



MODELAGEM NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE FISSURAS EM MEIOS FRÁGEIS BIDIMENSIONAIS UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Heider de Castro e Andrade

heider.andrade@usp.br

Edson Denner Leonel

edleonel@sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas.

Avenida Trabalhador São Carlense, 400, Centro. CEP 13.566-590, São Carlos, SP, Brasil.

Resumo. Neste estudo é realizada a implementação computacional de um modelo numérico capaz de simular a propagação de fissuras em meio frágil, isotrópico e bidimensional. A resposta mecânica da estrutura é determinada a partir do método dos elementos de contorno (MEC). A formulação dual é utilizada, na qual são utilizadas a formulação singular e hipersingular do MEC. É proposto um esquema de remalhamento automático para a criação de novos elementos e modificação de elementos interceptados durante a propagação de fissuras. O sistema de equações lineares é modificado à medida que há alteração da malha da estrutura. Nas análises de fratura frágil, os fatores de intensidade de tensão são calculados a partir da integral J . Dois exemplos são mostrados para a avaliação da eficácia do modelo proposto. O primeiro aborda um problema com resposta analítica conhecida. O segundo trata de um problema de propagação em modo misto. Os resultados obtidos pelo modelo proposto são comparados com os fornecidos pelo software Franc2D. Foram obtidas excelentes correspondências entre os resultados determinados neste trabalho com os valores de referência.

Palavras-chave: Mecânica da Fratura Elástico-Linear, Propagação de fissuras, Integral J , Método dos elementos de contorno dual.

1 INTRODUÇÃO

Até o século XVIII, os principais materiais utilizados na composição das estruturas eram a alvenaria e a madeira. Pelo fato desses materiais apresentarem reduzida resistência à tração, os projetos eram concebidos de tal forma que as solicitações predominantes sobre os elementos estruturais fossem de compressão. Com a revolução industrial, principalmente a partir de meados do século XIX, houve um aumento no uso do ferro e do aço na composição das estruturas, especialmente para suportar esforços de tração. Todavia, essa nova concepção estrutural foi acompanhada de diversos acidentes, muitos dos quais com origem na propagação de descontinuidades material (fissuras). Os ineficientes processos de manufatura à época favoreceram a existência de vazios intrínsecos à constituição dos materiais. Quando as descontinuidades eram solicitadas a esforços de tração, elas coalesciam e propagavam, causando degradação mecânica e resultando nos acidentes observados.

A investigação das novas formas de colapso deu origem a uma área do conhecimento, a Mecânica da Fratura, cujo objetivo principal é determinar a resistência residual de estruturas com a presença de fissuras. Atualmente, apesar dos avanços tecnológicos observados nos processos de manufatura, nenhum processo é capaz de produzir materiais livres de vazios. Além disso, materiais naturais que são utilizados para fins estruturais, como madeiras e rochas, apresentam descontinuidades inerentes à sua composição e, portanto, são passíveis de terem redução de resistência devido a fenômenos de fratura. Outros processos, como a corrosão em metais e sua degradação mecânica, favorecem a introdução de fissuras nas estruturas. Aliado a isso, o aumento da resistência dos materiais nos últimos anos conduz a elementos cada vez mais esbeltos, que são mais susceptíveis aos efeitos negativos do fraturamento. Dessa forma, o desenvolvimento de estudos no campo da Mecânica da Fratura se tornam imprescindíveis para a correta avaliação da resistência mecânica das estruturas e, conseqüentemente, para projetos mais seguros e eficientes.

Os primeiros trabalhos no âmbito da Mecânica da Fratura se deram no início do século XX e foram intensificados após a Segunda Guerra Mundial, dos quais se destacam os estudos de Griffith (1920), Westergaard (1939) e Irwin (1957). Grande parte desses estudos teve como objetivo a investigação da fratura em materiais com comportamento frágil, nos quais a zona de processos inelásticos na ponta da fissura apresenta pequena dimensão em relação ao comprimento da descontinuidade material. Irwin (1957) relacionou o campo de tensões no entorno da ponta da fissura nesses materiais a novas grandezas, denominadas fatores de intensidade de tensão (FIT). A partir daí, um critério de propagação frágil de fissuras foi estabelecido, no qual a solicitação, dada pela combinação dos FIT, é comparado à tenacidade, ou resistência ao fraturamento do material. Esse é um dos fundamentos da Mecânica da Fratura Elástico-Linear (MFEL), que analisa a fratura em materiais frágeis. Apesar de não ser adequada à análise de fratura de materiais com ductilidade não desprezível, os conceitos abordados pela MFEL fornecem subsídios para análises não linear de fratura e para análises de fadiga.

Para as análises no âmbito da MFEL, é necessária a determinação dos FIT na ponta da fissura. Para alguns problemas com geometria e carregamento mais simples existem soluções analíticas, que podem ser encontradas em *handbooks*, tais como Tada *et al.* (1985) e Murakami (1987). Para problemas com maior complexidade, os FIT podem ser obtidos a partir da sobreposição ou particularização de problemas já conhecidos. Os FIT podem ser ainda determinados experimentalmente, como nos trabalhos de McNeill *et al.* (1987) e Roux e Hild (2006), nos quais a técnica de correlação de imagens foi empregada. Entretanto, no caso

de problemas com geometria, condições de contorno e composição complexos, os FIT só podem ser obtidos de forma viável a partir da utilização de métodos numéricos.

A análise numérica de problemas de fratura foi intensificada a partir da década de 1970, concomitante aos avanços na área da computação. O método dos elementos finitos (MEF), pela sua maior difusão entre os pesquisadores, é o mais aplicado nas análises de fratura e alguns dos trabalhos que ajudaram seu desenvolvimento nesse campo foram o de Chan *et al.* (1970) e Barsoum (1976). Diversos softwares foram desenvolvidos para análises de fratura com a utilização do MEF. Um exemplo é o Franc2D (Wawrzynek e Ingraffea, 1994), desenvolvido por membros da universidade de Cornell/EUA.

Todavia, o MEF clássico, cujas aproximações são realizadas por meio de funções polinomiais, não é eficaz o suficiente para a representação da concentração de tensão que ocorre nas pontas das fissuras. Dessa forma, uma malha muito refinada é necessária nessas regiões para a adequada representação dos campos singulares, gerando um enorme aumento no custo computacional. Além disso, no caso de análises de propagação, outra dificuldade surge no processo de remalhamento que deve ser realizado à medida que a fissura cresce. Uma alternativa a estas deficiências do MEF clássico é a utilização do método dos elementos finitos generalizados (MEFG), cujos fundamentos estão baseados nos conceitos de partição da unidade (PU) (Melenk e Babuska, 1996). O método prevê o enriquecimento das PU com funções especiais que contêm as propriedades da resposta esperada para o problema em análise. No âmbito da Mecânica da Fratura, o MEFG foi originalmente empregado no trabalho de Belytschko e Black (1999), no qual os autores propuseram um método para análises de propagação sem grandes alterações na malha a partir do uso de funções de enriquecimento descontínuas.

Outros métodos numéricos que são empregados nas análises de estruturas fissuradas como alternativa ao MEF clássico são os conhecidos métodos sem malha (MSM). Tais métodos se baseiam em informações apenas dos nós da estrutura (Belytschko *et al.*, 1996). Essa propriedade constitui uma vantagem dos MSM para análises de propagação, uma vez que poucas alterações no modelo são necessárias à medida que a fissura cresce (Belytschko *et al.*, 1994).

