre o corpo e o chão, sujeito a uma força externa conforme ilustra a Fig. 3, em que  $u(t)$  representa o deslocamento na direção horizontal,  $m$  é a massa do corpo,  $c$  é o coeficiente de amortecimento,  $k$  é a rigidez da mola e  $F$  é a força de excitação externa.

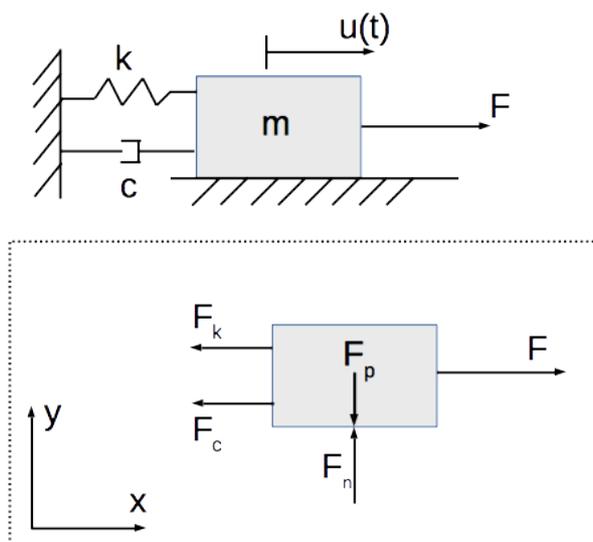


Figura 3. Sistema massa-mola-amortecedor com deslocamento na horizontal.

Observando o digrama de corpo livre na Fig. 3, tem-se que a equação de movimento do sistema é dada por:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 \cos \omega t \quad (17)$$

Assumindo a solução da Eq. (17) na forma exponencial  $u(t) = Ue^{i\omega t}$ , chega-se na resposta (Inman, 2013):

$$(-\omega^2 m + \omega ci + k)U = F_0 \quad (18)$$

Assume-se que a massa e a rigidez da mola estão sujeitas a incertezas e, assim, são representadas em termos de variáveis aleatórias gaussianas independentes. A partir da Eq. (12), os parâmetros incertos podem ser descritos na forma de uma expressão de Karhunen-Loeve finita, em que se assume apenas uma variável, resultando respectivamente em:

$$\tilde{m} = \bar{m} + \sum_{i=1}^1 \xi_i g_i = m + \xi_1 \sigma_m \quad (19)$$

$$\tilde{k} = \bar{k} + \sum_{i=2}^2 \xi_i g_i = k + \xi_2 \sigma_k \quad (20)$$

em que  $\bar{m}$  e  $\bar{k}$  representam as médias assumidas iguais aos respectivos valores nominais  $m$  e  $k$ ;  $g_1 = \sigma_m$  e  $g_2 = \sigma_k$  são os respectivos valores do desvio padrão para a massa e a rigidez; e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são as respectivas variáveis aleatórias para a massa e a rigidez.

Substituindo as Eqs. (19) e (20) na Eq. (18) e organizando conforme a Eq. (11), tem-se:

$$[(-\omega^2 m + \omega ci + k) + (-\omega^2 \sigma_m \xi_1 + \sigma_k \xi_2)]U = F_0 \quad (21)$$

Para a resposta do sistema representada por uma expansão finita com  $n=2$  variáveis aleatórias e um polinômio do caos de ordem máxima  $p=2$ , logo  $N=5$ , tem-se:

$$U = \sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = u_0 \Phi_0 + u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + u_3 \Phi_3 + u_4 \Phi_4 + u_5 \Phi_5 \quad (22)$$

em que os polinômios de Hermite bidimensionais, obtidos pela Eq. (6), são  $\Phi_0 = 1$ ,  $\Phi_1 = \xi_1$ ,  $\Phi_2 = \xi_2$ ,  $\Phi_3 = \xi_1^2 - 1$ ,  $\Phi_4 = \xi_1 \xi_2$  e  $\Phi_5 = \xi_2^2 - 1$ , com as propriedades  $\langle \Phi_0 \rangle = 1$ ,  $\langle \Phi_1 \rangle = \langle \Phi_2 \rangle = \langle \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_4 \rangle = \langle \Phi_5 \rangle = 0$ ,  $\langle \Phi_0^2 \rangle = \langle \Phi_1^2 \rangle = \langle \Phi_2^2 \rangle = \langle \Phi_4^2 \rangle = 1$  e  $\langle \Phi_3^2 \rangle = \langle \Phi_5^2 \rangle = 2$ .

