



## A MICROSTRUCTURAL ANALYSIS USING BEM FOR VISCOELASTIC MATERIALS

**Daniel Canongia Furtado**

**Adrián Alberto Betancur Arroyave**

**Carla Tatiana Mota Anflor**

[daniel.canongia@gmail.com](mailto:daniel.canongia@gmail.com)

[aabetanc@gmail.com](mailto:aabetanc@gmail.com)

[anflor@unb.br](mailto:anflor@unb.br)

Universidade de Brasília

Área Especial de Indústria e Projeção – Setor Leste - Prédio UED (Unidade de Ensino e Docência) - 1º Andar - Sala 35 - CEP: 72.444-240, Gama-DF

**Abstract.** *Composite materials are mixtures of two or more different materials, in order to improve the mechanicals properties. Mixtures of different materials can provide the appropriate behavior for a given solicitation. This behavior can be verified by the means of homogenization techniques. In this sense, the main goal of this work relies on establishing a homogenization methodology for viscoelastic composites using boundary elements method (BEM). For the homogenization process, was considered the average strain in each stress-strain curve. The experimental data were obtained from the literature. The representative volume element (RVE) was defined based on the calculated mean strains. For each volume element (EV) a twenty creep tests were conducted varying the positions of the microstructural heterogeneities. Mean, standard deviation and coefficient of variation (CV) were estimated for each EV. Finally, a graph of the number of inclusions  $\times$  coefficient of variation is presented for each test. The numerical final results showed good agreement with experimental data reported in the literature.*

**Keywords:** *Boundary Elements Method (BEM), Viscoelasticity, Representative volume elements (RVE), Effective elastic properties, Coefficient of variation (CV), Homogenization.*

## 1 INTRODUÇÃO

Materiais compósitos são materiais cuja estrutura é formada por dois ou mais materiais, de modo que suas propriedades mecânicas sejam superiores às dos materiais que agem de forma em separado (Aboud et al., 2013; Daniel, 1994).

Em análises microscópicas, cada material constituinte do material compósito é chamado de fase. Uma das fases é contínua e responsável por manter todo o material conectado, faz o papel de ligante e é chamada de matriz. As outras fases podem ser contínuas ou descontínuas, são seguradas pela matriz e são chamadas de reforço ou inclusões (Aboud et al., 2013; Daniel, 1994).

As propriedades dos materiais compósitos dependem de sua matriz e inclusões. Por isso, para analisar seu comportamento, é necessário realizar uma análise microestrutural. Essa análise leva em consideração tanto os materiais constituintes, quanto suas disposições para prever o comportamento efetivo do compósito (Aboud et al., 2013).

Entretanto, segundo Souza (2005), a realização de uma modelagem do compósito como um meio totalmente heterogêneo se torna inviável, visto que o tamanho das inclusões é muito inferior ao tamanho de uma peça produzida com o compósito.

Para contornar esse problema, pode-se aproximar um meio heterogêneo por um meio homogêneo se, para esse novo meio, o tamanho das heterogeneidades seja considerado pequeno com relação ao tamanho da peça em análise. Esse processo é conhecido como homogeneização (Souza, 2005).

Com isso, o objetivo desse artigo é estabelecer uma metodologia de homogeneização para compósitos viscoelástico utilizando o método dos elementos de contorno (MEC). No presente trabalho foi utilizado um compósito constituído de uma mistura asfáltica do tipo Areia Asfalta Usinada a Quente (AAUQ). Esse tipo de material é amplamente utilizado nos concretos asfálticos para pavimentação. Para o processo de homogeneização, foi considerado o deslocamento médio em cada um dos ensaios de tensão-deformação do AAUQ submetido a um ensaio de fluência.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Nesta seção é apresentado o comportamento de materiais viscoelástico, o MEC e a técnica de homogeneização utilizada.

### 2.1 Materiais Viscoelástico

O termo viscoelástico refere-se a materiais cujo comportamento é intermediário aos sólidos hookeanos (puramente elástico) e líquidos newtonianos (puramente viscoso). Com isso, esse tipo de material possui simultaneamente propriedades elásticas e viscosas, Sotiro (2007), conforme apresentado na Eq. (1).

$$\text{Sólido Elástico} \quad \text{Fluido Viscoso} \quad \text{Sólido Viscoelástico} \\ \sigma^e = C\varepsilon^e \quad + \quad \sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^v \quad = \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\varepsilon}}(t) \quad (1)$$

onde  $\sigma^e$ ,  $\varepsilon^e$ ,  $\sigma^v$ ,  $\dot{\varepsilon}^v$  são, respectivamente, a tensão elástica, deformação elástica, tensão viscosa, derivada da deformação viscosa,  $C$  é o tensor constitutivo elástico,  $\eta$  é o tensor

constitutivo viscoso e  $L$  é uma transformação que associa cada histórico de deformações a um histórico de tensões. Equação deste tipo, em que há uma dependência explícita do histórico das variáveis envolvidas, são conhecidas como equações hereditárias.

A descrição e previsão das condições de repouso ou movimento dos corpos descritos por este tipo de equações, sob ação de forças, deu origem a mecânica hereditária, que modernamente passou a ser chamada de teoria da viscosidade (Gurtin e Sternberg, 1962).