Outro método amplamente aplicado na modelagem de problemas de fratura é o método dos elementos de contorno (MEC). Uma grande vantagem do MEC é a redução da dimensão da malha, uma vez que apenas o contorno da estrutura é discretizado. Isso simplifica o remalhamento durante as análises de propagação, já que novos elementos são apenas adicionados nas novas faces de fissura criadas. Além disso, devido à ausência de malha de domínio, as concentrações de tensão que surgem nas pontas das fissuras são naturalmente representadas com precisão pelo método. Um dos grandes empecilhos para a difusão do MEC refere-se ao custo computacional para a construção do sistema de equações, determinado a partir da integração numérica de núcleos singulares. Todavia, com os avanços recentes na computação, computação em paralela em especial, o tempo despendido nas análises vem sendo cada vez menor, favorecendo a aplicação do MEC.

Uma das primeiras aplicações do MEC em problemas de fratura foi feita por Cruze e Van Buren (1971). Os autores utilizaram a simetria do problema analisado para modelar apenas parte da estrutura e uma face da fissura a fim de evitar o mau condicionamento do sistema de equações que ocorre quando a mesma formulação integral é aplicada a ambas as faces da descontinuidade. Porém, essa metodologia é limitada a problemas com um eixo de simetria coincidente com o eixo da fissura. Outras formulações do MEC foram desenvolvidas para análises de fratura, tais como a utilização de soluções fundamentais que consideram a

presença de descontinuidades (funções de Green) e a técnica de sub-regiões. Entretanto, essas formulações apresentam limitações quanto à geometria da fissura e a restrições em análises de propagação. Uma técnica mais eficiente para análises de propagação é o método dos elementos de contorno dual (MECD), no qual a formulação integral em deslocamentos (singular) e a formulação integral em forças de superfície (hipersingular) são aplicadas separadamente à cada uma das faces. O desenvolvimento dessa técnica foi inicialmente proposta por Hong e Chen (1988). Os autores mostraram como obter a equação integral para forças de superfície a partir da derivação da equação integral para deslocamentos e a aplicação da Lei de Hooke generalizada. O MECD foi aplicado com êxito em problemas de fratura em Portela (1992), Portela et al. (1993), Mi e Aliabadi (1995), dentre outros.

Por suas vantagens, o MECD foi utilizado neste trabalho, cujo objetivo principal é o desenvolvimento de um modelo computacional para a realização de análises de fratura frágil em meios isotrópicos bidimensionais. Alguns exemplos são mostrados para demonstrar a precisão dos resultados obtidos. O primeiro trata de um problema com resposta analítica conhecida, que é comparada com a resposta numérica determinada pelo código desenvolvido. Já o segundo aborda um problema de propagação em modo misto. A resposta obtida é comparada com os resultados determinados via Franc2D. O código desenvolvido nesta etapa da pesquisa será base para um modelo mais completo capaz de simular problemas de fadiga e de propagação linear e coesiva em meios multifissurados não homogêneos.

2 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICO-LINEAR

Os primeiros trabalhos que avaliaram a influência de descontinuidades materiais na resistência mecânica de estruturas empregaram os conceitos da Teoria da Elasticidade. Dentre esses trabalhos está o de Inglis (1913), no qual o autor obteve expressões para a distribuição do campo de tensões no entorno de furos elípticos em chapas de dimensões infinitas submetidas à tração uniforme. Além disso, Inglis (1913) observou que quando o furo é degenerado a uma fissura reta a tensão em sua extremidade assume valor infinito. Isso foi utilizado como justificativa pelo autor para explicar a influência destrutiva das fissuras nos materiais. Entretanto, tal resultado foi questionado, uma vez que indicava que materiais fissurados falhariam mesmo com aplicação de carregamentos de pequena magnitude.

Buscando responder o paradoxo criado a partir do trabalho de Inglis (1913), Griffith (1920) sugeriu um critério baseado em um balanço energético para avaliar a estabilidade à propagação das fissuras. Segundo Griffith (1920), se a energia de deformação liberada durante uma variação do comprimento da fissura superasse a energia necessária para formação de novas superfícies, haveria propagação instável da fissura. Esse critério foi adequado apenas para materiais frágeis, como vidro, mas subestimou a resistência ao fraturamento de materiais com algum grau de ductilidade.

Irwin (1957) analisou o campo de tensões em regime elástico linear na vizinhança da ponta de uma fissura a partir de uma mudança de variável nos modelos analíticos de Westergaard (1939), que avaliara o mesmo campo a partir de funções de tensão com variáveis complexas. Irwin (1957) obteve o mesmo caráter singular do estado de tensão na ponta obtido por Inglis (1913). Entretanto, ele observou que o campo de tensões nesta região para materiais com comportamento frágil pode ser completamente descrito pelos FIT. No caso de um problema bidimensional, de uma fissura presente em um meio infinito solicitado a esforços de tração perpendicular ao eixo da fissura e cisalhamento, as componentes de tensão circunferencial e de cisalhamento podem ser escritas conforme a Eq. (1) e a Eq. (2),

respectivamente. A Fig. 1 esquematiza essas componentes de tensão em relação a coordenadas polares.

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \sin(\theta) + K_{II} (3\cos(\theta) - 1) \right] \quad (2)$$

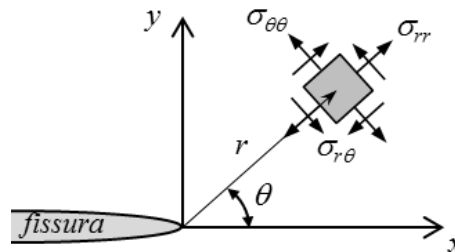


Figura 1 - Componentes de tensão na região próxima à ponta da fissura.

K_I e K_{II} presentes na Eq. (1) e na Eq. (2) representam os FIT dos modos de sollicitação de abertura e deslizamento, respectivamente (Fig. 2). Para problemas bidimensionais, como os que serão tratados neste trabalho, toda sollicitação na região da ponta da fissura pode ser decomposta em uma combinação desses dois modos básicos.

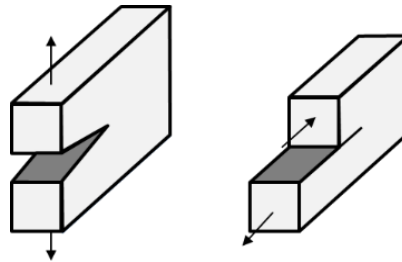


Figura 2 - Modos básicos de sollicitação da ponta de um problema bidimensional de fratura. À esquerda: modo I ou de abertura; à direita: modo II ou de deslizamento.

A partir dos valores de K_I e K_{II} , um fator de intensidade de tensão equivalente (K_{eq}) pode ser determinado a partir de um critério de propagação de fissura. Neste trabalho será utilizado o critério da máxima tensão circunferencial (Item 2.1). O fator equivalente assim obtido pode ser comparado com a resistência ao fraturamento, ou tenacidade do material (K_{Ic}) para verificar a estabilidade à propagação da fissura.

2.1 Critério da máxima tensão circunferencial

O critério da máxima tensão circunferencial foi proposto por Erdogan e Sih (1963) e assume que a fissura irá crescer na direção perpendicular à direção de máximo $\sigma_{\theta\theta}$. Portanto, essa tensão será uma tensão principal e a componente de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$ associada será nula. Assim, igualando a Eq. (2) a zero, a seguinte relação é obtida:

$$\theta_p = 2 \operatorname{atan} \left\{ \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \right\} \quad (3)$$

sendo θ_p o ângulo que fornece a direção de propagação da fissura. O seu valor se encontra no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

A expressão de $\sigma_{\theta\theta}$ mostrada na Eq. (1) pode ser reescrita conforme a Eq. (4).

$$\sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (4)$$

O primeiro termo da Eq. (4) possui unidade equivalente à do FIT. Portanto, esse termo é definido como K_{eq} . Assim, a Eq. (4) pode ser reescrita conforme a Eq. (5).

$$K_{eq} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (5)$$

Substituindo o valor de θ_p obtido via Eq. (3) na Eq. (5), pode-se determinar o valor crítico de K_{eq} . Tal valor é comparado à K_{Ic} para verificar a estabilidade à propagação da fissura.