A partir da Eq. (14), escrevem-se as  $N+1=6$  equações algébricas para obter os coeficientes  $u_j$  da Eq. (22). Em outras palavras:

$$\begin{cases} u_0 \langle \Phi_0^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_0 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_0 \rangle \\ u_1 \langle \Phi_1^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_1 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_1 \rangle \\ u_2 \langle \Phi_2^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_2 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_2 \rangle \\ u_3 \langle \Phi_3^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_3 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_3 \rangle \\ u_4 \langle \Phi_4^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_4 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_4 \rangle \\ u_5 \langle \Phi_5^2 \rangle L + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_5 \rangle \mathbf{R} = F_0 \langle \Phi_5 \rangle \end{cases} \quad (23)$$

sendo os coeficientes  $L = -\omega^2 m + \omega c i + k$ ,  $\mathbf{R} = -\omega^2 \sigma_m + \sigma_k$ , e os  $\langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle$  calculados pela Eq. (4) considerando a função peso na Eq. (5), que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_0 L + (u_1 + u_2) \mathbf{R} = F_0 \\ u_1 L + (u_0 + 2u_3 + u_4) \mathbf{R} = 0 \\ u_2 L + (u_0 + u_4 + 2u_5) \mathbf{R} = 0 \\ u_3 L + 2u_1 \mathbf{R} = 0 \\ u_4 L + (u_1 + u_2) \mathbf{R} = 0 \\ u_5 L + 2u_2 \mathbf{R} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Logo, os coeficientes são dados por:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{F_0(L^2 - 6R^2)}{L(L^2 - 8R^2)} \\ u_1 = \frac{-F_0 R}{L^2 - 8R^2} \\ u_2 = \frac{-F_0 R}{L^2 - 8R^2} \\ u_3 = \frac{2F_0 R^2}{L(L^2 - 8R^2)} \\ u_4 = \frac{2F_0 R^2}{L(L^2 - 8R^2)} \\ u_5 = \frac{-2F_0 R^2}{L(-L^2 + 8R^2)} \end{cases} \quad (25)$$

A média e a variância da resposta aleatória são expressas respectivamente por:

$$\mu_U = u_0 \quad (26)$$

$$\sigma_U^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + u_4^2 + 2u_5^2 \quad (27)$$

## 4.2 Resposta no Domínio do Tempo

Considera-se agora a aplicação da expansão em PC homogêneo para um sistema dinâmico não linear com o intuito de analisar a sua resposta dinâmica, isto é, em função do tempo. Para tanto, seja o sistema massa-mola-amortecedor da Fig. 3 em que a mola apresenta características não lineares da forma  $f_k = uk - k_1 u^2$ , sendo  $k$  o coeficiente de rigidez linear e  $k_1$  o respectivo coeficiente da parcela não linear. A equação não linear de movimento é:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - k_1 u^2 = F_0 \cos \omega t \quad (28)$$

Assume-se que os parâmetros associados a rigidez possuem incertezas e, assim, são representados por variáveis aleatórias gaussianas independentes. Similar ao caso anterior, os parâmetros incertos são expressos na forma de uma expressão de Karhunen-Loeve finita usando uma variável aleatória por parâmetro, o que resulta em:

$$\tilde{k} = \bar{k} + \sum_{i=1}^1 \xi_i g_i = k + \xi_1 \sigma_k \quad (29)$$

$$\tilde{k}_1 = \bar{k}_1 + \sum_{i=2}^2 \xi_i g_i = k_1 + \xi_2 \sigma_{k_1} \quad (30)$$

em que  $\bar{k}$  e  $\bar{k}_1$  representam as médias e são tomadas iguais aos respectivos valores nominais;  $g_1 = \sigma_k$  e  $g_2 = \sigma_{k_1}$  representam os respectivos valores do desvio padrão; e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são as variáveis aleatórias para  $\tilde{k}$  e  $\tilde{k}_1$ , respectivamente.

A resposta dinâmica do sistema não linear na Eq. (28) é representada por uma expansão em PC homogêneo finita, em que se assume  $n=2$  variáveis aleatórias e um polinômio de ordem máxima  $p=2$ , o que resulta em  $N=5$ . Em outras palavras, tem-se:

$$\mathbf{u}(t, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^5 u_j(t) \Phi_j(\xi_1, \xi_2) = u_0 \Phi_0 + u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_2 + u_3 \Phi_3 + u_4 \Phi_4 + u_5 \Phi_5 \quad (31)$$

Substituindo as Eq. (31) na Eq. (28), isto é, propagando as incertezas pelo sistema, chega-se em:

$$m \sum_{j=0}^5 \ddot{u}_j \Phi_j + c \sum_{j=0}^5 \dot{u}_j \Phi_j + (k + \xi_1 \sigma_k) (\sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j) - (k_1 + \xi_2 \sigma_{k_1}) (\sum_{j=0}^5 u_j \Phi_j)^2 = F_0 \cos \omega t \quad (32)$$

Segundo Lucor e Karniadakis (2004), faz-se a projeção da Eq. (32) sobre o espaço aleatório considerando a base de polinômios ortogonais de Hermite em  $\Phi$ . Em outras palavras, faz-se o produto interno com cada polinômio da base, usando da Eq. (4), a fim de obter um conjunto de  $N+1$  equações não lineares para o movimento do sistema, isto é, para  $r=0, 1, \dots, 5$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_r + \frac{c}{m} \dot{u}_r + \frac{k}{m} u_r + \frac{\sigma_k}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 u_j \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle - \frac{k_1}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{j=0}^5 \sum_{l=0}^5 u_j u_l \langle \Phi_j \Phi_l, \Phi_r \rangle + \\ - \frac{\sigma_{k_1}}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 \sum_{l=0}^5 u_j u_l \langle \xi_i \Phi_j \Phi_l, \Phi_r \rangle = \left( \frac{F_0}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \cos \omega t \right) \langle \Phi_r \rangle \end{aligned} \quad (33)$$

Embora o conjunto de equações obtido a partir da Eq (33) seja acoplado, ele é determinístico, uma vez que a aleatoriedade do sistema foi deslocada para a base de polinômios  $\Phi$ . Diante disto, as equações resultantes podem ser resolvidas por métodos de integração numérica, como por exemplo Newmark implícito ou Runge-Kutta de quarta ordem (Kewlani et al., 2012).

