



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

MODELAGEM E VISUALIZAÇÃO DE TRINCAS 2D USANDO EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO DUAL

Gilberto Gomes

Álvaro M Delgado Neto

ggomes@unb.br

alvaro.martins.bok@gmail.com

University of Brasilia, Department of Civil Engineering, 71910-900, Brasília-DF, Brazil

Luis C Wrobel

Luis.wrobel@brunel.ac.uk

Brunel University, School of Engineering and Design, Uxbridge – UK

Abstract. *The stress analysis structures with complex geometry where it is continuously amended by the crack growth, as in aircraft fuselages, usually requires the employment of numerical methods, since the presence of cracks in the structure raises difficulties for the modelling and, therefore, the calculation of the stress intensity factors. Therefore, both the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) have been applied in this type of analysis, with a slight advantage for the BEM due it does not require continuous remeshing, whenever the crack spreads. Here, the BEM will be used in the treatment of modelling crack considering two independent boundary integral equations, known as dual boundary element method (DBEM): the displacement equation applied for collocation on one of the crack boundary and remaining boundaries, and the traction equation applied for collocation on the opposite crack boundary. Moreover, boundary continuous and discontinuous quadratic elements are used, respectively, along the remaining boundaries of the problem domain and crack boundaries. Aiming to attest the efficiency and robustness of the method, a C++ program for treating cracks two-dimensional models with MATLAB interface for propagation path preview, as well as two applications of open literature, are used.*

Keywords: *dual boundary element, crack growth, modelling, oop*

1 INTRODUÇÃO

Na presença de um cenário de múltiplas trincas, como nos furos de rebite de uma fuselagem de aeronave, a interação existente entre elas depende dos pressupostos feitos para a geometria, localização, orientação e particularmente da proximidade das extremidades das trincas em função do seu comprimento. Isto levanta, no campo da mecânica da fratura, dificuldades ligadas à modelagem e ao cálculo dos fatores de intensidade de tensão.

Segundo de Lacerda e Wrobel (2001), independentemente do mecanismo físico envolvido, o processo de propagação de trinca, invariavelmente, exige a utilização de métodos numéricos incrementais para a sua análise e, neste sentido, se destacam os métodos de elementos finitos (MEF) e de elementos de contorno (MEC).

O MEF, cuja história em aplicações de mecânica da fratura é devido a Gallagher (1978), foi aplicado no processo de propagação de trinca, por exemplo, por Swenson e Ingraffea (1988) e por Kocer e Collins (1997). No entanto, na maior parte das formulações existe uma necessidade de remalhamento contínuo para seguir a extensão da trinca, que pode tornar este método bastante demorado.

O MEC também tem sido aplicado em análises incrementais de problemas de propagação de trincas, através da utilização de subregiões, ou, mais recentemente, utilizando uma formulação dual, conhecida como MECD (Bush, 1999; Ingraffea et al., 1983; Portela et al, 1993; de Lacerda e Wrobel, 2001). O MECD, tem se mostrado mais eficiente e não apresenta dificuldades de remalhamento como no MEF.

Neste trabalho, o uso de duas equações independentes (MECD) para permitir resolver problemas com trincas sem a necessidade de remalhamento, é proposto. E ainda, um programa de análise escrito em C++ para modelagem e análise de problemas envolvendo trincas bidimensionais, chamado BemCracker2D, bem como uma interface deste com o MATLAB, denominada BEMLAB2D, para pré- e pós-processamentos, atestam e validam a eficiência e robustez da técnica proposta.

O conteúdo deste trabalho está organizado nas seguintes seções: seção 2, uma breve descrição acerca das duas equações integrais de contorno, da estratégia adotada para modelagem de trincas e do critério de direção de crescimento da trinca; a automatização da modelagem de trincas é apresentada na seção 3; a geração da malha do modelo de trincas e os resultados visuais do caminho de propagação são vistos na seção 4; por fim, as considerações finais na seção 5. A contribuição deste trabalho consiste em apresentar um software que faz desde a modelagem em CAD, usando o BEMLAB2D, até a análise e visualização de problemas de trincas 2D com uso do programa BemCracker2D, ambos inseridos no paradigma da Programação Orientada a Objetos.

2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO DUAL

A solução de problemas envolvendo trincas, em geral, não pode ser alcançada em uma análise de uma única região com aplicação direta do método dos elementos de contorno convencional, porque a coincidência dos contornos da trinca produz um problema mal posto. Isso ocorre para um par de pontos fonte, coincidentes no contorno da trinca, onde as equações algébricas relativas a um dos pontos são idênticas às do ponto oposto, tendo em vista que a mesma equação integral de deslocamento é aplicada em ambos os pontos fonte, com mesmo caminho de integração e ao longo de todo o contorno do problema.

Para suprir essa dificuldade, o método de elementos de contorno dual (MECD) (Portela 1992; Aliabadi 2002) considera duas equações independentes, as equações integrais de contorno de deslocamento e de forças de superfície, com o mesmo caminho de integração para cada par de pontos fonte coincidente, porém com equações integrais de contorno distintas que, por conseguinte, originam equações algébricas independentes. Essas equações são detalhadas nas subseções seguintes.

2.1 Equação Integral de Deslocamento

A equação integral de deslocamento, aqui apresentada, segue o trabalho devido a Aliabadi (2002) que, na ausência de forças de corpo e assumindo continuidade de deslocamentos em um ponto x' do contorno, é dada por,

$$c_{ij}(x')u_j(x') + CPV \int_{\Gamma} T_{ij}(x',x)u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ij}(x',x)t_j(x) d\Gamma(x) \quad (1)$$

onde i e j são componentes cartesianas; $T_{ij}(x',x)$ e $U_{ij}(x',x)$ representam as soluções fundamentais de Kelvin para tração e deslocamento, respectivamente, em um ponto x do contorno. CPV denota a integral com Valor Principal de Cauchy, e $c_{ij}(x')$ os coeficientes dados por $\delta_{ij}/2$ para um contorno suave no ponto x' onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

As integrais da Eq. (1) são regulares porque a distância r , definida entre os pontos x' e x , é diferente de zero. Uma vez que r tende a zero, as soluções fundamentais podem apresentar singularidades fortes em T_{ij} de ordem $1/r$, e fracas em U_{ij} de ordem $\ln(1/r)$.

