



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

CALIBRAÇÃO BAYESIANA DE UM MODELO ESTOCÁSTICO DE ELEMENTOS DE CONTOURO PARA A FRATURA NÃO-LINEAR DE COMPONENTES DE CONCRETO

Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro, Edson Denner Leonel

sergio.cordeiro@usp.br, edleonel@sc.usp.br

Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas. Av. Trabalhador São Carlense, 400, Centro, 13.566-590 São Carlos-SP, Brasil.

Pierre Beaurepaire, Alaa Chateauf

pierrebeaurepair@sigma-clermont.fr, alaa.chateauf@univ-bpclermont.fr

Université Clermont Auvergne, Institut Pascal, Campus de Clermont-Ferrand, Les Cézeaux. 63175 Aubière, Clermont-Ferrand, France.

Resumo. A fratura mecânica de peças estruturais de concreto é por natureza um processo incerto sendo muitas vezes observadas discrepâncias significativas de resultados experimentais sob condições de ensaio, em teoria, idênticas. Essas incertezas podem ser representadas a partir de modelos mecânicos estocásticos. No entanto, a calibração desses modelos baseada em dados experimentais nem sempre é uma tarefa fácil. Neste trabalho é apresentado um procedimento para a calibração de um modelo estocástico de fratura não-linear em peças de concreto. O modelo mecânico de fratura é baseado no método dos elementos de contorno e no modelo coesivo de fratura. Três diferentes leis coesivas foram adotadas na calibração do modelo estocástico. Os fundamentos sobre calibração Bayesiana de modelos são apresentados e um recente método denominado “Calibração Bayesiana utilizando confiabilidade estrutural” é discutido e aplicado em um problema de fratura de vigas de concreto. Através desse método é possível quantificar o ajuste entre os resultados experimentais e os resultados do modelo calibrado considerando as três leis coesivas. Portanto é possível afirmar qual das leis resultou em um melhor ajuste do modelo estocástico após a calibração. Para viabilizar o custo computacional do procedimento, redes neurais artificiais foram utilizadas para a meta-modelagem do problema.

Palavras-chave: Calibração Bayesiana, Método dos elementos de contorno, Modelo coesivo de fratura, Redes neurais artificiais

1 INTRODUÇÃO

A utilização de conceitos da mecânica da fratura aplicada à análise de confiabilidade de componentes estruturais é uma abordagem interessante pois é capaz de proporcionar projetos estruturais mais robustos. Engenheiros civis em geral estão cientes de que o comportamento do concreto na situação de fratura é afetado por incertezas. Portanto, para uma abordagem mais realista do problema, faz-se necessário levar em conta as incertezas, as quais podem ser representadas por modelos mecânicos estocásticos. A calibração de modelos mecânicos estocásticos a partir de resultados experimentais pode ser extremamente custosa em termos de tempo de processamento (Beck & Katafygiotis, 1998). Sendo assim a eficiência e precisão dos modelos determinísticos a partir dos quais são gerados os modelos estocásticos calibrados é também de extrema importância. O Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) é um método numérico que vem sendo aplicado com sucesso em problemas de fratura nas últimas décadas (Chen & Hong, 1999; Portela, Aliabadi, & Rooke, 1992; Cisilino & Aliabadi, 1999). As principais vantagens do MEC dual para os problemas de fratura são a necessidade de malha apenas no contorno e a boa precisão na avaliação de campos de tensões com elevados gradientes (Leonel, Venturini, & Chateauf, 2011). No contexto da mecânica da fratura não linear, formulações do MEC baseadas no Modelo Coesivo de Fratura (MCF) de Hillerborg, Modeer, & Petersson (1976) tem sido aplicadas para representar a Zona de Processos de Fraturamento (ZPF) em diversos materiais quase-frágeis, como é o caso do concreto (Saleh & Aliabadi, 1995; Leonel & Venturini, 2010; Oliveira & Leonel, 2013). De acordo com o MCF, a resistência residual do material na ZPF é representada por tensões coesivas atuando nas faces de uma fissura fictícia (posicionada à frente da fissura real) no sentido de fechar a mesma. As tensões coesivas são funções da abertura da fissura fictícia e tais relações são denominadas na literatura de leis de amolecimento ou ainda leis coesivas. A consideração dessas funções torna o problema não linear sendo, portanto necessário utilizar estratégias numéricas para a resolução do sistema algébrico.