Um material viscoelástico linear possui um comportamento mecânico dependente do tempo, conforme mostrado na Eq. (1). Segundo Pagliosa (2004), esse comportamento pode ser manifestado pela deformação de fluência e pela relaxação de tensão.

Para o caso da fluência, é aplicada ao material uma tensão constante e este exhibe uma deformação dependente do tempo superior a uma deformação elástica inicial. No caso da relaxação, o material é submetido a uma deformação constante e, com isso, ocorre uma relaxação de tensão que depende do tempo. Para representar o comportamento mecânico de um material viscoelástico a longo prazo, é necessário estabelecer a equação constitutiva do material, determinando-se seus parâmetros através de ensaios de fluência ou relaxação obtidos experimentalmente. Também é possível obter esses parâmetros a partir de modelos reológicos, que aproximam o comportamento do material a arranjos de molas e amortecedores viscosos.

### 2.1.1 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt

Como dito anteriormente, pode-se aproximar o comportamento do material por combinações de elementos de molas, e de amortecedores para representar o comportamento elástico e viscoso, respectivamente.

O comportamento viscoelástico pode ser simulado a partir da associação em paralelo de uma mola com um amortecedor, conforme ilustrado na Fig. 1. Essa aproximação é conhecida como modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

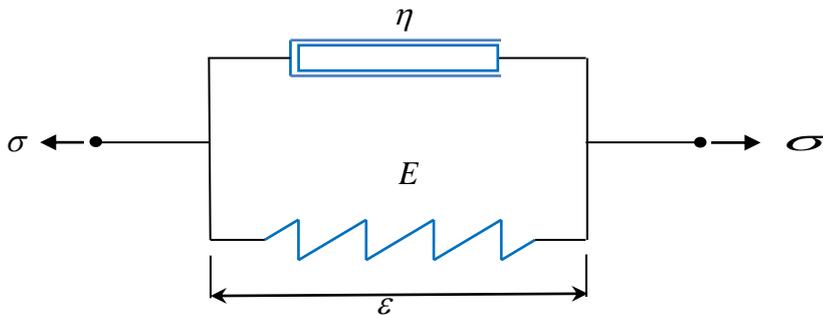


Figura 1. Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt

Por se tratar de uma associação em paralelo, a deformação total é equivalente à deformação elástica na mola e à deformação viscosa no amortecedor, conforme apresentado na Eq. (2). A tensão total é equivalente à soma das tensões na mola e no amortecedor, conforme descrito na Eq. (3) (Anacleto, 2010).

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (2)$$

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (3)$$

A partir das Eq. (2) e Eq. (3), a tensão pode ser reescrita conforme a Eq. (4) ou, de forma generalizada para um modelo tridimensional conforme Eq. (5).

$$\sigma = C\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (5)$$

O tensor constitutivo elástico  $C_{ijkl}$  e o tensor constitutivo viscoso  $\eta_{ijkl}$  são dados pelas Eq. (6) e Eq. (7) respectivamente.

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \quad (6)$$

$$\eta_{ijkl} = \theta_\lambda\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \theta_\mu\mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \quad (7)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé,  $\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são os parâmetros viscosos hidrostático e desviatório e  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker, Eq. (8).

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

É importante salientar que  $\lambda, \mu, \theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são parâmetros do material determinados experimentalmente. Assumindo a simplificação apresentada na Eq. (9), na qual os parâmetros viscosos são equivalentes a constante constitutiva viscosa  $\gamma$ , pode-se escrever a relação entre os tensores constitutivos segundo a Eq. (10).

$$\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma \quad (9)$$

$$\eta_{ijkl} = \gamma C_{ijkl} \quad (10)$$

Com isso, a relação constitutiva para análises viscoelásticas é dada pela Eq. (11).

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} + \gamma\dot{\varepsilon}_{kl}) \quad (11)$$

## 2.2 Método dos elementos de contorno

O MEC é um método computacional utilizado para a obtenção da solução de problemas de valor de contorno descritos por formulações integrais. Consiste, segundo Brebbia (1987) e Aliabadi (2002), na aquisição das equações integrais somente considerando as informações contidas no contorno do material, ou seja, uma discretização apenas no contorno. Com isso, há uma redução de uma ordem da dimensão do problema, por exemplo, na análise de um problema bidimensional de mecânica dos sólidos, o problema se reduz à análise no contorno unidimensional, por outro lado, se o problema é tridimensional, a análise se reduz a um contorno bidimensional representado pela respectiva superfície.

Segundo Carbone (2007), a primeira análise do MEC é feita com os valores de forças de superfície e deslocamentos para os nós dos elementos discretizados no contorno. Para realizar essa análise é necessário o conhecimento prévio de uma solução particular do problema, a qual é conhecida como solução fundamental. Posteriormente, os resultados em qualquer ponto do contorno são obtidos através da interpolação, dos valores adquiridos na primeira análise, em cada um dos elementos.

Para a obtenção da solução fundamental no caso de análise de tensões, deve-se considerar que uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto  $P$  de um domínio infinito e homogêneo. A solução fundamental dos deslocamentos  $u_{ij}^*$  e forças de superfícies  $t_{ij}^*$  para problemas bidimensionais podem ser escritas segundo as Eq. (12) e Eq. (13), respectivamente.