Para a resolução pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, escreve-se a Eq. (33), para cada  $r$ , em um conjunto de equações de primeira ordem em termos de  $\dot{U}_{1,r}(t) = \dot{u}_r$  e  $\dot{U}_{2,r}(t) = \ddot{u}_r$ , a saber:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1,r} = U_{2,r} \\ \dot{U}_{2,r} = -\frac{c}{m} U_{2,r} - \frac{k}{m} U_{1,r} - \frac{\sigma_k}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 U_{1,j} \langle \xi_i \Phi_j, \Phi_r \rangle + \\ + \frac{k_1}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{j=0}^5 \sum_{l=0}^5 U_{1,j} U_{1,l} \langle \Phi_j \Phi_l, \Phi_r \rangle + \frac{\sigma_{k_1}}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^5 \sum_{l=0}^5 U_{1,j} U_{1,l} \langle \xi_i \Phi_j \Phi_l, \Phi_r \rangle + \\ + \left( \frac{F_0}{m \langle \Phi_r^2 \rangle} \cos \omega t \right) \langle \Phi_r \rangle \end{cases} \quad (34)$$

A média e a variância da resposta (deslocamento da massa) no tempo  $t$  são expressas respectivamente por:

$$\mu_u(t) = u_0 = U_{1,0} \quad (35)$$

$$\sigma_U^2(t) = u_1^2 + u_2^2 + 2u_3^2 + u_4^2 + 2u_5^2 = U_{1,1}^2 + U_{1,2}^2 + 2U_{1,3}^2 + U_{1,4}^2 + 2U_{1,5}^2 \quad (36)$$

## 5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A avaliação da resposta dos sistemas massa-mola-amortecedor considerados na seção 4 é feita adiante para uma codificação usando o *software* Matlab<sup>®</sup>. Para tanto, analisa-se a média (valor esperado) e o desvio padrão retornado pelo Polinômio do Caos com relação ao Hipercubo. No caso particular da média, considera-se também a resposta determinística do sistema, isto é, sem incertezas.

### 5.1 Resultados para a Resposta no Domínio da Frequência

A aplicação envolvendo o sistema massa-mola-amortecedor com resposta determinística na Eq. (18) considera que a massa e a rigidez são parâmetros incertos. Os demais parâmetros, isto é, amortecimento e força, são considerados determinísticos. Os valores adotados para os parâmetros (no SI) estão listados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros adotados para o sistema massa-mola-amortecedor.

Parâmetro	Média (ou Nominal)	Desvio Padrão
Massa [kg]	100	{2, 3, 8, 10}
Rigidez [N/m]	2000	{34, 57, 110, 151}
Amortecimento [Ns/m]	170	-
Força [N]	1500	-

Os valores do desvio padrão foram gerados para um intervalo de variação entre 0,5% a 10% do respectivo valor médio/nominal e tomando apenas a parte inteira do resultado. A primeira análise (A1) considera o desvio padrão da massa fixo em 2 kg, enquanto o desvio padrão da rigidez é variado seguindo os valores da Tabela 1. De forma similar, a segunda análise (A2) adota o desvio da rigidez fixo em 34 N/m, enquanto o desvio padrão da massa varia conforme a Tabela 1.

As Figs. 4 e 5 trazem, respectivamente, os resultados apenas da parte real para as análises A1 e A2, em que a frequência  $\omega$  varia no intervalo de [3, 6] Hz, o qual inclui a frequência de ressonância. Os resultados são apresentados para o Polinômio do Caos, com a média da resposta na Eq. (26), sendo comparada com a resposta determinística na Eq. (18) e a simulação por Hipercubo Latino para 1.000 amostras. No caso do desvio padrão do Polinômio do Caos, obtido na Eq. (27), tem-se a comparação apenas com o Hipercubo Latino.