2.2 Equação Integral de Força de Superfície

Na ausência de forças e assumindo também continuidade nas deformações e força de superfície em x' sobre um contorno suave, as componentes de tensão σ_{ij} são dadas por,

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') + HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x',x)u_k(x) d\Gamma(x) = CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(x',x)t_k(x) d\Gamma(x) \quad (2)$$

Na Equação (2), HPV denota a integral com Valor Principal de Hadamard. Os tensores $S_{ijk}(x',x)$ e $D_{ijk}(x',x)$ contem derivadas de $T_{ij}(x',x)$ e $U_{ij}(x',x)$, respectivamente. Da mesma forma que a Eq. (1), quando r tende a zero, S_{ijk} apresenta uma hipersingularidade de ordem $1/r^2$, e D_{ijk} uma singularidade forte de ordem $1/r$.

Desta forma podemos escrever as componentes de tração t_j , sobre um contorno suave, como,

$$\frac{1}{2}t_j(x') + n_i(x')HPV \int_{\Gamma} S_{ijk}(x',x)u_k(x) d\Gamma(x) = n_i(x')CPV \int_{\Gamma} D_{ijk}(x',x)t_k(x) d\Gamma(x) \quad (3)$$

onde n_i representa a i -ésima componente do vetor normal unitário ao contorno, no ponto x' .

As Equações (1) e (3) constituem a base do chamado método dos elementos de contorno dual e serão aplicadas aqui com a mesma denotação do MEC, a saber, a de ponto de colocação e a de integração sobre os elementos de contorno, que levam a um sistema linear de equações algébricas, onde os desconhecidos, deslocamentos e forças de superfície, são obtidos sobre os pontos do contorno, dado por,

$$Hu=Gt \quad (4)$$

onde \mathbf{H} e \mathbf{G} contem as integrais referentes às soluções fundamentais T_{ij} e U_{ij} , respectivamente, dadas pela Eq. (1), ou às integrais S_{ijk} e D_{ijk} dadas pela Eq. (3), respectivamente. Os vetores \mathbf{t} e \mathbf{u} contem as componentes de tração e deslocamentos no contorno, respectivamente.

O sistema descrito pela Eq. (4) pode ser rearranjado na forma,

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{By}=\mathbf{f} \quad (5)$$

sendo \mathbf{x} , o vetor contendo os desconhecidos t_i e u_i , e \mathbf{y} o vetor com as condições de contorno $\bar{\mathbf{t}}_i$ e $\bar{\mathbf{u}}_i$. As matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são obtidas do rearranjo das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , na forma convencional do MEC.

2.3 Estratégia de Modelagem

A estratégia aplicada aqui, segue àquela apresentada por Portela et al (1993), na qual a trinca é representada por pequenos segmentos retos, conforme descrita abaixo e ilustrada no esquema da Fig. 1.

- A Equação (1), para deslocamentos, é aplicada por colocação em todo o contorno que não contém trincas, e em uma das faces das trincas;
- A Equação (3), para forças de superfície, é aplicada por colocação sobre a outra face das trincas;
- O contorno das trincas é modelado com elementos de contorno quadráticos e descontínuos;
- Na interseção entre uma trinca e uma aresta são usados elementos quadráticos semi-descontínuos;
- O restante do contorno do problema é modelado com elementos quadráticos contínuos.

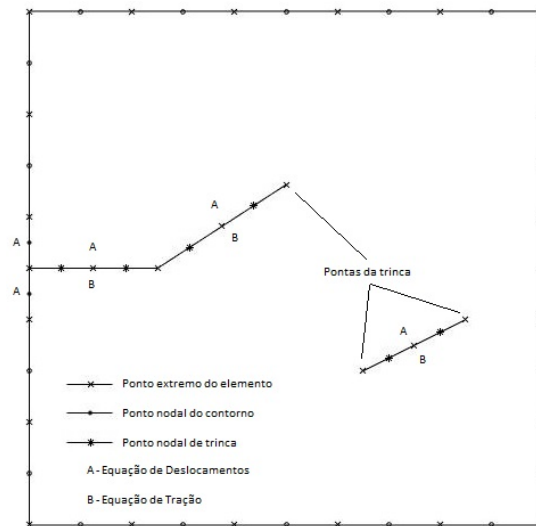


Figura 1. Esquema de modelagem de trincas com elementos de contorno quadráticos.

A estratégia apresentada acima é ideal para análise de problemas de propagação de trincas, onde uma análise incremental da extensão da trinca se faz necessária, que é o caso apresentado aqui. Assim, para cada incremento do avanço da trinca, um novo par de elementos é adicionado ao modelo sem necessidade de remalhamento, uma vez que a adição desses novos elementos implica somente na geração de novas equações e na atualização das variáveis desconhecidas com aquelas já existentes, causando menos modificações ao sistema de equações original. O esquema da Fig. 2 ilustra o procedimento mencionado, onde a

introdução de novos elementos de contorno ao longo do incremento de crescimento da trinca se traduz na adição de novas linhas e colunas ao sistema de equações original.