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (12)$$

$$t_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{dr}{dn} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (13)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $\mu$  é a segunda constante de Lamé,  $n$  é a componente normal no ponto onde a força de superfície  $t_{ij}^*$  é medida,  $r$  é a distância entre o ponto em que  $u_{ij}^*$  e  $t_{ij}^*$  são observados e o ponto  $P$  e  $r_{,i} r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j}$ .

## 2.2.1 Formulação integral viscoelástica do MEC

A demonstração da formulação integral viscoelástica do MEC utilizando o modelo de Kelvin-Voigt apresentada a seguir foi realizada com base no artigo de Mesquita e Coda (2002).

### 2.2.1.1 Deslocamento

O equilíbrio de forças de um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$  pode ser expressa conforme a Eq. (14).

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (14)$$

Utilizando a técnica dos resíduos ponderados para integrar a Eq. (14) e adotando a solução fundamental de Kelvin como sendo uma função residual da Eq. (14), resulta a Eq. (15).

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (15)$$

Aplicando o teorema da divergência no primeiro termo da Eq. (15), resulta a Eq. (16).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (16)$$

onde  $\Gamma$  é o contorno do problema analisado. Sabe-se que  $\sigma_{ij} n_j = p_i$  e  $u_{ki,j}^* \sigma_{ij} = \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}$ , onde  $\varepsilon_{kij}^*$  é a deformação fundamental. Com isso, a Eq. (16), pode ser escrita conforme a Eq. (17).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (17)$$

A Eq. (17) é o ponto inicial para obtenção da representação da integral viscoelástica. Impondo a relação constitutiva apresentada na Eq. (11) à Eq. (17), tem-se a Eq. (18).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ijlm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (18)$$

Sabe-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ijlm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (20)$$

Com isso, a Eq. (18) é reescrita conforme a Eq. (21).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (21)$$

Integrando o segundo e terceiro termo por partes, tem-se a Eq. (22).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (22)$$

Lembrando que o equilíbrio fundamental de Kelvin é dado por  $\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p, s) \delta_{ki}$ , onde  $\delta(p, s)$  é a distribuição do Delta de Dirac,  $s$  é o ponto do domínio e  $p$  é o ponto fonte. Aplicando o equilíbrio fundamental de Kelvin à Eq. (22), considerando as propriedades do Delta de Dirac e que  $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ , tem-se a Eq. (23).

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (23)$$

O termo  $\bar{C}_{ki}$  é o mesmo obtido na formulação elasto-estática e, segundo Mesquita e Coda (2002), pode ser encontrado em referências clássicas sobre MEC como Brebbia et al. (1984).

A Eq. (23) é a equação integral viscoelástica alternativa do modelo de Kelvin-Voigt. Admitindo que não haja forças de volume  $b_i = 0$  e tampouco sua variação com o tempo  $\dot{b}_i = 0$ , a equação se resume a Eq. (24).

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (24)$$

### 2.2.1.2 Tensões internas

Primeiramente é necessário escrever a integral dos deslocamentos para os pontos internos, que é dada conforme Eq. (25).

$$u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (25)$$

A relação entre deslocamentos e deformações considerando pequenas deformações é dada de acordo com a Eq. (26).

$$\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2} (u_{k,e} + u_{e,k}) \quad (26)$$

Aplicando a Eq. (26) na Eq. (25), resulta a Eq. (27).

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \varepsilon_{kie}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kie}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kie}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (27)$$

A tensão total é obtida aplicando a equação constitutiva apresentada na Eq. (11) à Eq. (27), com isso tem-se a Eq. (28).

$$\sigma_{pq}^e(p) + \sigma_{pq}^v(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{piq}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (28)$$

Aplicando a Eq. (3) à Eq. (28), resulta a Eq. (29).

$$\sigma_{pq}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{piq}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{piq}^* \dot{u}_i d\Gamma \quad (29)$$

Utilizando a igualdade apresentada na Eq. (30), conforme mostrado em Mesquita e Coda (2002), pode-se reescrever a Eq. (3) conforme a Eq. (31).

$$\sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} \quad (30)$$

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij} = 0 \quad (31)$$

### 2.2.1.3 Formulação Matricial do MEC

Aproximando as variáveis do problema a partir de uma parametrização com relação aos seus valores nodais e utilizando as funções de forma, é possível obter a equação matricial para os deslocamentos, conforme Eq. (32).

$$\underline{H}\underline{u}(t) + \gamma \underline{H}\dot{\underline{u}}(t) = \underline{G}\underline{P}(t) \quad (32)$$

As tensões podem ser escritas segundo Eq. (33).

$$\underline{\sigma}(t) = \underline{G}'\underline{P}(t) - \underline{H}'\underline{u}(t) - \gamma \underline{H}'\dot{\underline{u}}(t) \quad (33)$$

onde  $t$  representa o tempo e  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  são as matrizes que contêm todos os coeficientes de integração do contorno. A Eq. (33) pode ser resolvida numericamente adotando uma aproximação linear do tempo conforme Eq. (34).

$$\dot{\underline{u}}_{s+1} = \frac{\underline{u}_{s+1} - \underline{u}_s}{\Delta t} \quad (34)$$

Aplicando a Eq. (34) na Eq. (32), resulta a Eq. (35).