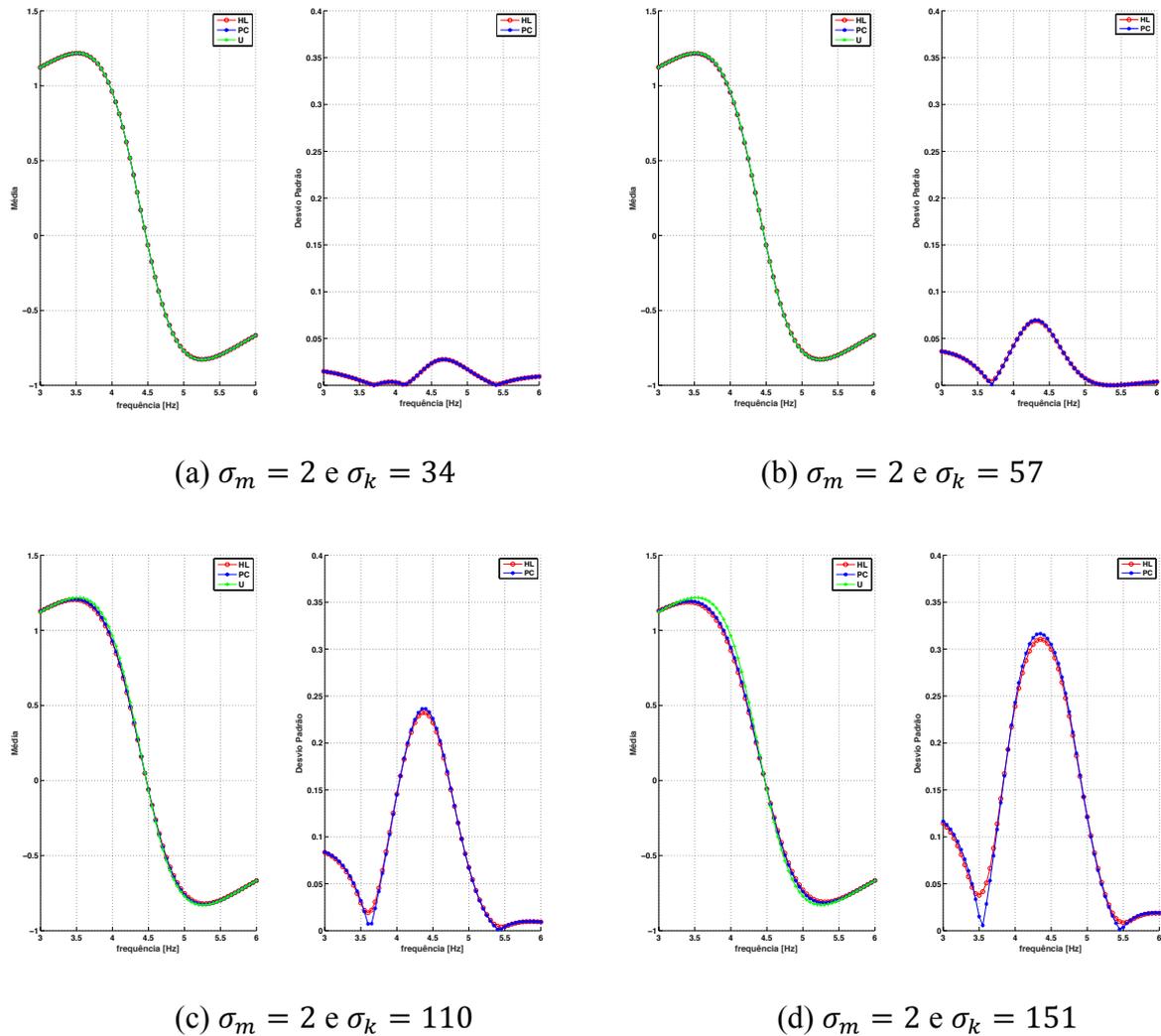


Figura 4. Resposta (média e desvio padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A1.

Os resultados nas Figs. 4 e 5 mostram que a solução determinística  $U$  começa a divergir do valor médio (PC), dado pelo Polinômio Caos, e da amostragem pelo Hipercubo Latino (HL) quando o desvio da rigidez aumenta e o da massa tem um valor pequeno (veja, por exemplo, nas Figs. 4c e 4d). De forma similar, quando o desvio da massa aumenta e o da rigidez permanece pequena, tem-se que as soluções começam a divergir (observe as Fig. 5c e 5d). Note que em ambas as situações, o desvio padrão da resposta aumenta consideravelmente, principalmente próximo da frequência de ressonância do sistema.

Nas Figs. 4 e 5 ainda é possível observar que a solução  $U$  é próxima da PC e HL apenas para pequenos valores do desvio padrão da massa e da rigidez (veja as Figs. 4a, 4b, 5a e 5b). Observe que o desvio padrão da resposta tem pouca dispersão nestes casos.

Em termos da resposta dada pelo PC e HL, ambos os métodos retornam respostas bem similares para o valor médio (com pouca dispersão) em todos os casos. Por outro lado, para o valor do desvio padrão, as respostas passam a ter diferenças visíveis para os casos de maior variabilidade no desvio padrão da rigidez (nas Figs. 4c e 4d) e da massa (nas Figs. 5c e 5d).

De forma geral, ao fixar o desvio padrão da massa (rigidez) em seu valor mais baixo e variar o desvio da rigidez (massa), tem-se que desvio padrão obtido pelo PC e amostrado pelo HL tende a aumentar, enquanto a solução determinística começa a divergir do valor esperado dado pelo PC. Além disso, os métodos PC e HL também começam a divergir para variações mais altas dos parâmetros incertos, mostrando que o sistema em estudo é mais sensível para a massa.