2.2 Integral J

Rice (1968) propôs um método para a determinação da taxa de liberação de energia em materiais elásticos a partir de uma integral, denominada integral J, ao longo de um caminho fechado arbitrário que engloba a ponta da fissura (Fig. 3). O caminho se inicia em um ponto, em umas das faces da fissura, e termina em um ponto na face oposta da fissura. A integral J é independente do caminho para corpos homogêneos, com comportamento elástico, sem a presença de forças de volume e sujeitos a um campo de deformações bidimensional. A expressão da integral J obtida por Rice, considerando o sistema cartesiano em relação à ponta da fissura, é mostrada pela Eq. (6).

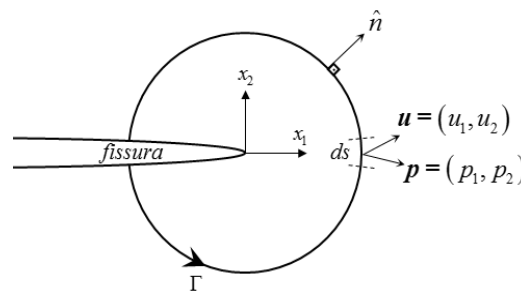


Figura 3 - Contorno ao redor da ponta da fissura para o cálculo da integral J.

$$J = \int_{\Gamma} (W n_1 - p_j u_{j,1}) ds \quad (6)$$

onde W é a densidade de energia de deformação dada por $\int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$, p_j são as componentes da força de superfície dadas por $\sigma_{ij} n_i$, u_j são as componentes do vetor deslocamento, n_1 é a

componente do vetor normal na direção x_I e ds é o comprimento infinitesimal ao longo do contorno Γ .

Rice mostrou que para materiais elásticos a Eq. (7) é válida, sendo G a taxa de liberação de energia.

$$J = G \quad (7)$$

Entretanto, para a grande maioria dos materiais empregados na prática ocorrem processos plásticos na zona à frente da ponta da fissura. Nesse caso, a igualdade na Eq. (7) não é mais verificada, visto que a integral J passa a ser dependente do caminho. Todavia, a taxa de liberação de energia ainda pode ser aproximada pela integral J desde que a zona de processos inelásticos à frente da ponta da fissura seja pequena em comparação à região interna ao contorno.

Decomposição dos modos

A determinação dos FIT em modos mistos de solitação pode ser realizada a partir decomposição dos campos elásticos nas componentes simétricas e antissimétricas (Fig. 4 e Fig. 5, respectivamente), conforme Kitagawa *et al.* (1978). Tais componentes podem ser expressas a partir dos campos de deslocamento (u e u') e de tensão (σ e σ') escritos em relação ao sistema cartesiano posicionado na ponta da fissura, conforme a Eq. (8) e a Eq. (9).

$$\begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + u_1' \\ u_2 - u_2' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - u_1' \\ u_2 + u_2' \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}' \\ \sigma_{22}' \\ \sigma_{12}' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} + \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} - \sigma_{12}' \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11}'' \\ \sigma_{22}'' \\ \sigma_{12}'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{11}' \\ \sigma_{22} - \sigma_{22}' \\ \sigma_{12} + \sigma_{12}' \end{Bmatrix} \quad (9)$$

A aplicação da Eq. (8) e da Eq. (9) leva à seguinte decomposição dos campos elásticos:

$$u_j = u_j' + u_j'' \quad (10)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}'' \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (10) e a Eq. (11) na Eq. (6) e a desenvolvendo algebricamente, são obtidas as componentes da integral J , dadas por:

$$J^M = \int_{\Gamma} (W^M n_1 - p_j^M u_{j,1}^M) ds \quad (12)$$

onde M denomina o modo analisado.

Os módulos dos FIT podem então ser obtidas por:

$$K_I = \sqrt{E' J^I} \quad K_{II} = \sqrt{E' J^{II}} \quad (13)$$

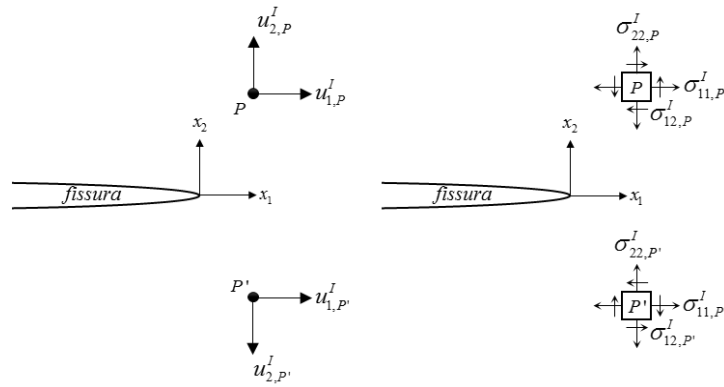


Figura 4 - Componentes simétricas dos campos elásticos.

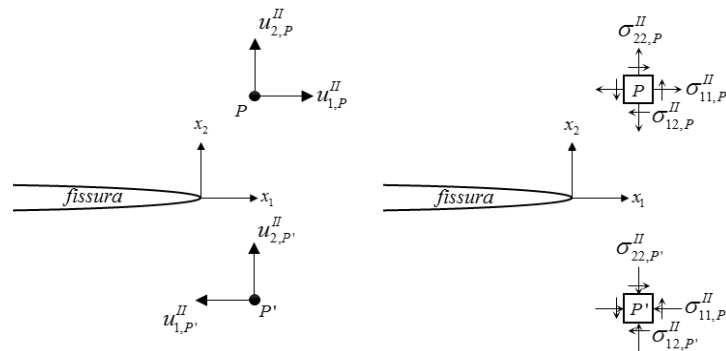


Figura 5 - Componentes antissimétricas dos campos elásticos.

O fator K_I é sempre positivo e pode ser diretamente obtido a partir da Eq. (13). Já o valor de K_{II} pode assumir valores negativos e, portanto, a Eq. (13) fornece apenas sua magnitude. Para determinar o sinal dessa grandeza, o valor do deslocamento diferencial entre as faces da fissura em relação ao eixo x_1 pode ser utilizado. Caso o deslocamento da face superior seja maior que o deslocamento da face inferior, o valor de K_{II} é positivo. Caso contrário, K_{II} assume valor negativo.

Implementação computacional da integral J

Para a implementação da integral J, inicialmente é criado um caminho, arbitrado como circular, que engloba a ponta da fissura. Tal caminho se inicia em um dos pontos de colocação pertencente à malha de elementos de contorno de uma das faces da fissura e termina no ponto de colocação simetricamente posicionado na face oposta. Ao longo do trajeto são definidos pontos internos localizados em posições simétricas em relação ao eixo da fissura (Fig. 6). O caminho da integral J pertence a um domínio homogêneo e não cruza com nenhuma outra descontinuidade material.

Após a análise elástica via MEC, os campos de deslocamento e de tensão de cada um dos pontos que definem o caminho de integração são obtidos e a determinação da integral J é calculada em uma fase de pós-processamento. Os campos elásticos são rotacionados para um sistema cartesiano referenciado à ponta da fissura e, em seguida, são decompostos com a aplicação da Eq.(8) e da Eq. (9). Caso exista um ponto interno no eixo da fissura ($x_2 = 0$), o seu simétrico será o próprio ponto. Nesse caso, a decomposição pode ser feita considerando ambas as componentes envolvidas nas transformações mostradas pela Eq.(8) e pela Eq. (9) iguais às componentes dos campos elásticos no ponto.