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) \underline{H}\underline{u}_{s+1} = \underline{G}\underline{P}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \underline{H}\underline{u}_s \quad (35)$$

A Eq. (35) é o sistema de equação que deve ser resolvida ao longo do tempo para encontrar os valores dos deslocamentos no contorno, utilizando o modelo de Kelvin-Voigt. Para calcular as tensões totais nos pontos internos, a Eq. (33) pode ser escrita no instante  $t_{s+1}$  conforme a Eq. (36).

$$\underline{\sigma}_{s+1} = \underline{G}'\underline{P}_{s+1} - \underline{H}'\underline{u}_{s+1} - \gamma \underline{H}'\dot{\underline{u}}_{s+1} \quad (36)$$

Assumindo a aproximação linear da Eq. (37) e substituindo na Eq. (31), resulta a Eq. (38).

$$\dot{\underline{\sigma}}_{s+1}^e = \frac{\underline{\sigma}_{s+1}^e - \underline{\sigma}_s^e}{\Delta t} \quad (37)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e = \frac{\underline{\underline{\sigma}}_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \underline{\underline{\sigma}}_s^e}{1 + \frac{\gamma}{\Delta t}} \quad (38)$$

As tensões viscosas nos pontos internos serão dadas de acordo com a Eq. (39).

$$\underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^v = \underline{\underline{\sigma}}_{s+1} - \underline{\underline{\sigma}}_{s+1}^e \quad (39)$$

### 2.3 Homogeneização

Para modelar o comportamento de um material é importante definir qual escala de observação será utilizada, pois, segundo Stroven et al. (2004), todo material pode ser dito heterogêneo quando a escala de observação é suficientemente pequena e, esse mesmo material, pode ser considerado como homogêneo quando a escala de observação é suficientemente grande, Fig. 2.

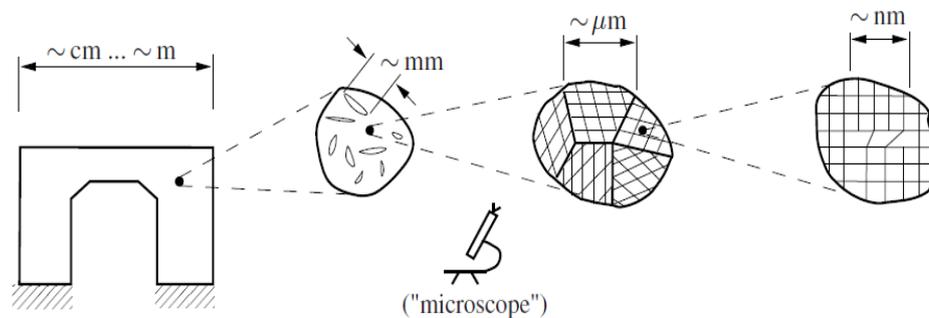


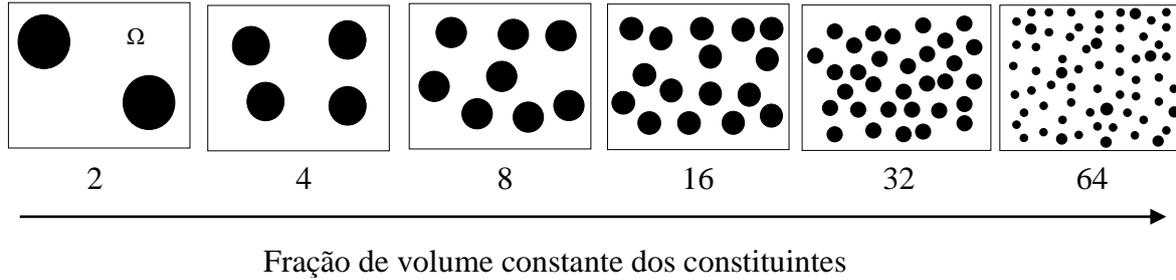
Figura 2. Níveis microscópicos da escala. Fonte: Ling (2006)

Com isso foi definido que, a menor escala de análise é chamada de microescala ou mesoescala e a maior macroescala. Em uma análise de microescala, considerando o material como totalmente heterogêneo, a modelagem do material se torna inviável, pois o tamanho das inclusões é muito inferior ao tamanho de uma peça produzida com o compósito (Souza, 2005).

Para contornar esse problema, pode-se aproximar um meio heterogêneo por um meio homogêneo se, para esse novo meio, o tamanho das heterogeneidades seja considerado pequeno com relação ao tamanho da peça em análise (Sotiro, 2007). O processo descrito, no qual se utiliza um meio homogêneo para representar um meio heterogêneo, é chamado de homogeneização.

O meio homogêneo em questão pode ser representado por um elemento de volume representativo (EVR), que, segundo Hashin (1983), trata-se de um elemento grande o suficiente para conter as informações da microestrutura representada e muito menor que o material visto na escala macroscópica.