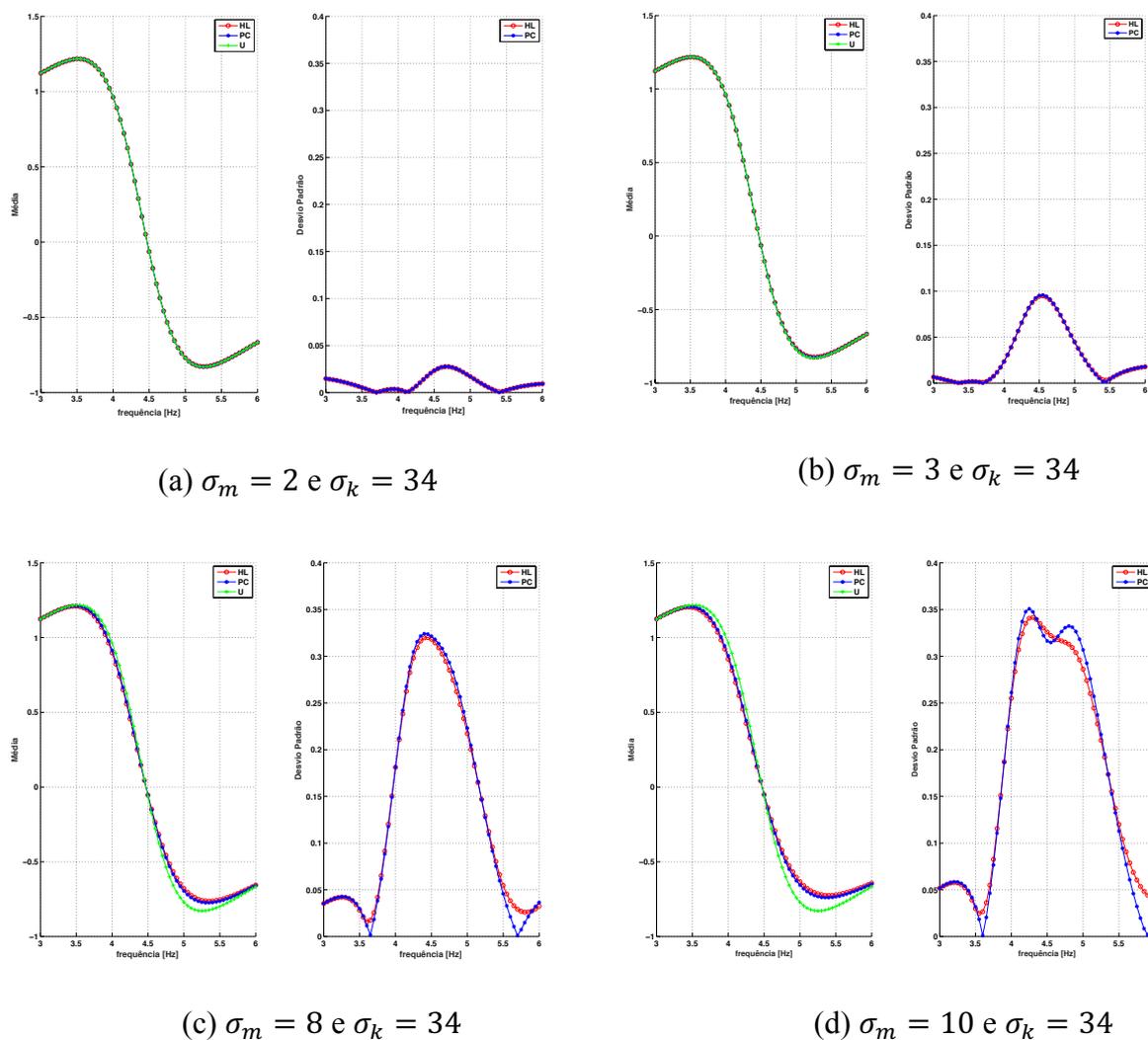


Figura 5. Resposta (média e desvio padrão) do sistema massa-mola-amortecedor para A2.

## 5.2 Resultados para a Resposta no Domínio do Tempo

No caso do sistema massa-mola-amortecedor, com resposta não linear, representado pela Eq. (28), tem-se que os coeficientes da rigidez linear e não linear são considerados parâmetros incertos. Por outro lado, a massa, o amortecimento e a força são parâmetros determinísticos. Os valores adotados para cada parâmetro (no SI) estão na Tabela 2.

Os valores do desvio padrão foram gerados considerando uma variação entre 0,5% a 10% do respectivo valor médio/nominal, em que apenas a parte inteira do resultado é considerada. A primeira análise (B1) considera o desvio padrão  $k_1 = 7$ , enquanto o desvio padrão de  $k$

varia de acordo com os dados da Tabela 2. De forma similar, a segunda análise (B2) adota  $k = 34$ , enquanto o desvio padrão de  $k_1$  varia conforme a Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros para o sistema massa-mola-amortecedor não linear.