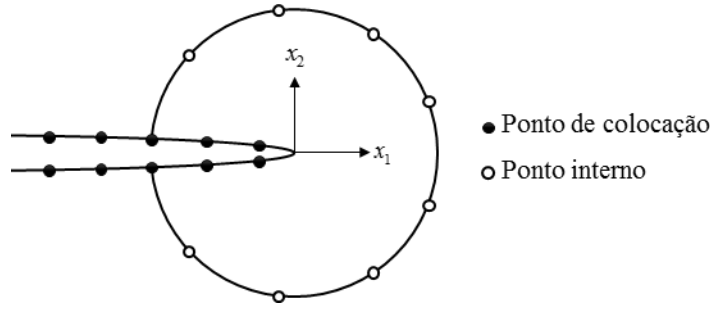


Figura 6 - Definição do caminho para cálculo da integral J.

Na sequência são definidos elementos para realização da integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre. Assim, a integral J fica dada por:

$$J^M = \sum_{e=1}^{nelem} \sum_{n=1}^{npg} \left[\left(W^M(\xi_n) n_1(\xi_n) - p_1^M(\xi_n) u_{1,1}^M(\xi_n) - p_2^M(\xi_n) u_{2,1}^M(\xi_n) \right) Jac(\xi_n) w(\xi_n) \right] \quad (14)$$

onde $nelem$ é o número de elementos utilizados na discretização do caminho, npg é o número de pontos de Gauss utilizados para a realização da integração numérica em cada elemento, ξ_n é a n -ésima coordenada adimensional do elemento, w é o peso associado a cada uma das coordenadas adimensionais e Jac é o jacobiano da transformação do espaço adimensional ξ para o espaço real e pode ser calculado por:

$$Jac(\xi_n) = \left[\left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right]_{\xi_n}^{1/2} \quad (15)$$

As coordenadas x_i podem ser aproximadas pelas funções de formas ϕ_j e coordenadas x_i^j de cada um dos nós j de um elemento como:

$$x_i(\xi) = x_i^j \phi_j(\xi) \quad (16)$$

Dessa forma, as derivadas das coordenadas reais em relação à coordenada adimensional são dadas por:

$$x_{i,\xi}(\xi) = x_i^j \phi_{j,\xi}(\xi) \quad (17)$$

Já a componente n_1 do versor normal ao caminho de integração pode ser calculada por:

$$n_1(\xi) = \frac{x_2^j \phi_{j,\xi}(\xi)}{Jac(\xi)} \quad (18)$$

Por fim, as derivadas dos deslocamentos em relação à direção x_1 presentes na Eq. (14) podem ser obtidas conforme exposto a seguir. A derivada $u_{1,1}^M$ corresponde à deformação ε_{11}^M e pode ser determinada com a aplicação da Lei de Hooke generalizada. Já para a avaliação de $u_{2,1}^M$, inicialmente a componente u_2^M é derivada em relação a ξ utilizando a regra da cadeia:

$$u_{2,\xi}^M = u_{2,1}^M x_{1,\xi} + u_{2,2}^M x_{2,\xi} \quad (19)$$

O termo $u_{2,2}^M$ corresponde à deformação ε_{22}^M e também pode ser avaliada com a aplicação da Lei de Hooke generalizada. As derivadas das coordenadas x_i são obtidas conforme a Eq. (17). Já para a avaliação da derivada presente no primeiro membro da Eq. (19), o deslocamento u_2^M pode ser aproximado pelas funções de forma do elemento de maneira semelhante às coordenadas na Eq. (16). Em seguida, a expressão pode ser derivada em relação a ξ , resultando em:

$$u_{2,\xi}^M = u_2^j \phi_{j,\xi} \quad (20)$$

Substituindo a Eq. (17) e a Eq. (20) na Eq. (19) e isolando $u_{2,1}^M$ obtém-se:

$$u_{2,1}^M(\xi) = \frac{u_2^j \phi_{j,\xi}(\xi) - \varepsilon_{22}^M(\xi) (x_2^j \phi_{j,\xi}(\xi))}{x_1^j \phi_{j,\xi}(\xi)} \quad (21)$$

Com isso, é possível realizar os somatórios da Eq. (14) e determinar o valor da integral J. Em seguida, com a aplicação da Eq. (13), os FIT podem ser calculados.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO DUAL

Dentre as formulações do MEC para a abordagem de problemas de fratura, o MECD seja, talvez, a técnica mais popular. Esta técnica é reconhecidamente robusta para análises de propagação de fissuras com caminho de crescimento arbitrário. Esse tipo de análise foi originalmente implementado de forma eficiente no trabalho de Portela (1992) baseado na teoria desenvolvida por Hong e Chen (1988). O MECD é capaz de representar com precisão as faces da fissura durante a propagação e fornece boas respostas para os campos elásticos na região próxima da ponta, o que é essencial para a correta avaliação dos FIT.

O termo dual provém da utilização tanto da formulação em deslocamento quanto em força de superfície do MEC. A formulação em deslocamentos (Eq. (22)) é utilizada considerando como pontos fonte f os pontos de colocação do contorno externo da estrutura e de uma das faces da fissura.

$$c_{ij}^f u_j^f + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (22)$$

onde u_j e p_j representam as componentes de deslocamento e de forças de superfície nos pontos de colocação da estrutura, p_{ij}^* e u_{ij}^* são as componentes das soluções fundamentais da elastostática e c_{ij}^f representa o termo livre e vale $\delta_{ij}/2$ para pontos fontes localizados em contornos suaves, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker. Neste trabalho são utilizados elementos descontínuos quando há descontinuidade geométrica e nas faces da fissura e, portanto, os pontos fonte sempre estão em contornos suaves. O traço nas integrais da Eq. (22) indica que elas devem ser avaliadas no sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC).

Já para os pontos de colocação da outra face da fissura, a formulação em forças de superfície é utilizada de modo a obter um sistema de equações bem condicionado. Tal

formulação é determinada a partir da diferenciação da Eq. (22), sendo obtida uma equação integral em termos de deformações. Em seguida, com a aplicação da Lei de Hooke generalizada e da fórmula de Cauchy, a equação integral hipersingular é assim determinada:

$$c_{ij}^f p_i^f + n_k^f \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = n_k^f \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (23)$$

onde n_k^f são as componentes do versor normal à superfície no ponto fonte f , S_{ijk}^* e D_{ijk}^* são soluções fundamentais obtidas a partir de p_{ij}^* e u_{ij}^* , respectivamente, e c_{ij}^f representa o termo livre e também vale $\delta_{ij}/2$ para ponto fonte localizado em contorno suave. O duplo traço na integral com núcleo S_{ijk}^* indica que ela deve ser avaliada no sentido da Parte Finita de Hadamard (PFH).

As equações integrais mostradas pela Eq. (22) e pela Eq. (23) podem ser resolvidas numericamente a partir da quadratura Gauss-Legendre utilizando os pontos de colocação correspondentes como pontos fonte. Para tanto, os deslocamentos e forças de superfície dentro de cada um dos elementos utilizados na discretização da estrutura são aproximados por funções de forma. No código desenvolvido neste trabalho são utilizados elementos isoparamétricos cujas funções de forma são compostas por polinômios de Lagrange que podem apresentar qualquer ordem de aproximação, isto é, elementos de alta ordem estão disponíveis.

Cuidado especial deve ser tomado durante a integração do elemento que contém o ponto fonte ou do elemento correspondente na face oposta da fissura. Nesses casos, as integrais se tornam impróprias e devem ser avaliadas no sentido de VPC ou PFH, conforme a formulação adotada. Neste trabalho, para a avaliação numérica dessas integrais, é utilizado o método de subtração de singularidades (Aliabadi, 2002). Ademais, por condições de equilíbrio de forças de superfície, aos coeficientes de influência relacionados às forças de superfície do ponto de colocação correspondente na face oposta da fissura, deve ser adicionado um termo livre igual a $\delta_{ij}/2$.