Geralmente não existe um procedimento padrão para determinar, de forma direta, as dimensões do EVR e sua porcentagem de heterogeneidades. Porém, o EVR pode ser determinado através de procedimentos numéricos. Um desses procedimentos é incrementar o número de heterogeneidades em um Elemento de Volume (EV) determinado, mantendo constantes suas frações de volume, conforme ilustrado na Fig. 3.



**Figura 3. EVR variando a quantidade de inclusões ao interior do EV**

Stroven et. al. (2004) estima o EVR a partir de análises estatísticas em cada elemento de volume calculado, para medir as flutuações das propriedades que se deseja medir no material macroestrutural. Para tal procedimento pode ser utilizado diversas propriedades, tais como, módulo de Young, tensões, deformações e fator de concentração.

Neste método, para cada série de  $n$  amostras, são calculadas a média ( $\bar{x}$ ) e o desvio padrão ( $s$ ) da propriedade que se deseja medir, conforme as Eq. (40) e Eq. (41), respectivamente.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (40)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i - \bar{x}^2 \quad (41)$$

onde  $x_i$  representa o valor da propriedade da amostra  $i$ . Com isso, é possível calcular a precisão ou o coeficiente de variação ( $CV$ ), que será obtido através da relação do desvio padrão com a média.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad (42)$$

A Eq. (42) estima o grau de repetitividade entre os valores obtidos ou a flutuação da propriedade medida com respeito ao valor médio. Portanto, será considerado o EVR a amostra na qual seja verificado a homogeneidade estatística em suas propriedades homogeneizadas.

### 3 MATERIAL E MÉTODO

Nesta seção será apresentado o material utilizado, assim como o método de determinação do EVR.

#### 3.1 Material

Para o processo de homogeneização, o material utilizado foi uma mistura asfáltica do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ), que são utilizadas nos concretos asfálticos para pavimentação. Mesmo material utilizado por Souza (2005).

Segundo Souza (2005), o AAUQ é constituído da mistura do Cimento Asfáltico de Petróleo (CAP), que possui um comportamento viscoelástico e também é conhecido como

ligante asfáltico, com os agregados (areia de campo), constituído de frações de granulometria média e fina. Essa mistura é realizada de modo a gerar um material com características intermediárias entre esses materiais.

### 3.2 Método

A simulação numérica para a homogeneização foi realizada adotando-se as inclusões como furos circulares. Para a discretização da malha foram utilizados elementos de contorno quadráticos descontínuos. O raio ( $r$ ) característico para todas as inclusões e a porcentagem de inclusões foram determinados a partir de uma análise dos elementos de volume determinados em Souza (2005) e, com isso, o raio utilizado foi de 0.24 mm e a porcentagem de inclusões utilizada foi de 30% do volume total do material.

A partir do raio e porcentagem das inclusões, foi calculado o comprimento do domínio quadrado ( $L$ ) em função da quantidade de inclusões, Eq. (43). Esse parâmetro varia com o aumento do número de inclusões, pois, a sua porcentagem em relação ao volume total deve permanecer constante.

$$L = \sqrt{\frac{\pi r^2 n^{\circ}_{\text{inclusões}}}{30\%}} \quad (43)$$

As inclusões foram geradas de forma aleatória para todas as quantidades de inclusões ( $n^{\circ}_{\text{inclusões}}$ ). O número de inclusões foi variado de 1 em 1 até 40. Para evitar singularidades no MEC, foi imposto ao processo de randomização que as inclusões não poderiam ficar em contato com as extremidades da placa nem em contato entre si. Para essa última condição, foi determinada uma distância mínima entre as inclusões a partir do parâmetro característico ( $r/d$ ) encontrado através de uma análise estatística do EV de Souza (2005). Na Fig. 4 é mostrado um exemplo da distribuição das inclusões geradas aleatoriamente para o caso de 40 inclusões. A discretização foi desenvolvida utilizando 14 elementos no contorno exterior e 4 elementos por cada inclusão.

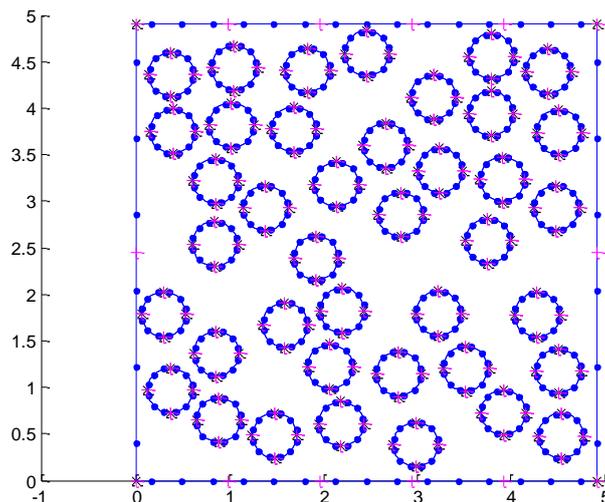


Figura 4. Domínio com 40 inclusões

## 4 RESULTADOS

Primeiramente foi realizada uma validação do código numérico do MEC para o modelo de fluência utilizado. Para isso, foi simulada uma placa em estado plano de tensão submetida a um ensaio de fluência. Esse ensaio consiste na aplicação de forças de superfície constantes ao longo do tempo. Empregando os modelos de Kelvin, foi modelada uma chapa submetida à tensão uniaxial tal como é apresentado na Fig. 5.