Parâmetro	Média/Nominal	Desvio Padrão
Massa [kg]	100	-
Rigidez $k$ [N/m]	2000	{34, 57, 110, 151}
Rigidez $k_1$ [N/m]	520	{7, 22, 40, 51}
Amortecimento [Ns/m]	170	-
Força [N]	1500	-
$\omega$ [Hz]	4,1029	-

Os resultados apenas da parte real para as análises B1 e B2 são reportados nas Figs. 6 e 7, em que o tempo  $t$  varia no intervalo de  $[0, 10]$  segundos. Os resultados são apresentados para o Polinômio do Caos, com o valor médio da resposta na Eq. (35) sendo comparada com a resposta determinística dada pela resolução da Eq. (28) com o método de Runge-Kutta (RK) de quarta ordem. As condições iniciais adotadas para a resolução foram  $u(0) = u_r(0) = 0,01$  e  $\dot{u}(0) = \dot{u}_r(0) = 0,1$ , para  $r=0,1, \dots, 5$ .

As soluções no domínio do tempo apresentadas nas Figs. 6 e 7 mostram que o PC converge para o RK apenas para pequenos valores de tempo, em praticamente todos os casos analisados para o valor médio. Todavia, os valores encontrados para o desvio padrão são diferentes, em particular com o desvio padrão da resposta aumentando a medida que a variabilidade de cada rigidez aumenta (veja, por exemplo, as Figs. 6c, 6d, 7c e 7d).

É possível notar que a partir de  $t > 1$ , a solução dada pelo PC oscila com amplitude limitada superiormente por um valor próximo de 2,5, enquanto a solução dada pelo RK fica com amplitude máxima próxima de 1,5. Os casos apresentados na Fig. 7 mostram que a amplitude da oscilação tende a diminuir a medida que o desvio padrão da rigidez não linear  $k_1$  aumenta. As soluções ainda mostram que a rigidez não linear impacta mais na resposta do sistema se comparada a rigidez linear  $k$ .

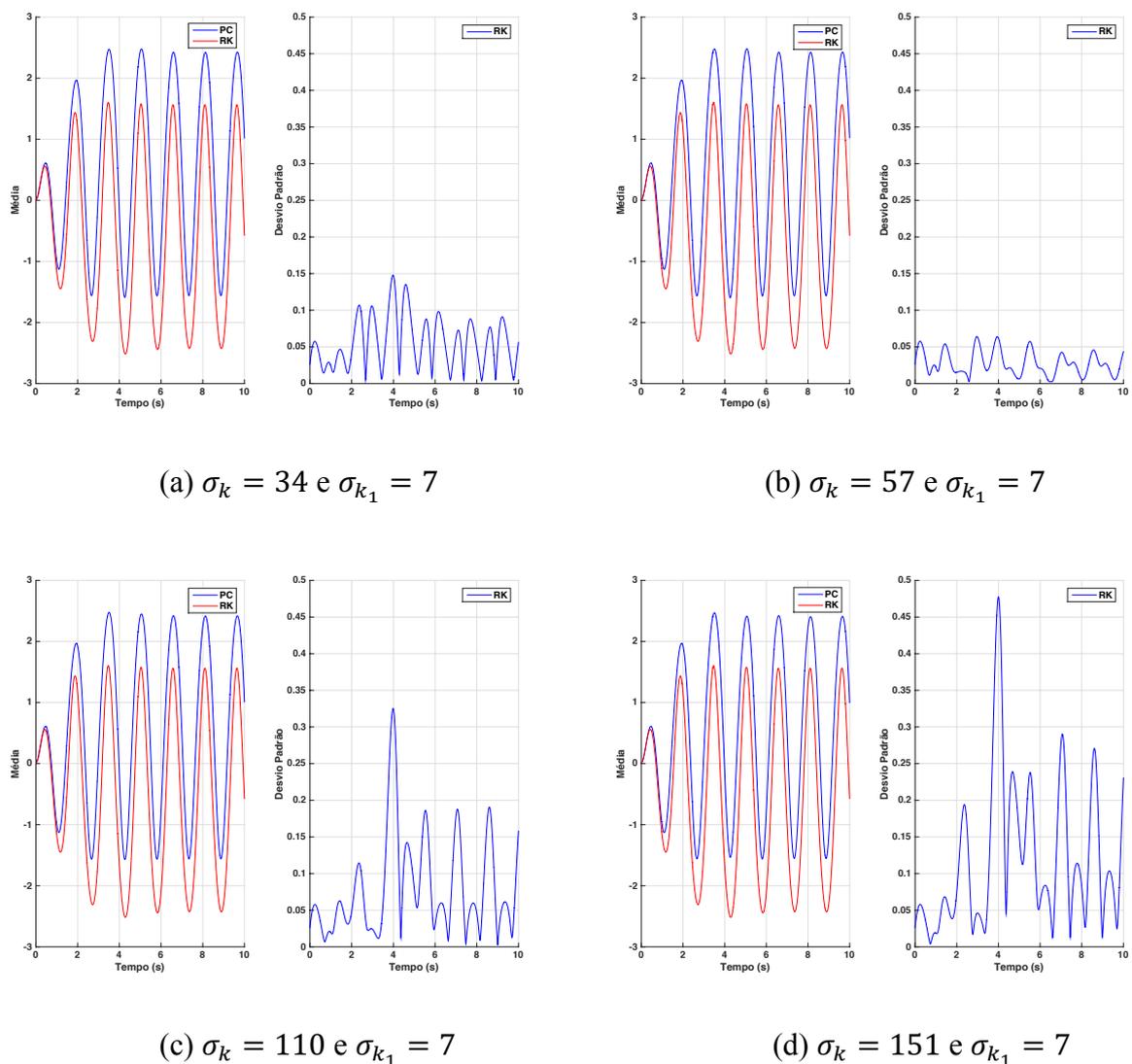


Figura 6. Média e desvio padrão do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B1.