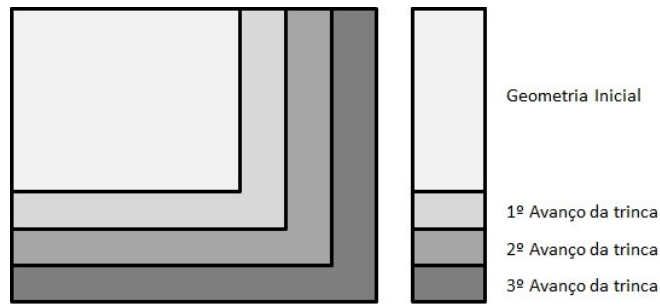


Figura 2. Esquema de representação da geração do sistema de equações a cada incremento.

2.4 Direção de Propagação da Trinca

Segundo Carvalho (1998), existem diversos critérios para utilização com os métodos numéricos na determinação da direção de crescimento de propagação da trinca no regime linear elástico, dentre eles, o critério da Tensão Principal Máxima. Este critério postula que a propagação de uma trinca ocorrerá segundo uma direção perpendicular à tensão principal máxima, isto é, a trinca se propaga na direção que maximiza a tensão circunferencial em uma região fechada na ponta da trinca.

Tendo em vista que esse critério se utiliza dos fatores de intensidade de tensão (FITs), na forma desacoplada, a técnica da Integral J, juntamente com a técnica de decomposição para desacoplamento dos FITs, devido a Aliabadi(2002), também foram implementadas aqui, considerando um caminho de contorno circular ao redor de cada ponta da trinca, como ilustrado na Fig. 3, cujo sistema de referência tem origem na ponta de uma trinca livre de tração. Essa técnica não será aqui apresentada por fugir do escopo do trabalho.

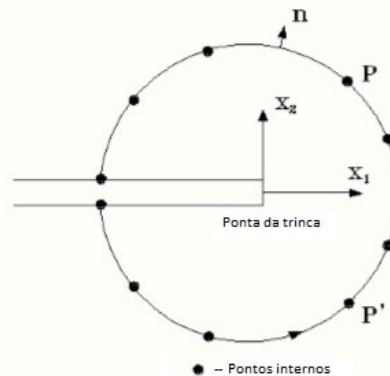


Figura 3. Esquema do caminho do contorno circular para Integral J.

Aqui, o critério da tensão principal máxima será empregado já que o mesmo descreve a direção local a partir da propagação da trinca considerando o modo misto dos FITs, calculados pela técnica da Integral J, como citado acima. Assim, segundo esse critério, a direção do crescimento local da trinca θ_l é determinada pela condição de nulidade da tensão cisalhante, isto é,

$$K_I \sin \theta_l + K_{II} (3 \cos \theta_l - 1) = 0 \quad (6)$$

onde, K_I e K_{II} são os FITs, respectivamente, modos de deslocamento de abertura (modo I) e de cisalhamento (modo II) na ponta da trinca. θ_l é uma coordenada angular centrada na ponta da trinca e medida do eixo da trinca a frente da ponta.

Na Figura 4, temos o esquema da direção do crescimento da trinca em uma análise incremental. Nesta, pode-se observar que o procedimento aplicado para definir a direção do n -ésimo incremento do crescimento da trinca requer uma correção, ângulo β , na direção tangente, $\theta_t(n)$, do caminho da trinca, devido ao critério de continuidade da equação (6). Ainda em relação à Fig. 4, verifica-se que quando o tamanho do incremento de crescimento da trinca Δa tende a zero, o ângulo $\theta_t(n+1)$ também tende a zero, e assim é feita a correção do ângulo β , isto significa que no limite, a direção do incremento de crescimento da trinca tende a direção da tangente do caminho contínuo da trinca.

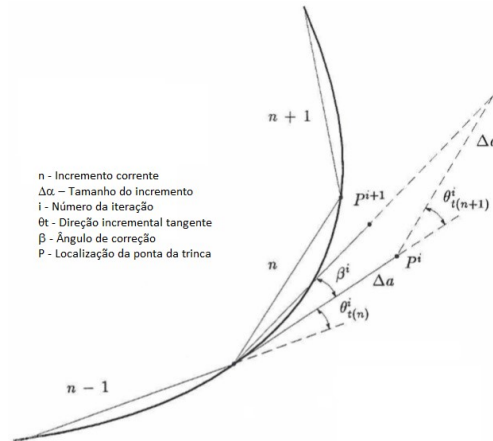


Figura 4. Esquema da direção incremental do crescimento da trinca (Aliabadi 2002, In English).

3 AUTOMATIZAÇÃO DA MODELAGEM DE TRINCAS

A estratégia da modelagem de propagação de trincas adotada neste trabalho é baseada em uma análise incremental do crescimento da trinca, cujo caminho é discretizado por pequenos segmentos retos e, para cada incremento, o MEC é aplicado para realizar uma análise de tensão da estrutura e a Integral J é usada para computar os FITs, que são avaliados pela equação (6) para correção e definição da direção do caminho de crescimento da trinca.

Automatizar essa estratégia significa descrever toda a geometria do modelo bidimensional da estrutura trincada e atribuir a este modelo uma malha de elementos de contorno, seus atributos físicos, como carga e condições de apoio, bem como propriedades do material. Esta descrição geométrica consiste de um conjunto de elementos quadráticos, contínuos e descontínuos, que definem: o contorno das regiões do modelo de trincas, as condições de contorno associadas aos elementos e os parâmetros do domínio associados às regiões.

Neste aspecto, a estratégia adotada foi implementada no programa BemCracker2D, um robusto programa acadêmico escrito em C++, ainda em fase de desenvolvimento, voltado para análise de problemas elastostáticos com o MEC, que possui uma interface gráfica de pré- e pós-processamentos chamada BEMLAB2D, escrita em MATLAB. As subseções seguintes fazem uma breve descrição da automatização pelos programas citados.