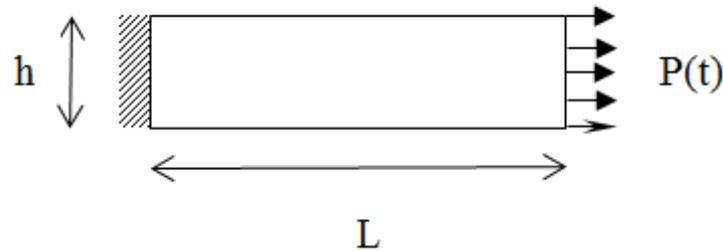


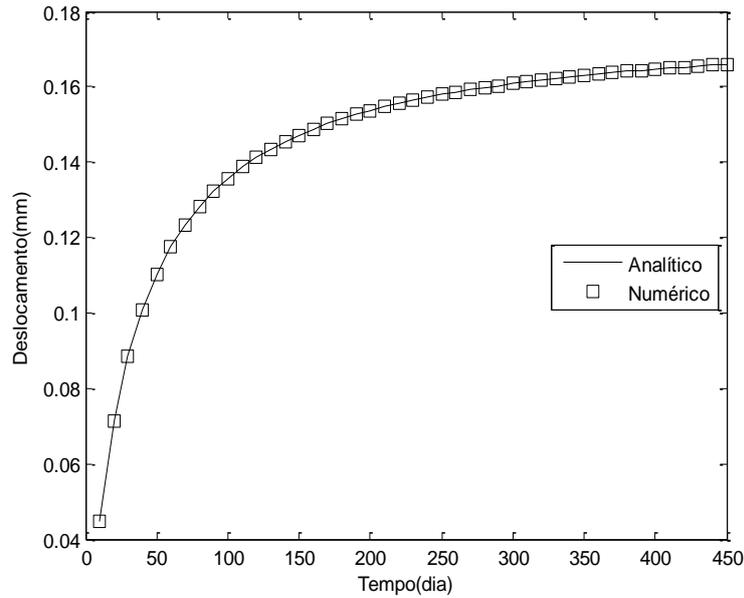
Figura 5. Exemplo para validação do código

Na Tabela 1 estão descritos os parâmetros e propriedades utilizados nesta análise.

Tabela 1. Parâmetros utilizados

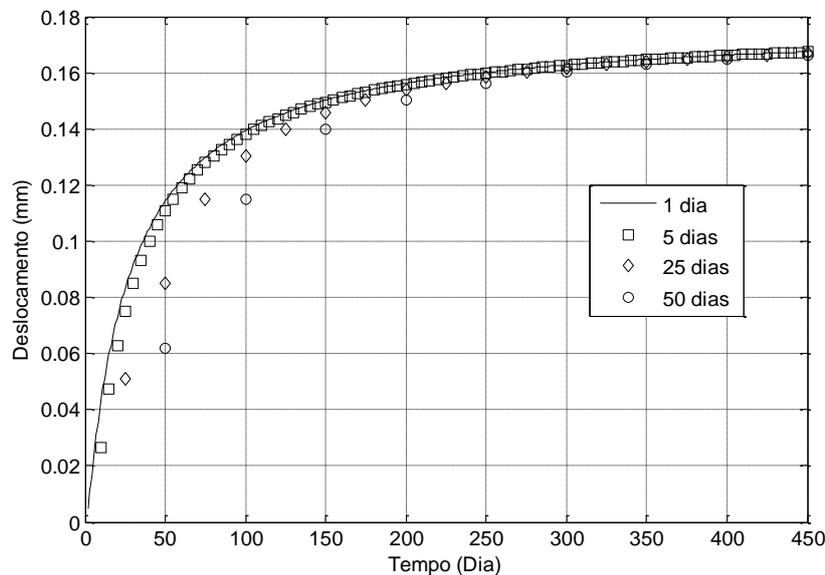
Parâmetros	Nomenclatura	Valor
Módulo de Elasticidade	E	22.5757 kN/mm <sup>2</sup>
Parâmetro temporal de viscosidade	$\gamma$	45.4545 dias
Coefficiente de poisson	$\nu$	0.08
Comprimento da placa	L	800 mm
Altura da placa	h	100 mm
Carregamento	P(t)	0.005 kN/mm <sup>2</sup>
Tempo total	t	450 dias

O gráfico da Fig. 6 mostra a comparação dos deslocamentos da extremidade solicitada obtidos a partir da simulação numérica com a solução analítica. Pode-se verificar que os resultados são praticamente os mesmos.