O desempenho do PC pode ser melhorado ao aumentar a ordem máxima assumida para a expansão, ao passo que pode ser conveniente adotar mais variáveis independentes para representar as variáveis incertas. Todavia, os resultados apresentados estão de acordo com a literatura, uma vez que Gerritsma et al. (2010) discutiram que o PC tende a ter um comportamento não regular para respostas sobre intervalos de tempo longos. Além disso, os autores ainda enfatizaram que aumentar a ordem máxima significa adiar a não convergência do PC, além de exigir mais tempo computacional para computar os coeficientes e montar as equações.

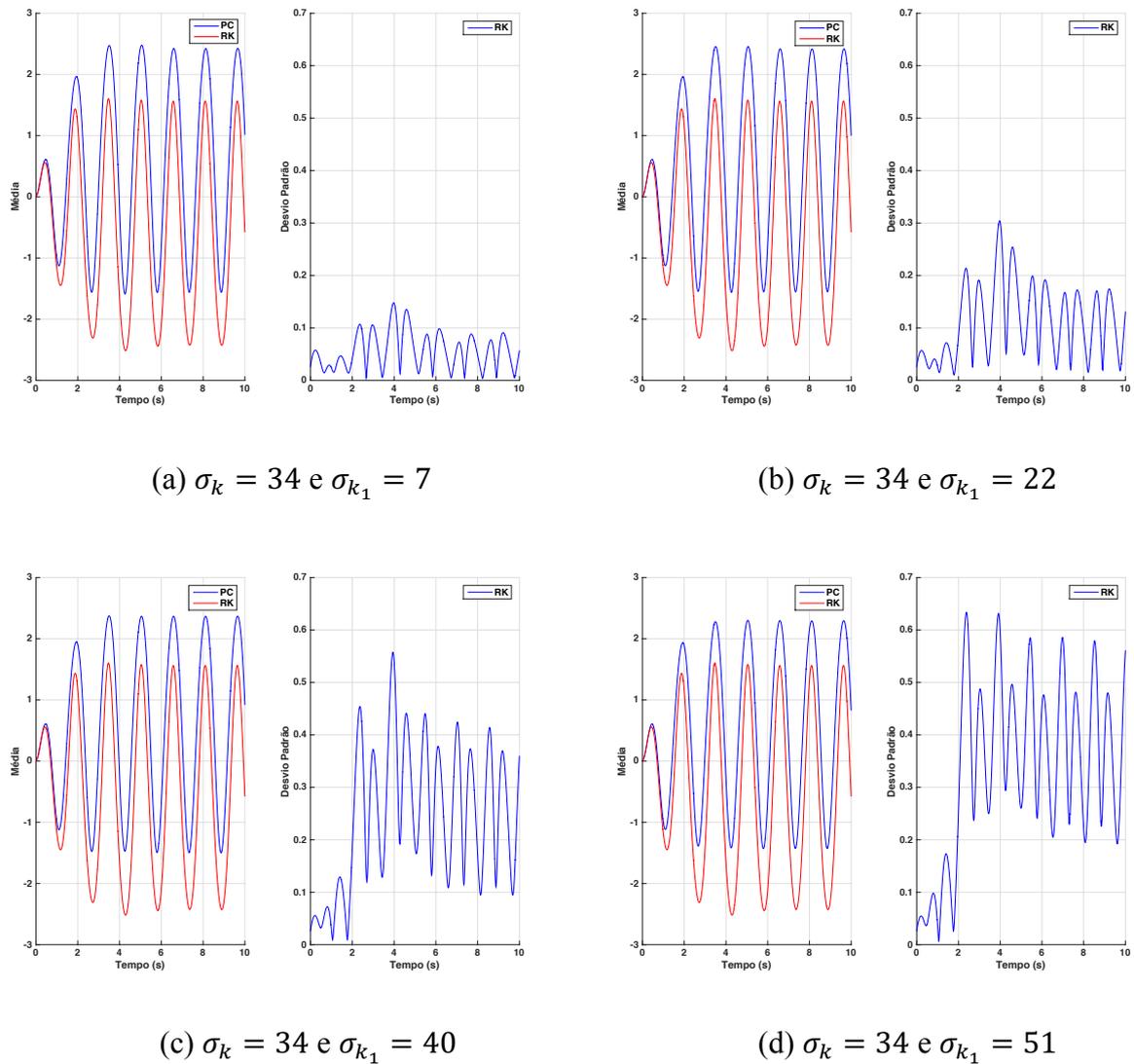


Figura 7. Média e desvio padrão do sistema massa-mola-amortecedor não linear para B2.