A partir da integração numérica considerando determinado ponto de colocação como ponto fonte, duas equações, relacionadas às duas direções do espaço de análise, são obtidas. Ao final da integração utilizando todos os pontos de colocação como pontos fonte, o seguinte sistema global de equações é determinado:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (24)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} são matrizes $2N \times 2N$ que armazenam os coeficientes de influência. \mathbf{u} e \mathbf{p} são vetores coluna $2N \times 1$ que contêm, respectivamente, os valores de deslocamentos e forças de superfície nos N pontos de colocação da malha.

Aplicando as condições de contorno em deslocamento e em força de superfície e reorganizando o sistema mostrado na Eq. (24) a partir da troca de colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , o sistema linear mostrado pela Eq. (25) é obtido:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (25)$$

onde \mathbf{A} é a matriz composta pelas colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} que são coeficientes dos valores incógnitos do contorno, \mathbf{X} é o vetor coluna que contém os valores incógnitos do

contorno e \mathbf{F} é o vetor coluna resultante da multiplicação da matriz de coeficientes de influência pelos respectivos valores conhecidos no contorno.

4 TÉCNICA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

Após a construção das matrizes de influência \mathbf{H} e \mathbf{G} a partir da integração numérica da Eq. (22) e/ou da Eq. (23) para todos os pontos de colocação, a fase de aplicação do carregamento é iniciada. No início da análise, todos os pares de pontos de colocação nas faces das fissuras apresentam deslocamento relativo impedido. Dessa forma, tanto deslocamento quando força de superfície são incógnitos para cada um dos pontos de colocação, fazendo com que o sistema mostrado pela Eq. (24) seja indeterminado. Para que o problema admita solução única, as equações de compatibilidade entre os deslocamentos e forças de superfície dos pontos de colocação pares são utilizadas. Assim, a fase de carregamento é iniciada com a aplicação de um incremento das condições de contorno conhecidas e solução do sistema resultante com forma mostrada pela Eq. (25), sendo obtidos os valores incógnitos do problema.

Na sequência, os valores dos deslocamentos e forças de superfície determinados pela solução do sistema são acrescentados a variáveis acumuladoras. A partir dos valores acumulados de forças de superfície, as forças normais à superfície da face da fissura (p_N) nos pontos de colocação são determinadas. Se para determinado par de pontos de colocação essa força é positiva, significa que há uma força de tração entre as faces da fissura, o que é considerado impossível. Quando isso ocorre, os deslocamentos relativos são liberados e a força de superfície do par é definida como nula (Fig. 7a). Em seguida, as variáveis acumuladoras são decrementadas do último incremento e o passo de carregamento é reaplicado. No decorrer da análise, a abertura, ou COD (*crack opening displacement*), dos pares de pontos de colocação também é monitorada a partir dos valores acumulados de deslocamento. Um valor de COD negativo implica que há interpenetração material, o que não é admitido. Quando isso ocorre para algum par, o deslocamento relativo entre os pontos de colocação é restringido (Fig. 7b), simulando uma condição de atrito perfeito, e o último incremento de carregamento é novamente aplicado.

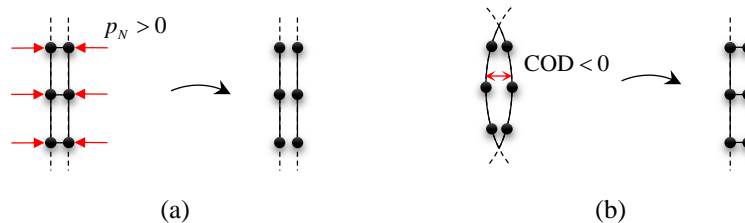


Figura 7 - (a) Deslocamento relativo liberado pela existência de esforço de tração entre as faces e (b) deslocamento relativo impedido devido a COD negativo.

A aplicação de passos de carga é feita até se atingir a magnitude total do carregamento prescrito ou até que ocorra a propagação de alguma das pontas. Para o segundo caso é simulada a fase de reaplicação. Nessa fase, inicialmente são definidos o ângulo de propagação e o comprimento de crescimento da ponta. Tal comprimento é determinado a partir de um valor padrão definido pelo usuário e é proporcional à razão do K_{eq} da ponta e do $K_{eq,máx}$ na estrutura. Em seguida, ao longo do caminho de propagação são definidos pontos internos nas mesmas posições dos pontos de colocação que farão parte da malha das novas faces da fissura (Fig. 8). Na sequência, os estados de tensão nesses pontos internos são determinados. Tais

estados são rotacionados para a obtenção das tensões que atuam em planos paralelos às faces que serão criadas. Como o material nessa região é degradado de forma frágil com a propagação da fissura e, portanto, não é mais capaz de suportar esforços, os vetores de força de superfície correspondentes aos estados de tensão nas faces são reaplicados sobre os novos pontos de colocação criados. A reaplicação dos esforços nas novas faces criadas é feita em passos incrementais. Ao final de cada incremento, do mesmo modo explicado anteriormente, são verificados p_N nos pares com deslocamento relativo restringido e o COD nos pares com deslocamento relativo liberado.

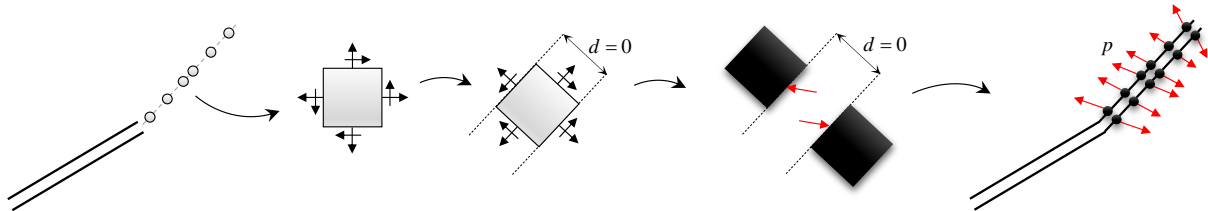


Figura 8 - Definição das forças de superfície reaplicadas sobre os pontos de colocação das novas faces de fissura criadas durante a propagação.

Para a realização da fase de reaplicação é necessária a atualização das matrizes de coeficientes de influência, uma vez que há mudança na malha de elementos de contorno com a adição de novos elementos nas novas faces de fissura criadas. Ademais, o comprimento de fissura adicionado pode interceptar um elemento preexistente. Nesse caso, o elemento original é modificado e um novo elemento é criado (Fig. 9a).

A cada novo ponto de colocação criado duas novas linhas e colunas são adicionadas às matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} a partir do cálculo da Eq. (22) ou Eq. (23), dependendo da formulação adotada. As linhas correspondem à influência do novo ponto de colocação nos demais. As colunas representam a influência inversa. Além disso, as linhas e as colunas referentes ao elemento cruzado devem ser alteradas para representar os pontos de colocação do elemento modificado. A Fig. 9b mostra o esquema de alteração das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} com a adição e modificação de elementos na malha da estrutura.