3.1 Sobre o BemCracker2D

O programa BemCracker2D foi escrito em linguagem C++ e fundamentado nos conceitos da Programação Orientada a Objetos (POO) para análise de problemas elastostáticos bidimensionais, via método dos elementos de contorno, que envolve 3 módulos de processamento, a saber:

- MEC padrão (módulo I);
- MECD Sem Propagação (módulo II);
- MECD Com Propagação (módulo III)
 - Análise de Tensões com MEC
 - Avaliação de FITs (Integral J)
 - Avaliação da Direção/Correção do crescimento da trinca (Critério de Tensão Máxima)
 - Avaliação de Vida à Fadiga (Lei de Paris)

Este trabalho se limita a apresentar o módulo III e os três primeiros procedimentos, cujo acesso é feito a partir de uma ferramenta botão da interface BEMLAB2D explicado no item 3.2. Cabe ressaltar que o programa BemCracker2D é baseado em Gomes(2000, 2006) no que diz respeito à modelagem do MEC padrão (equação de deslocamento e uso de elementos quadráticos contínuos) e na estratégia da análise incremental devido a Aliabadi (2002).

Inserido no contexto da POO (Booch, 1994), o programa BemCracker2D é baseado no diagrama de classes ilustrado na Fig. 5, onde *BemCrk_BEMSYS* é a classe motora do programa e principal elo de ligação com a interface BEMLAB2D.

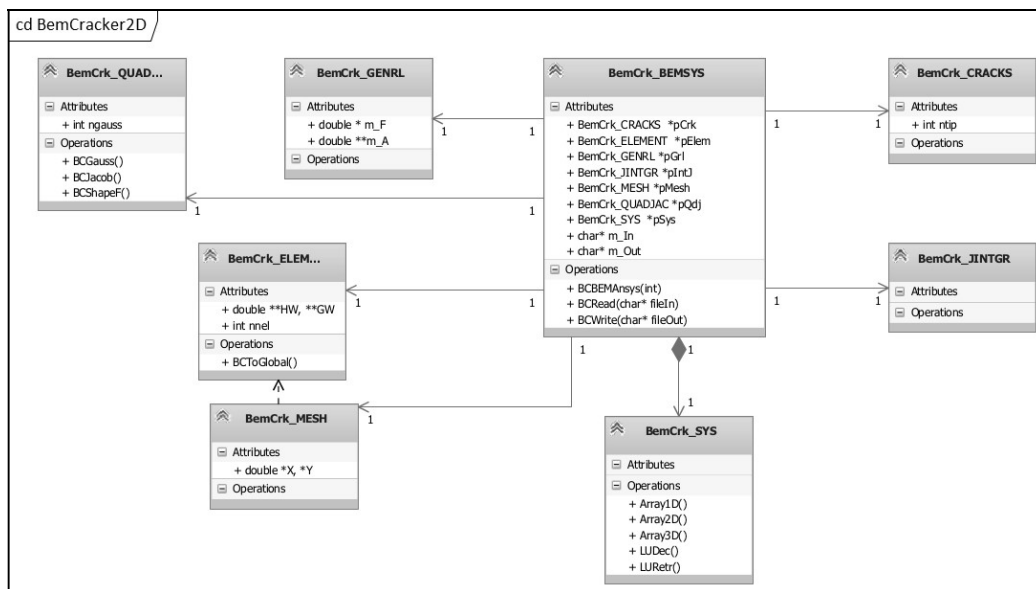


Figura 5. Diagrama de Classes do programa BemCracker2D.

A Tabela 1 resume a finalidade de cada classe esquematizada no diagrama de classes da Fig. 5, bem como suas respectivas instâncias/objetos, objetivando o entendimento da estratégia da análise incremental do crescimento da trinca, descrita na seção 2.3, que foi implementada segundo o diagrama de seqüências da Fig. 6.

Tabela 1. Principais classes, instâncias e finalidades.

Classe	Instância/objeto	Finalidade
BemCrk_BEMSYS	bem	Leitura, Análise, Solução e Impressão do modelo de trinca
BemCrk_GENRL	grl	Montagem do sistema $Ax=By=f$
BemCrk_ELEMENT	elem	Montagem do elemento quadrático contínuo e descontínuo (C/D)
BemCrk_MESH	mesh	Montagem da malha do elemento (C/D)
BemCrk_QUADJAC	quad	Gerar pontos de Gauss, Jacobiano e Funções de Forma (C/D)
BemCrk_CRACKS	crk	Montagem do incremento de crescimento de trinca

BemCrk_JINTGR	jint	Gerar Fatores de Intensidade de Tensão
BemCrk_SYS	sys	Alocação de arrays e Solver LU

Figura 6. Diagrama de sequência do crescimento da trinca.

3.2 Sobre o BEMLAB2D

O BEMLAB2D é uma interface gráfica do tipo GUI para pré- e pós-processamentos, escrita em MATLAB, voltada para geração e visualização bidimensionais de diferentes tipos de malha, bem como para análise de problemas elastostáticos, via método dos elementos de contorno, com o programa BemCracker2D.

O BEMLAB2D é baseado em ações definidas pelo usuário por meio das ferramentas botões, mouse e diálogos, e possui os módulos e características, conforme descritos a seguir e ilustrados na Fig. 7, sendo dada ênfase, aqui, aos módulos IV e V, objetos deste trabalho.