## 6 CONCLUSÕES

Com o objetivo de lidar com as incertezas em sistemas mecânicos, este trabalho considerou a aplicação do método do Polinômio do Caos em sistemas massa-mola-amortecedor forçados em que a massa e/ou a rigidez da mola são parâmetros incertos. Em particular, foram analisadas uma aplicação para a resposta no domínio da frequência e outra no domínio do tempo.

Com base nos experimentos numéricos realizados, pode-se concluir que o Polinômio do Caos fornece resultados condizentes com variabilidade assumida para os parâmetros incertos, uma vez que o valor esperado da resposta aleatória tende a diferir da resposta determinística a medida que o desvio aumenta para um dos parâmetros, enquanto permanece baixa para o outro. O resultado é ainda mais perceptível quando o desvio padrão da resposta é observado, mostrando que a massa é mais sensível do que a rigidez, dado o sistema com resposta no

domínio da frequência. Da mesma forma, a rigidez não linear é mais sensível do que a linear para o sistema com resposta no domínio do tempo.

Assim, a expansão em Polinômio do Caos permite propagar as incertezas para a solução do sistema, de forma que a aleatoriedade é transferida para a base de polinômios ortogonais empregada, que neste caso foram os polinômios de Hermite, enquanto a parte determinística contém os coeficientes que descrevem as estatísticas da resposta aleatória (média e desvio padrão). No caso do Hipercubo Latino, torna-se possível realizar a amostragem da resposta utilizando uma quantidade razoável de pontos, uma vez que os experimentos mostraram que a resposta amostrada ficou próxima da retornada pelo Polinômio do Caos.

Trabalhos futuros consideram investigar com mais detalhes o Polinômio do Caos dependente do tempo para sistemas com resposta no domínio do tempo, uma vez que a resposta tende a divergir da determinística para longos intervalos de tempo. Outra linha de investigação consiste em analisar a sensibilidade dos parâmetros incertos em sistemas mecânicos não lineares de alta ordem.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio das agências de fomento CNPq e FAPEG.

## REFERÊNCIAS

- Cunha, J. C. C., 2010. *Propagação de incertezas na exploração e produção de Petróleo: abordagens com o uso do método do Caos Polinomial e da Colocação Estocástica*. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco.
- Chrisman, L., 2014. *Latin Hypercube vs. Monte Carlo Sampling*. Disponível em: <http://www.lumina.com/blog/latin-hypercube-vs.-monte-carlo-sampling>. Acesso em 01 de julho de 2016.
- Ghanem, R. G., & Spanos, P. D., 1991. *Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach*. Springer-Verlag.
- Guerine, A., El Hami, A., Walha, L., Fakhfakh, T., & Haddar, M., 2016. A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, vol. 59, pp. 76-84.
- Gerritsma, M., van der Steen, J-B., Vos, P., & Karniadakis, G., 2010. Time-dependent generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*, vol. 229, n. 22, pp. 8333-8363.
- Forrester, A. I. J., Sóbester, A., & Keane, A. J., 2008. *Engineering design via surrogate modelling: a practical guide*. John Wiley & Sons, United Kingdom.
- Inman, D. J., 2013. *Engineering Vibration*, 4<sup>th</sup> Edition. Pearson Education Inc.
- Kewlani, G., Crawford, J., & Iagnemma, K., 2012. A polynomial chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics*, vol. 50, n. 5, pp. 1-26.
- Lira Júnior, J. D., 2012. *Otimização com modelos substitutos considerando incertezas em reservatórios de petróleo*. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco.

- Lucor, D., & Karniadakis, G. E., 2004. Adaptive generalized polynomial chaos for nonlinear random oscillators. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 26, n. 2, pp. 720-735.
- McKay, M. D., Beckman, R. J., & Conover, W. J., 1979. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, vol. 21, n. 2, pp. 239-124.
- Olsson, A., Sandeberg, G., & Dahlblom, O., 2003. On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, vol. 25, p. 47-68.
- Robert, C., & Casella, G., 2011. A short history of Markov Chain Monte Carlo: Subjective recollections from incomplete data. *Statistical science*, vol. 26, n. 1, pp. 102-115.
- Santos, K. R. M., 2014. *Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo*. Dissertação (Mestrado – Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Schoutens, W., 1999. *Stochastic processes in the Askey scheme*. PhD thesis, University of K.U. Leuven, Ghent-Belgium.
- Viana, F. A. C., 2015. A Tutorial on Latin Hypercube Design of Experiments. *Quality and Reliability Engineering International*, <http://dx.doi.org/10.1002/qre.1924>.
- Xiu, D., Lucor, D., Su, C.-H., & Karniadakis, G., 2003. Performance Evaluation of Generalized Polynomial Chaos. In Sloot, P. M. A., Abramson, D., Bogdanov, A. V., Gorbachev, Y. E., Dongarra, J. J., & Zomaya, A. Y., eds, *International Conference on Computational Science (ICCS 2003)*, pp. 346-354.
- Xiu, D., & Karniadakis, G. E., 2002a. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 24, n. 2, pp. 619-644.
- Xiu, D., & Karniadakis, G. E., 2002b. Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, n. 43, pp. 4927-4948.