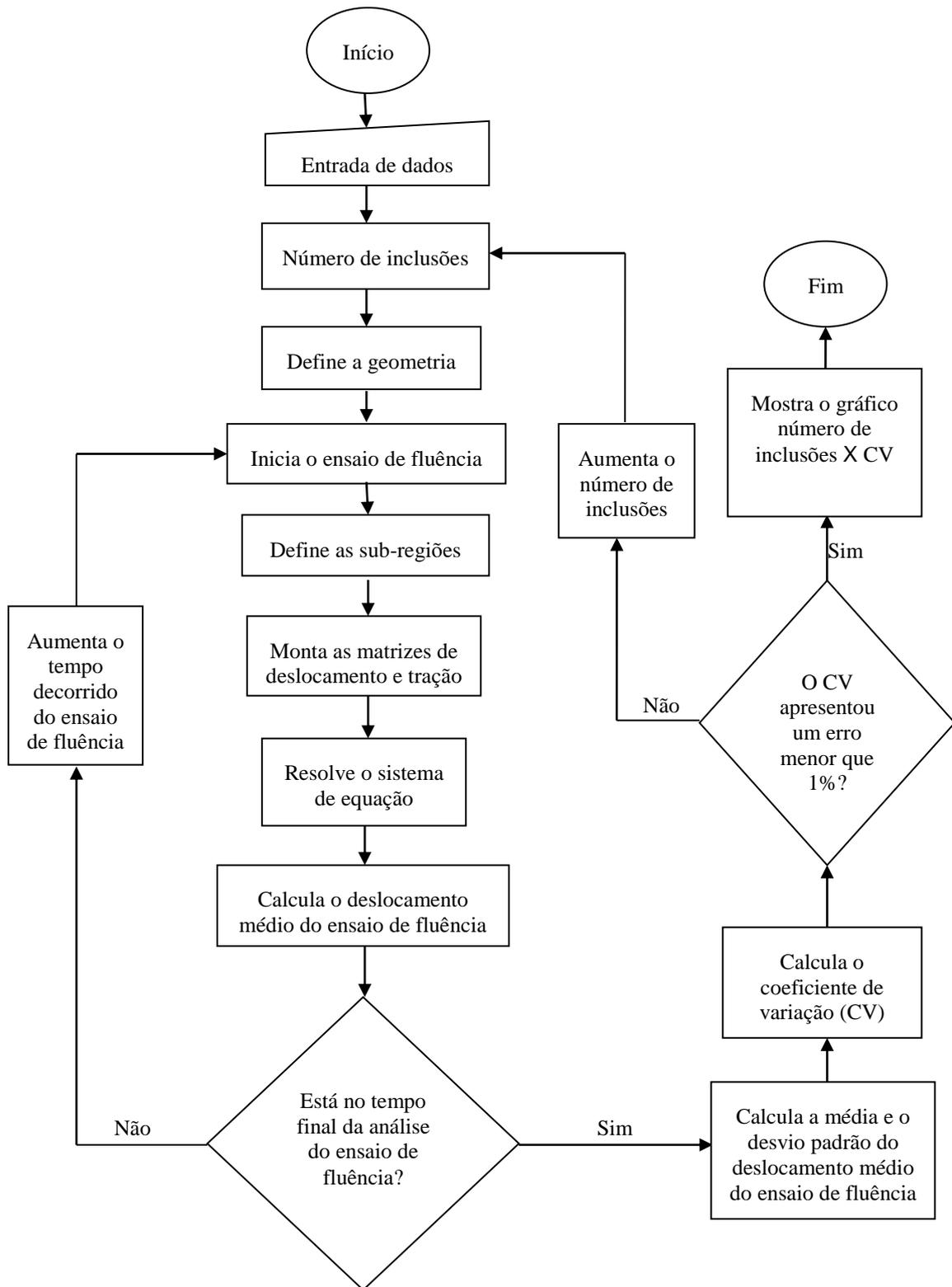
**Figura 6. Comparação resultados numéricos e analíticos**

Depois de confirmado que o modelo apresenta resultados satisfatórios, foi realizada uma análise de estabilidade do método para verificar a influência do passo de tempo da análise nas simulações. Para isso, foi realizada a mesma análise feita anteriormente, mas com intervalos de tempo cada vez maiores (1, 5, 25, e 50 dias). Foi verificado que o método é estável, pois independente do passo de tempo utilizado, os resultados convergiram. Tal resultado pode ser verificado no gráfico da Fig. 7.



**Figura 7. Resultado dos deslocamentos em função de diferentes passos de tempo**

Com os resultados obtidos no caso de validação, pôde-se implementar o processo de homogeneização. O fluxograma do código utilizado para a implementação do processo de homogeneização é mostrado na Fig. 8.



**Figura 8. Fluxograma do código**

Esse processo foi realizado a partir dos ensaios do histórico de fluência das amostras viscoelásticas. Para isso, a média dos deslocamentos obtidos nos históricos de fluência foi utilizada como propriedade efetiva para chegar ao EVR adequado. Para cada EV foram

realizados 20 ensaios de fluência, variando em cada ensaio a distribuição das heterogeneidades. Foi estimada para cada EV a média, o desvio padrão e o coeficiente de variação segundo as Eq. (40), Eq. (41) e Eq. (42), respectivamente. O gráfico do número de inclusões  $x$  coeficiente de variação para cada um dos ensaios é apresentado na Fig. 9.