- Geometry (Módulo I): Este módulo é independente e tem a finalidade de construção do modelo 2D por meio das ferramentas de desenho POINTS, LINES, ARCS e ZONES;
- MESH (Módulo II): Este módulo possibilita a geração de malha, a partir da definição do modelo pelo módulo I, para três diferentes tipos, a saber, BEM (MEC), FEM (MEF) e MESHLESS (SEM MALHA), entretanto para os dois últimos tipos, a interface se limita à geração, visualização e armazenamento da geometria da malha;
- BOUNDARY CONDITIONS (Módulo III): Este módulo é específico para análise via elementos de contorno, sendo responsável pela execução das condições do contorno, a saber: DISPLACEMENTS (DESLOCAMENTOS), TRACTION (TRAÇÕES) e UNKNOWN (DESCONHECIDAS);
- ELASTOSTATIC ANALYSIS (Módulo IV): Este módulo é específico para análise via elementos de contorno, sendo responsável pela execução de três tipos de análises: STANDARD BEM (MEC PADRÃO), WITH NO CRACKS GROWTH (TRINCAS SEM PROPAGAÇÃO) e WITH CRACKS GROWTH (TRINCAS COM PROPAGAÇÃO);

- **GRAPHICAL RESULTS (Módulo V):** Este módulo é específico para análise via elementos de contorno, sendo responsável pela visualização dos seguintes resultados gráficos: MESH DEFORMED (DEFORMADA DA MALHA), MESH STRESSES (MALHA DE TENSÕES), STRESS INTENSITY FACTORS (FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÃO), CRACK GROWTH PATH (CAMINHO DE PROPAGAÇÃO DA TRINCA), FATIGUE LIFE (VIDA À FADIGA) e CRACKS SPREADING (TRINCAS PROPAGANDO).

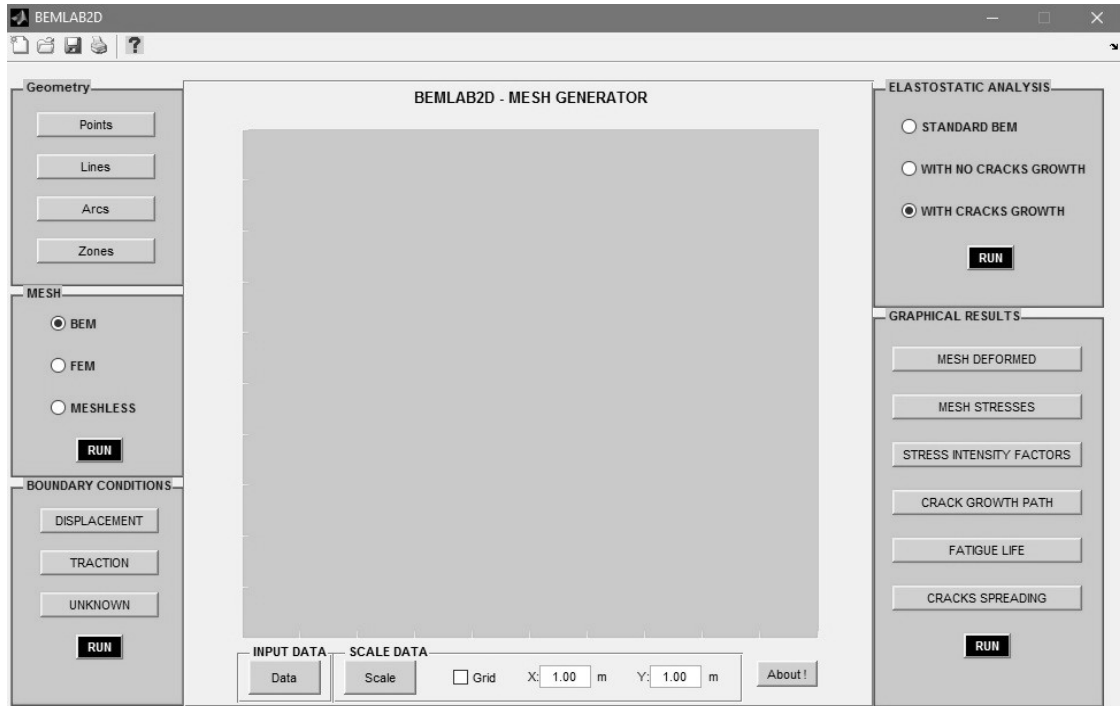


Figura 7. Modelo Visual da Interface Gráfica BEMLAB2D.

A Figura 8 ilustra o esquema da hierarquia de funcionalidade da interface BEMLAB2D, que compreende todas as etapas envolvidas no procedimento da análise.

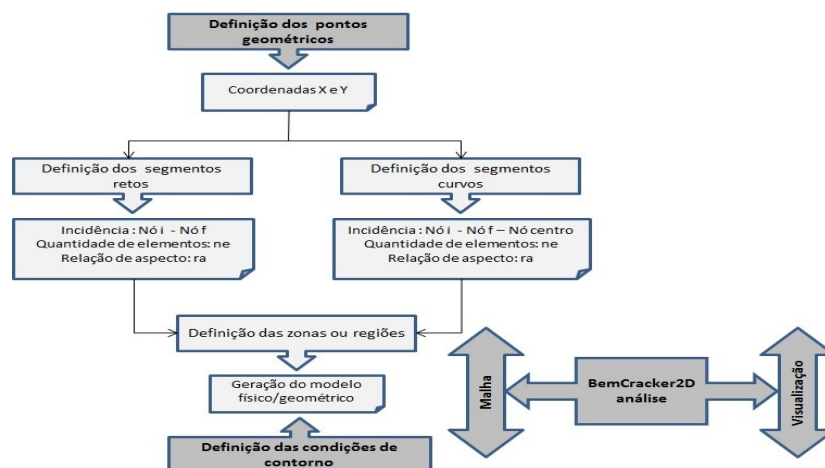


Figura 8. Hierarquia de funcionalidade da Interface BEMLAB2D.

4 MODELAGEM E VISUALIZAÇÃO

Duas aplicações são apresentadas nesta seção, objetivando ilustrar o processo de modelagem e visualização da análise incremental de propagação da trinca. Para fins de simplificação, as etapas referentes aos módulos I e III do BEMLAB2D não serão detalhadas aqui.