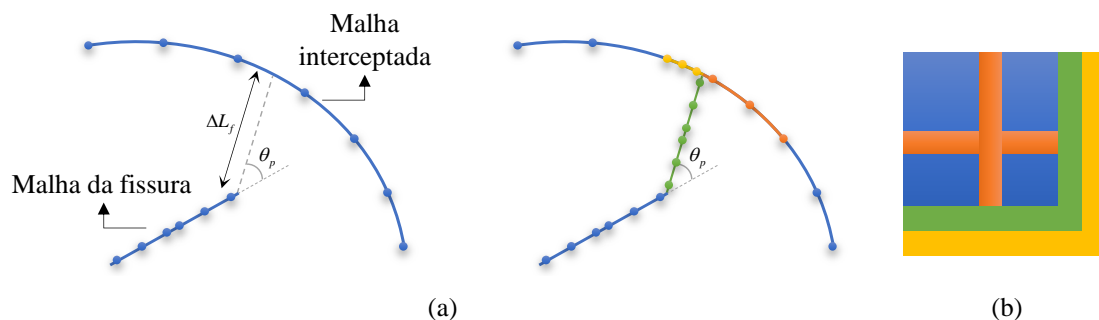


Figura 9 - (a) Esquema de remalhamento na interseção de algum elemento durante a propagação de uma fissura. (b) Alteração das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} com a criação e modificação de elementos.

5 EXEMPLOS

5.1 Exemplo 1 – Chapa tracionada. Comparação com resultado analítico

A primeira parte deste exemplo busca analisar um problema de fratura com resposta analítica conhecida, que servirá como base para a comparação dos resultados obtidos

numericamente. Ele consiste de uma chapa tracionada com a presença de uma fissura horizontal, conforme mostrado pela Fig. 10. O módulo de elasticidade longitudinal E do material é considerado igual a $1000 uF/uL^2$ e o coeficiente de Poisson ν é tomado como nulo. O problema é analisado como um estado plano de deformação. São avaliados tanto o fator de intensidade de tensão para o modo I (K_I) quanto o deslocamento vertical (Δ_v) no ponto central do topo da estrutura.

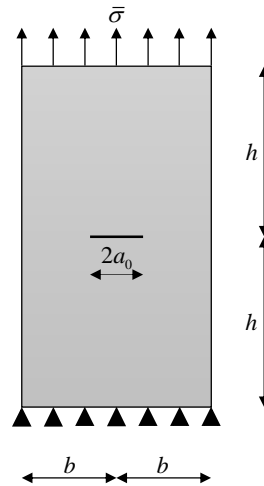


Figura 10 - Problema analisado no exemplo 1.

A partir dos resultados obtidos por Isida (1971), as respostas para K_I e Δ_v para uma estrutura com relação $h/b = 1,8$ se aproximam das respostas para uma tira de altura infinita. Portanto, para minimizar o erro associado às dimensões da estrutura, neste exemplo é tomada uma relação entre h e b igual a 3. Além disso, o valor de b é adotado igual a $3 uL$. As respostas analíticas para o problema de uma tira de altura infinita podem ser obtidas em Tada *et al.* (1985). Para K_I tem-se que:

$$K_I = \bar{\sigma} \sqrt{\pi a_0} F_1 \left(\frac{a_0}{b} \right) \quad (26)$$

onde o fator adimensional F_1 é dado por:

$$F_1 \left(\frac{a_0}{b} \right) = \left[1 - 0,025 \left(\frac{a_0}{b} \right)^2 + 0,06 \left(\frac{a_0}{b} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \frac{\pi a_0}{2b}}$$

Já Δ_v é obtido por:

$$\Delta_v = \frac{2h\sigma}{E} + \frac{4\sigma a_0}{E'} F_2 \left(\frac{a_0}{b} \right)$$

sendo $E' = E/(1-\nu^2)$ por se tratar de um estado plano de deformação e o fator F_2 dado por:

$$F_2\left(\frac{a_0}{b}\right) = -1,071 + 0,250\left(\frac{a_0}{b}\right) - 0,357\left(\frac{a_0}{b}\right)^2 + 0,121\left(\frac{a_0}{b}\right)^3 + \\ -0,047\left(\frac{a_0}{b}\right)^4 + 0,008\left(\frac{a_0}{b}\right)^5 - 1,071\left(\frac{b}{a_0}\right)\ln\left(1 - \frac{a_0}{b}\right)$$

A força distribuída aplicada é tomada como $\bar{\sigma} = 10 \text{ uF/uL}$. O semi-comprimento a_0 da fissura é variado de $0,1b$ até $0,9b$, com passo de $0,1b$. Na discretização da estrutura, são utilizados 48 elementos quadráticos. A fissura é discretizada com elementos de aproximação cúbica com comprimento igual a $0,15 \text{ uL}$. Assim, uma fissura com comprimento $2a_0 = 0,2b = 0,6 \text{ uL}$ é discretizada com quatro elementos cúbicos em cada uma de suas faces. Já o caminho para cálculo da integral J é discretizado com 5 elementos com aproximação cúbica, o que corresponde à utilização de 14 pontos internos nas proximidades de cada uma das pontas.

Para cada um dos casos, os valores de K_I e Δ_v são obtidos a partir do código implementado. Os resultados adimensionais determinados são mostrados na Tabela 1. Nela também estão indicados os respectivos valores analíticos e os erros relativos das respostas numéricas.

Tabela 1 - Resultados para exemplo 1

a/b	$\frac{K_I}{\bar{\sigma}\sqrt{\pi a_0}}$			$\frac{\Delta_v E}{4b\bar{\sigma}}$		
	Analítico	Numérico	Erro (%)	Analítico	Numérico	Erro (%)
0,1	1,006	1,012	0,644	1,508	1,508	0,014
0,2	1,024	1,029	0,403	1,532	1,533	0,030
0,3	1,058	1,061	0,351	1,574	1,575	0,054
0,4	1,109	1,113	0,340	1,638	1,640	0,089
0,5	1,186	1,190	0,337	1,731	1,733	0,129
0,6	1,303	1,307	0,316	1,864	1,867	0,158
0,7	1,487	1,490	0,199	2,062	2,065	0,143
0,8	1,814	1,810	0,266	2,380	2,380	0,006
0,9	2,577	2,559	0,676	3,000	2,985	0,507

Como pode ser observado, tanto os valores obtidos para K_I quanto para Δ_v são muito próximos aos valores analíticos, com erros inferiores a 1%. Isso demonstra a eficácia do código implementado para análises de problemas no âmbito da MFEL.

A segunda parte deste exemplo consiste na aplicação de um deslocamento vertical prescrito para cima no topo da chapa mostrada na Fig. 10 em substituição à força. O deslocamento prescrito tem magnitude igual a $0,2 \text{ uL}$ e é aplicado em dez passos incrementais. A relação *carga equivalente x deslocamento* no topo da estrutura é determinada, bem como o caminho de propagação da fissura, cujas pontas estão solicitadas exclusivamente ao modo de abertura. A carga equivalente é calculada a partir integração do carregamento vertical aplicado ao longo do topo da estrutura.

O comprimento inicial da fissura é tomado como $2a_0 = 0,60 \text{ uL}$. O incremento no comprimento da fissura durante a propagação é tomado como $0,70 \text{ uL}$. Os demais parâmetros utilizados são os mesmos descritos na primeira parte deste exemplo.

A Fig. 11 mostra o comportamento da carga vertical aplicada sobre a estrutura com a variação do deslocamento vertical no topo. Como pode ser observado, quando o deslocamento é igual a $0,18 \mu L$ há a propagação frágil da fissura. A fratura frágil é caracterizada pela queda abrupta da carga equivalente. Essa redução se deve à redistribuição de esforços que ocorre à medida que a fissura propaga. O último incremento de deslocamento vertical imposto (de $0,18 \mu L$ a $0,20 \mu L$) é dado com a estrutura separada em duas metades. Dessa forma, há apenas um deslocamento de corpo rígido, sendo praticamente nula a carga equivalente aplicada.