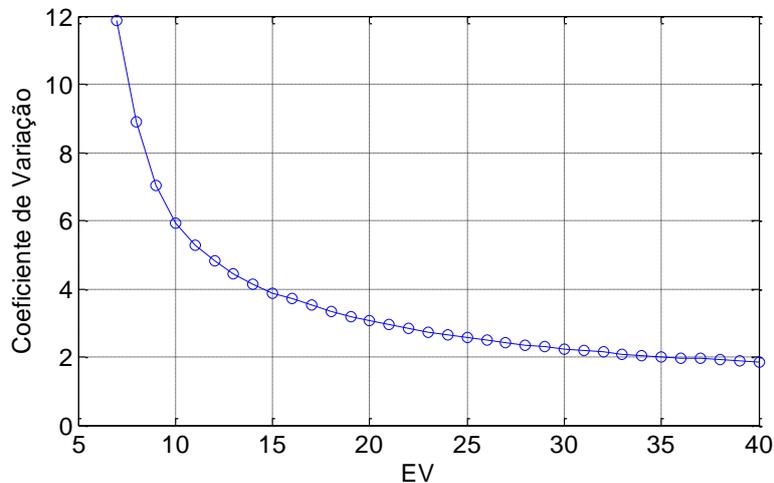


Figura 9. Coeficiente de variação do material viscoelástico

Com isso, pode-se observar que a partir de 35 inclusões o coeficiente de variação é de aproximadamente 2, apresentando um erro menor que 1%. Isso mostra que as propriedades efetivas para os EVs com mais de 35 inclusões não possuem variações significativas. Logo, o EVR com 35 inclusões é um tamanho representativo do AAUQ. As dimensões, usando a Eq. (43), para este EVR é de aproximadamente (4.6mm x 4.6mm) o que está de acordo com os resultados experimentais de Souza (2005). Também pôde ser observado que quanto menor o número de inclusões, maior é o coeficiente de variação do material. Isso significa que as amostras possuem muita variabilidade quando calculado as deformações médias.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizada uma metodologia para encontrar o elemento de volume representativo (EVR) de materiais heterogêneos com comportamento viscoelástico. Para tal, foram realizados procedimentos numéricos que consistiram em incrementar o número de heterogeneidades em um Elemento de Volume (EV) determinado, mantendo constantes suas frações de volume.

Como propriedade efetiva para encontrar o EVR foi utilizada a média dos deslocamentos nos históricos de fluência. Esses dados foram adquiridos a partir do método dos elementos de contorno (MEC), um método computacional utilizado para a obtenção da solução de problemas de valor de contorno (discretização apenas no contorno) descritos por formulações integrais.

O código numérico do MEC para o cálculo dos ensaios de fluência a partir do modelo de Kelvin-Voigh foi validado com resultados adquiridos analiticamente e, além disso, também foi verificado sua estabilidade, pois independente do passo de tempo utilizado, os resultados numéricos convergiram.

A partir do processo de homogeneização, o EVR encontrado para uma mistura asfáltica do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ) com raio das partículas dos agregados de 0.24 mm e esses agregados representando 30% do volume total do material foi o EV com 35 inclusões. Pela Eq. (43), pode-se determinar que o EVR possui dimensões de 4.6mm por 4.6mm, similar ao resultado experimental encontrado por Souza (2005). Também foi possível verificar que quanto maior o número de inclusões nos EV, maior foi o coeficiente de variação encontrado.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Grupo de Mecânica Experimental e Computacional (GMEC) e à CAPES pelo incentivo à pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

- Aboud, J., Arnold, S. M., Bednarczyk, B. A., 2013. *Micromechanics of Composite Materials a generalized multiscale analysis approach*. Elsevier
- Aliabadi M. H., 2002. *The Boundary Element Method*, First Ed. London, UK
- Anacleto F. E. S., 2010. *Análise Viscoelástica e Viscoplastica de Sólidos Bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais
- Brebbia C., 2002. *Boundary Elements an Introductory Course*, Second Ed.
- Carbone N., 2007. *Desenvolvimento de um Novo Algoritmo para Análise Viscoplastica com o Método dos Elementos de Contorno*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- Daniel I. M., 1994. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Oxford
- Gurtin M. E., Sternberg E., 1962. *On the Linear Theory of Viscoelasticity*. Arch, Rational Mech, Anal, Vol. 11. Brown University
- Hashin Z., 1983. *Analysis of Composite Materials*. ASME
- Ling F. F., 2006 *Mechanical Engineering Series*.
- Mesquita A. D, Coda H. B., 2000. Boundary Integral Equation Method for General Viscoelastic Analysis. *International Journal Solids Struct.*, vol 39, n° 9, pp. 2643-2664
- Pagliosa C., 2004. *Determinação Experimental de Propriedades Viscoelásticas de Material Polimérico*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina
- Sotiro, R. K., 2007. *Estudo da Estabilidade química, física e liberação in vitro da Eritromicina veiculada em sistemas Líquido-Cristalinos para Tratamento da Acne Vulgaris*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
- Souza, V. F., 2005. *Modelo Multi-Escala para Análise Estrutural de Compósitos Viscoelásticos suscetíveis ao dano*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Ceará
- Stroven M., Askes H., Sluys L. J., 2004. Numerical Determination of Representative Volumes for Granular Materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 193, pp. 3221-3238