4.1 Placa Cruciforme com trinca inclinada

Esta aplicação apresenta a análise de uma placa cruciforme trincada, onde a razão inicial de $a/L = 0.2$, $L=0.2$ m e o ângulo entre a trinca e o eixo vertical é 45° , sendo $T = 20$ MPa, $T=10$ MPa e U , as condições de contorno tração (y, x) e deslocamento, respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 9(a). As propriedades do material usadas foram módulo de elasticidade $E = 218400$ Pa e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Na Figura 9(b), tem-se o modelo gerado pela interface BEMLAB2D com utilização das ações de usuários definidas no módulo I.

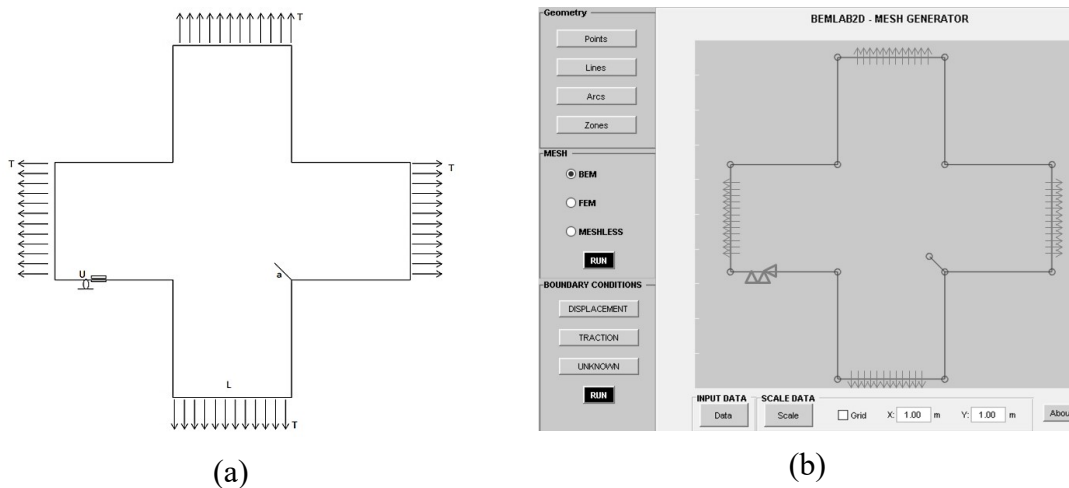


Figura 9. Placa cruciforme trincada: a) Modelo problema; b) Modelo gerado pelo BEMLAB2D.

A Figura 10 apresenta a malha de elementos de contorno, tendo sido gerada pelo módulo II, após aplicação das condições de contorno pelo módulo III. Nesta, observa-se o uso de elementos de contorno quadráticos, contínuos e descontínuos, no contorno do domínio e da trinca (ver detalhe ampliado), respectivamente.

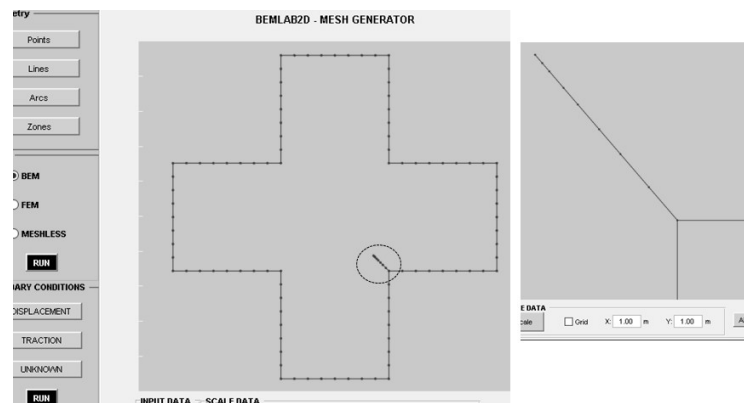


Figura 10. Malha de elementos de contorno gerada pelo BEMLAB2D e detalhe da trinca ampliada.

Iniciada a análise pelo módulo IV, temos a geração da malha do caminho de propagação da trinca, que é elaborado a partir do Módulo V, como ilustrado na Fig. 11(a). Para essa análise foi considerado um total de 10 incrementos de trinca com avanço de tamanho $0.3a$ m cada (ver detalhe ampliado do caminho). Na Figura 11(b), temos o gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão versus o avanço da trinca, que é elaborado a partir do Módulo V (botão dos FITs) e um diálogo com opções de configuração para exibição. Neste, percebe-se que o Modo II é praticamente zero a partir do primeiro incremento.