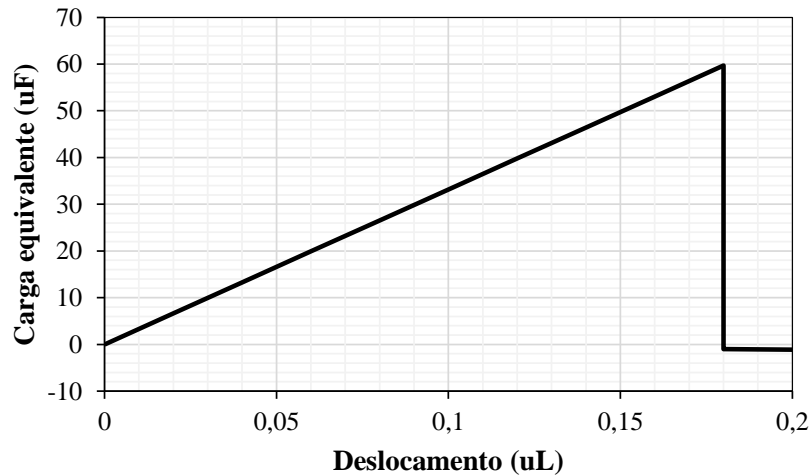


Figura 11 - Variação da carga equivalente com o deslocamento vertical no topo da estrutura.

O histórico de evolução do comprimento da fissura durante sua propagação até a separação completa das metades da estrutura é exibido pela sequência mostrada pela Fig. 12. Como pode ser observado, o código computacional implementado é capaz de representar eficientemente a propagação e a situação de separação e o deslocamento de corpo rígido das metades. Essa última característica advém da utilização da formulação do MEC para a análise do problema mecânico.

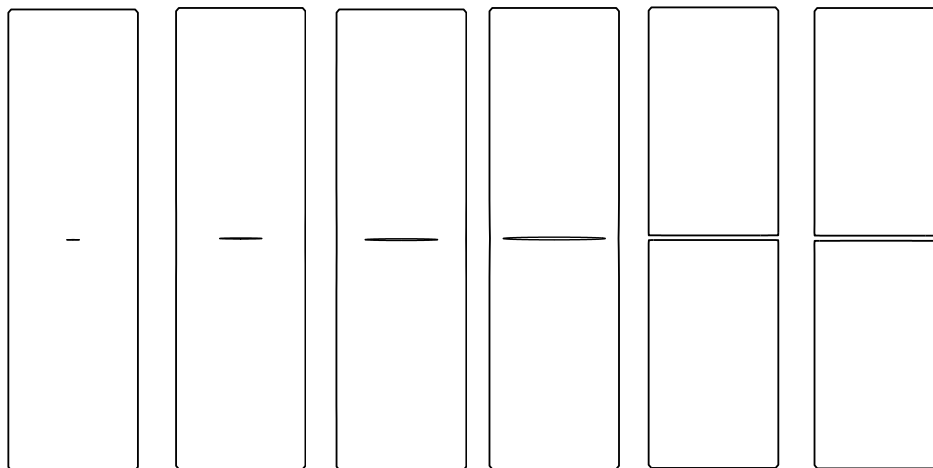


Figura 12 - Representação da propagação da descontinuidade.

5.2 Exemplo 2 – Chapa furada. Comparação com Franc2D

O segundo exemplo busca comparar a resposta obtida pelo modelo numérico implementado neste trabalho com a resposta fornecida pelo programa Franc2D para um

problema de propagação em modo misto. O problema analisado consiste de uma fissura de borda presente em uma chapa com dois furos e tracionada ao longo do eixo horizontal, conforme indicado pela Fig. 13. Como propriedades do material são adotados módulo de elasticidade $E = 1000 uF/uL^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. O problema é analisado como estado plano de tensão. A força de superfície aplicada tem magnitude $\bar{\sigma} = 10 uF/uL$.

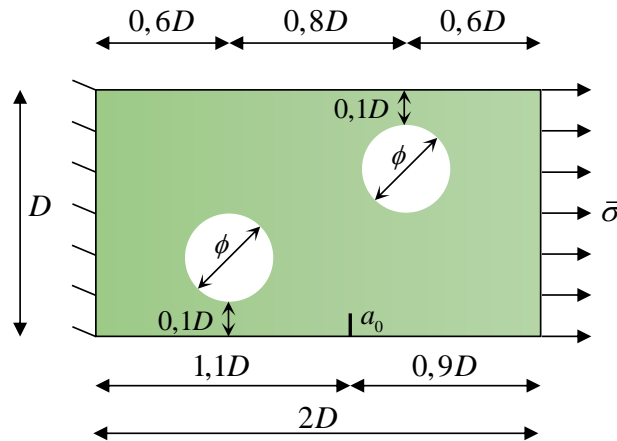


Figura 13 - Problema analisado no exemplo 2.

A dimensão D é igual a $1 uL$ e o diâmetro das aberturas ϕ é igual a $0,4 uL$. O comprimento inicial da fissura a_0 é igual a $0,05 uL$. O incremento no comprimento da fissura durante a propagação é tomado como $0,025 uL$. As faces da fissura são discretizadas com elementos de aproximação quadrática com comprimento igual a $0,025 uL$. Dessa forma, a cada propagação da fissura são adicionados dois novos elementos à malha referentes às duas novas faces criadas. A discretização do contorno externo é realizada com 24 elementos quadráticos, enquanto cada uma das aberturas são discretizadas com 8 elementos quadráticos. São utilizados 5 elementos com aproximação cúbica para o cálculo da integral J.

Os históricos de valores de K_I e de K_{II} são determinados em função do comprimento da fissura tanto a partir do código desenvolvido quanto a partir do Franc2D. Os resultados são mostrados na Fig. 14 para K_I e na Fig. 15 para K_{II} .

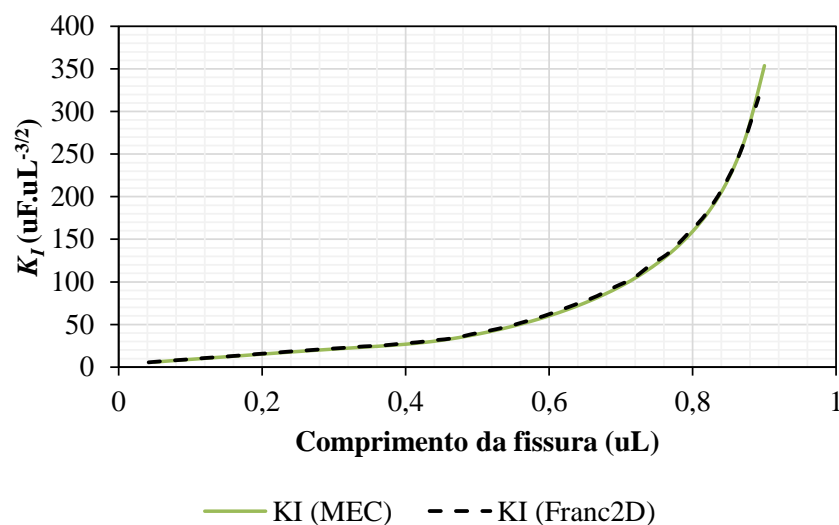


Figura 14 - Variação do fator K_I com o comprimento da fissura.