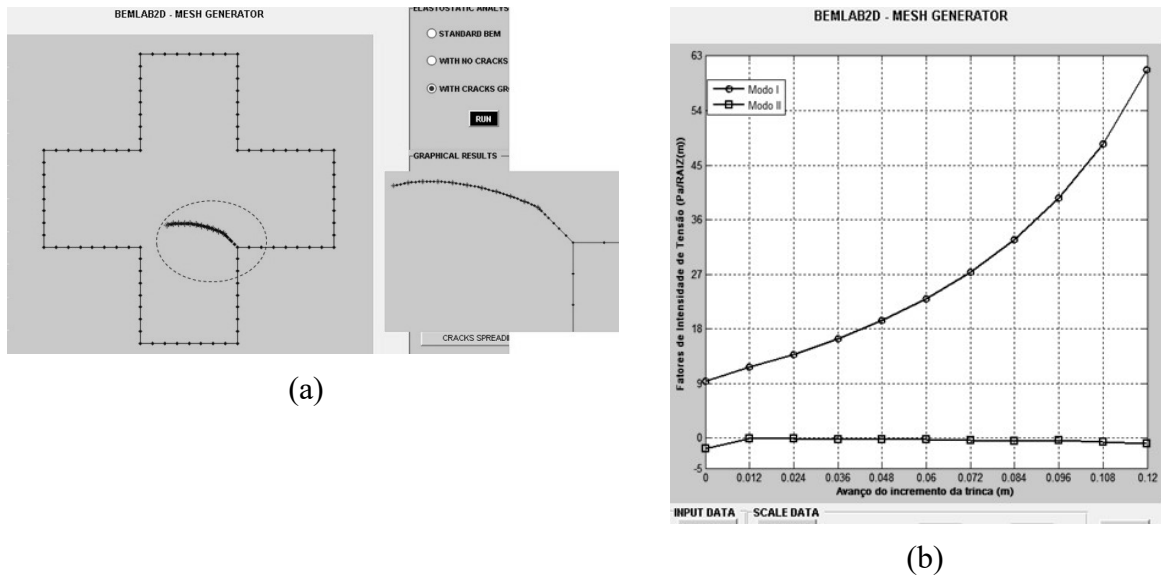
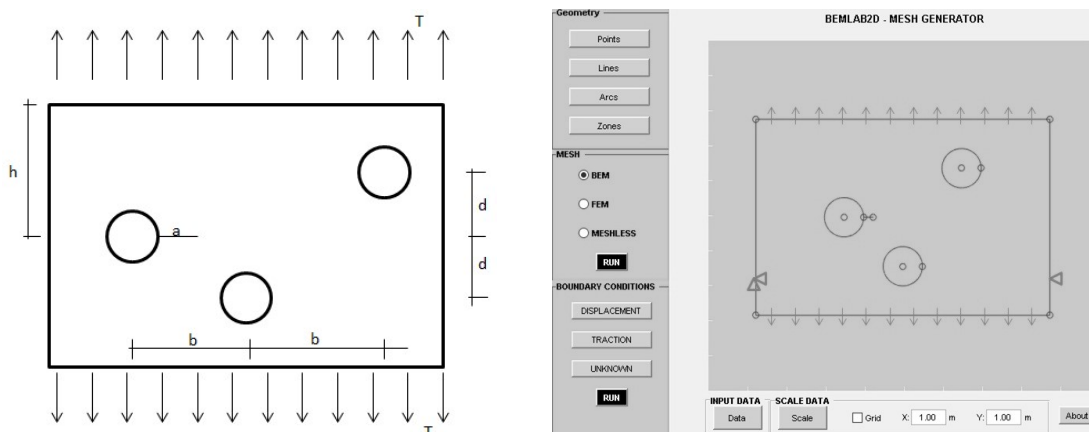


Figura 11. (a) Malha de propagação gerada pelo BEMLAB2D e detalhe ampliado do caminho; (b) Gráfico dos FITs x Avanço do incremento da trinca.

4.2 Placa retangular com furos e trinca

Esta aplicação apresenta a análise de uma placa retangular ($3\text{ m} \times 2\text{ m}$) contendo três furos (raio 0.2 m , cada) e uma trinca inicial ($a=0.1\text{ m}$) partindo de um desses furos com dimensões características $h = 1\text{ m}$, $b = 0.6\text{ m}$ e $d = 0.5\text{ m}$, esquematicamente representada na Fig. 12(a). Uma tração normal uniforme $t = 10\text{ MN/m}^2$ é aplicada nas extremidades da placa na direção perpendicular ao eixo x da trinca inicial. A placa possui módulo de elasticidade $E = 200000\text{ MN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.25$. Na Figura 12(b) temos o modelo gerado pelo BEMLAB2D.



(a) (b)

Figura 12. Placa retangular com três furos: a) Modelo problema; b) Modelo gerado pelo BEMLAB2D.

A Figura 13 apresenta a malha de elementos de contorno, gerada pelo módulo II após aplicação das condições de contorno pelo módulo III. Nesta, observa-se o uso de elementos de contorno quadráticos, contínuos e descontínuos, no contorno do domínio e da trinca (ver detalhe ampliado), respectivamente.

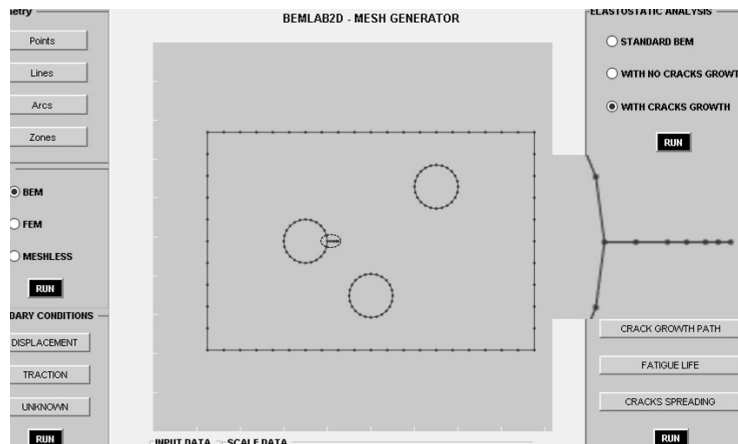


Figura 13. Malha de elementos de contorno gerada pelo BEMLAB2D e detalhe da trinca ampliada.

Após análise pelo módulo IV, temos a geração da malha do caminho de propagação da trinca, que é elaborado a partir do Módulo V, como ilustrado na Fig. 14(a). Para essa análise foi considerado um total de 20 incrementos de trinca com avanço de tamanho 0.6 mm cada (ver detalhe ampliado do caminho). Na Figura 14(b) temos o gráfico dos Fatores de Intensidade de Tensão versus o número de incrementos.

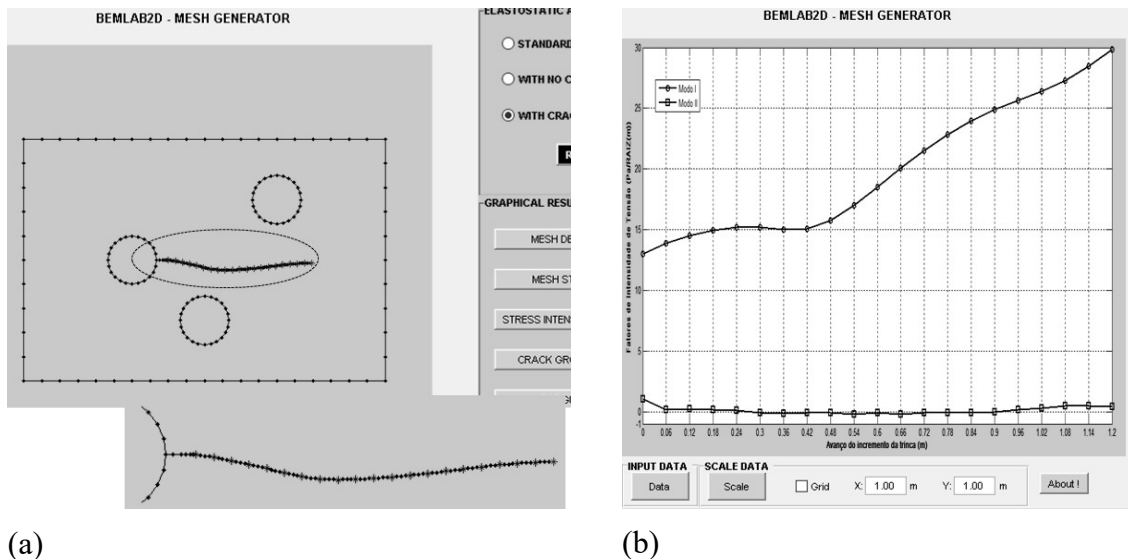


Figura 14. (a) Malha de propagação gerada pelo BEMLAB2D e detalhe ampliado do caminho; (b) Gráfico dos FITs x Avanço do incremento da trinca.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, duas equações integrais de contorno - deslocamento e tração - foram aplicadas, de forma independente, no processo de modelagem de trincas bidimensionais e, para prever o caminho de propagação da trinca, uma análise incremental com o MEC, incorporando ambas as equações, também foi realizada.

A automatização do processo de modelagem e da análise incremental se deu pela interação entre os programas BEMLAB2D e BemCracker2D, respectivamente. O primeiro é responsável pela modelagem da superfície da trinca com uso das duas equações integrais de contorno e de elementos quadráticos descontínuos, do contorno do domínio com uso de elementos quadráticos contínuos, da geração da malha e da visualização do caminho de propagação da trinca. O segundo é invocado pela interface para realizar uma análise de tensão da estrutura com o MEC e, a cada incremento, após cálculo dos fatores de intensidade de tensão, a direção de propagação da trinca é calculada e corrigida pelo critério de tensão máxima.

Por fim, os dois exemplos apresentados ilustraram a funcionalidade da interface gráfica e os resultados do caminho de propagação da trinca, obtidos pelo programa BemCracker2D, mostraram que o emprego das duas equações integrais de contorno simplifica muito o processo de modelagem e atesta a robustez da técnica.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer ao Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil – PECC, da Universidade de Brasília, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, e a School of Engineering and Design, Brunel University London/UK.

REFERÊNCIAS

- De Lacerda L. A. and Wrobel, L. C., 2001, Hypersingular boundary integral equation for axisymmetric elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 1337-1354.
- Gallagher, R. H., 1978, A Review of Finite Element Techniques in Fracture Mechanics. Proc. of the First Conference on Numerical Methods in Frac Mech, A.R. Luxmoore and D. R. J. Owen (Editors), University college of Swansea, 1-25.
- Swenson, D. V. and Ingraffea, A. R., 1988, Modelling Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation Using Finite Elements: Theory and Applications, *Comp. Mech.* 3, 381-397.
- Kocer, C. and Collins, R. E., 1997, The angle of Hertzian cone cracks. *Journal of the American Ceramic Society*, 81, 1736-1742.
- Bush, M. B., 1999, Simulation of contact-induced fracture. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23, 59-66.
- Ingraffea, A. R., Blandford, G. E., and Liggett, J. A., 1983, Automatic Modelling of Mixed-Mode Fatigue and Quasi-Static Crack Propagation Using the Boundary Element Method,

Proc. of Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium, ASTM STP 791, J. C. Lewis and G. Sines (Editors), ASTM, I 407-426.

Portela, A., Aliabadi, M. H., and Rooke, D. P., 1993, Dual boundary element incremental analysis of crack propagation, *Computer and Structures*, Vol. 46, pp. 237-247.

Portela, A., Aliabadi, M. H. and Rooke, D. P., 1992, The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 33, pp. 1269-1287.

Aliabadi, M. H., 2002, *The Boundary Element Method – Applications in Solids and Structures*, Vol. 2, WILEY.

Carvalho, C. V. A., 1998, Simulação Bidimensional Adaptativa por Elementos Finitos de Processos de Fraturamento por Fadiga. Tese de Mestrado, PUC-Rio/Rio de Janeiro.

Gomes, G., 2000, Estrutura de Dados para Representação de Modelos Bidimensionais de Elementos de Contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasil.

Gomes, G., 2006, Aplicação dos Métodos de Elementos de Contorno e Reciprocidade Dual em Problemas de Plasticidade 2D Orientada a Objeto. Tese de Doutorado, ENC/FT/UnB, Brasília.

Booch, G., 1994, *Object-Oriented Analysis and Design with Applications*. The Benjamin/Cumming Publishing Company.