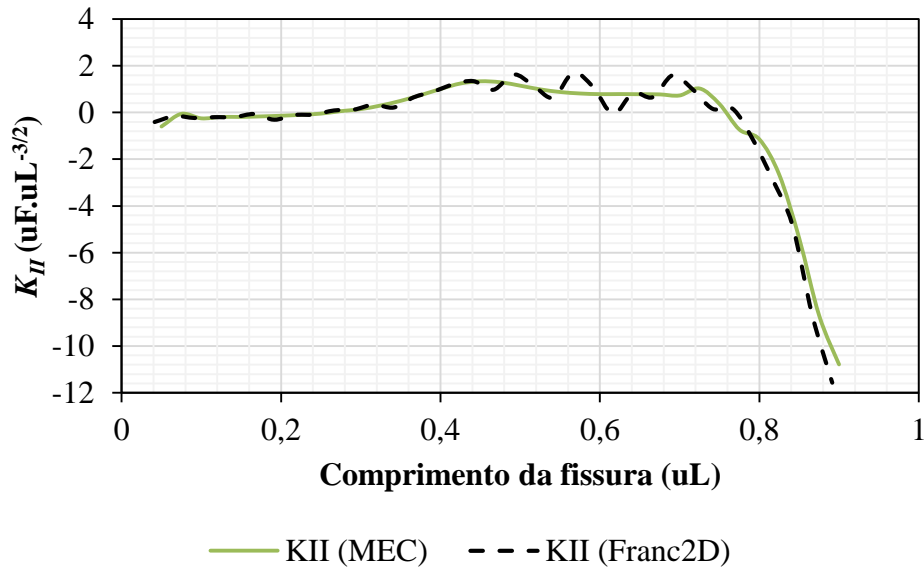


Figura 15 - Variação do fator K_{II} com o comprimento da fissura.

Como pode ser observado pelo gráfico apresentado na Fig. 14, há uma excelente correspondência entre os valores de K_I obtidos pelo programa desenvolvido neste trabalho e pelo Franc2D. Tal correspondência é verificada desde o comprimento inicial de fissura até o comprimento final simulado, próximo a $0,9 \text{ uL}$.

Já na Fig. 15, é observada uma oscilação nos valores de K_{II} obtidos pelo MEF via Franc2D a partir de um comprimento de fissura próximo a $0,5 \text{ uL}$. Por outro lado, os resultados obtidos para K_{II} pelo MEC a partir do programa desenvolvido neste trabalho apresentam variação mais suave. Entretanto, ainda assim existe boa correspondência entre os históricos obtidos por ambos os códigos.

A boa correlação entre os valores dos FIT ainda pode ser observada a partir da comparação entre os caminhos de propagação da fissura. A relação entre K_I e K_{II} define o ângulo de propagação (Eq. (3)) e, conseqüentemente, o caminho pelo qual a fissura cresce. A Fig. 16 mostra os caminhos de propagação determinados tanto para o programa desenvolvido quanto pelo Franc2D.

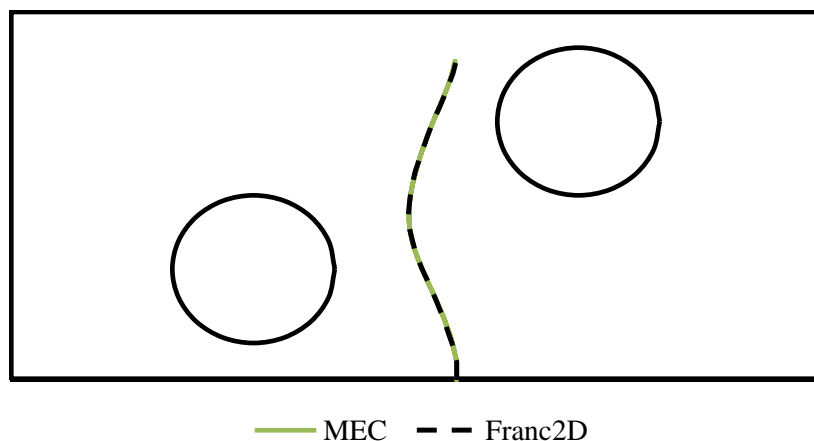


Figura 16 - Representação do caminho de propagação.

A partir da Fig. 16 é verificada uma excelente correspondência entre os caminhos de propagação obtidos por ambos os códigos computacionais. Tal correspondência está baseada na boa correlação existente entre os valores determinados para K_I e para K_{II} , conforme mostrado pela Fig. 14 e pela Fig. 15, respectivamente.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposto um modelo numérico para a análise de problemas de fratura frágil em meios isotrópicos bidimensionais. O método utilizado foi baseado no MECD, de modo a simular de maneira eficiente a propagação de fissuras no domínio da estrutura. O código desenvolvido é capaz de simular a interseção dos elementos de fissura com outros elementos da malha. Ele também considera, por meio de uma análise simplificada, o contato entre as faces da fissura a partir de um modelo de atrito infinito.

No primeiro exemplo avaliado, foi observada uma excelente correspondência entre as respostas do modelo proposto e os valores analíticos. Além disso, na segunda parte do exemplo, foi obtida uma resposta tipicamente frágil para o problema, como era esperado. Já para o exemplo de propagação em modo misto, os resultados determinados foram muito similares àqueles obtidos via Franc2D. Ademais, os caminhos de propagação obtidos por ambos os programas praticamente coincidiram.

O código até o momento implementado será estendido para a simulação do fenômeno de fadiga e propagação coesiva em meios multifissurados não homogêneos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pelo CNPq e pela FAPESP, projeto de pesquisa nº 2014/18928-2, sem o qual esta pesquisa não poderia ter sido realizada.

REFERÊNCIAS

- Aliabadi, M.H., 2002. *The Boundary Element Method: Application in solids and structures*. v.2. Wiley.
- Barsoum, R.S., 1976. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.10, n.1, pp.25-37.
- Belytschko, T. & Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.45, n.5, pp.601-620.
- Belytschko, T., Gu, L. & Lu, Y.Y., 1994. Fracture and crack growth by element free Galerkin methods. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v.2, n.3A, pp.519-534.
- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. & Krysl, P., 1996. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.139, pp.3-47.
- Chan, S.K., Tuba, I.S. & Wilson, W.K., 1970. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, v.2, n.1, pp.1-17.

- Cruze, T.A. & van Buren, W, 1971. Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with an edge crack. *International Journal of Mechanics*, v.7, pp.7-15.
- Erdogan, F. & Sih, G.C., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, v.85, pp.519-527.
- Griffith, A.A., 1920. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v.221, pp.163-198.
- Hong, H.K. & Chen, J.T., 1988. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, v.114, pp.1028-1044.
- Inglis, C.E., 1913. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. *Transaction of the Royal Institution of Naval Architects*, series A, v.221, pp.163-198.
- Irwin, G.R., 1957. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, pp.361-364.
- Isida, M., 1971. Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracks plates under various boundary conditions. *International Journal of Fracture Mechanics*, v.7, n.3, pp.301-316.
- Kitagawa, H., Okamura, H. & Ishikawa, H., 1978. Application of J-integral to mixed-mode crack problems. *Transactions of the JSME*. n. 780-4, pp. 52-54.
- McNeill, S.R., Peters, W.H. & Sutton, M.A., 1987. Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 28, n. 1, pp.101-112.
- Melenk, J.M. & Babuska, I, 1996. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.139, pp.289-314.
- Mi, Y. & Aliabadi, M.H, 1995. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.11, pp.167-177.
- Murakami, Y., 1987. *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press.
- Portela, A., 1992. *Dual boundary element incremental analysis of crack growth*. PhD thesis, Wessex Institute of Technology/Portsmouth.
- Portela, A., Aliabadi, M.H. & Rooke, D.P., 1992. Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.33, pp.1269-1287.
- Rice, J.R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, v.35, pp.379-386.
- Roux, S. & Hild, F., 2006. Stress intensity factor measurements from digital image correlation: post-processing and integrated approaches. *International Journal of Fracture*, v. 140, n.1, pp.141-157.
- Tada, H., Paris, P.C. & Irwin, G.R., 1985. *The stress analysis of cracks handbook*. 2^a ed. Paris Productions.
- Warwzynek, P. & Ingraffea, A., 1994. *Franc2D: a two-dimensional crack propagation simulator (Version 2.7 User's Guide)*. NASA Contractor Report 4572.
- Westergaard, H.M., 1939. Bearing pressures and cracks. *Journal of applied mechanics*, v.6, pp.49-53.