A obtenção dos parâmetros das leis coesivas a partir de observações experimentais é até os dias de hoje uma tarefa desafiadora, especialmente quando incertezas estão envolvidas. A calibração de modelos baseada em observações experimentais tem recebido considerável atenção ao longo dos últimos anos (Friswell & Mottershead, 1995; Datta, 2002; Calvi, 2005; Hills, et al., 2008). Diversas metodologias para proceder a calibração Bayesiana de modelos foram apresentadas na literatura (Ching & Chen, 2007; Beck & Zuev, 2013; Straub & Papaioannou, 2015). Em geral, a estratégia utilizada consiste em uma análise inversa onde a estatística Bayesiana (Beck & Katafygiotis, 1998; Katafygiotis & Beck, 1998) é utilizada para levar em conta as incertezas. Para isso é necessário formular hipóteses estatísticas as quais são testadas e subsequentemente confrontadas com as observações experimentais. A resposta do procedimento de calibração Bayesiana pode ser interpretada como uma medida de adequabilidade das hipóteses estatísticas assumidas em relação aos dados experimentais disponíveis (Jaynes, 2003). Essa medida é denominada evidencia e corresponde à constante de normalização da distribuição estatística posterior dos parâmetros do modelo coesivo, obtida ao final do processo. No presente trabalho é proposta uma estratégia para a calibração Bayesiana de modelos de fratura para materiais quase-frágeis. Os modelos a serem calibrados são baseados no MEC dual e os dados experimentais disponíveis são curvas de força-deflexão obtidas de ensaios de vigas de concreto submetidas à flexão em três pontos. Três diferentes leis coesivas foram testadas e a partir da evidencia foi possível determinar qual delas foi a mais plausível para descrever as curvas experimentais disponíveis. Para o modelo mais adequado, a

distribuição posterior, ou seja, a função de distribuição conjunta de densidade de probabilidades dos parâmetros do modelo coesivo, foi apresentada e validada.

2 CALIBRAÇÃO BAYESIANA DE MODELOS MECÂNICOS

2.1 Calibração Bayesiana utilizando confiabilidade estrutural

Engenheiros estruturais tem que lidar muitas vezes com informações incompletas e incertezas em relação à parâmetros mecânicos. A observação da resposta experimental das estruturas pode prover informações adicionais para a análise as quais podem ser utilizadas para calibrar modelos estruturais estocásticos. A calibração bayesiana de modelos é baseada no teorema de Bayes (Bayes, 1763) por meio do qual é possível incorporar novas informações à modelos mecânicos estocásticos a partir de observações experimentais. Para modelos estruturais o teorema de Bayes é apresentado como (Beck & Katafygiotis, 1998; Katafygiotis & Beck, 1998):

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M}) = \frac{p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{p(\mathcal{D}|\mathcal{M})} \quad (1)$$

sendo $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \dots, \theta_{N_p}]$ o conjunto de parâmetros incertos do modelo estocástico, N_p é o número total de parâmetros, \mathcal{D} representa as informações provenientes das observações experimentais e \mathcal{M} é o modelo estrutural utilizado.

A distribuição a priori $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$ reflete o conhecimento inicial (Na ausência de observações experimentais) que se tem em relação aos parâmetros incertos do modelo. Adotou-se nesse trabalho apenas distribuições a priori uniformes e independentes. A função de verossimilhança $p(\mathcal{D}|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})$ expressa a correspondência entre as informações experimentais \mathcal{D} e a resposta do modelo \mathcal{M} dada a distribuição a priori dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$.

Para definir a função de verossimilhança é necessário adotar um modelo de distribuição estatística para as informações experimentais. No presente trabalho adotou-se modelos de distribuições normal e lognormal. A distribuição posterior $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M})$ dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é o que se procura para a calibração do modelo estocástico, condicionada às informações \mathcal{D} , à distribuição a priori e ao modelo \mathcal{M} adotado. A distribuição posterior é utilizada para amostrar valores plausíveis para os parâmetros estruturais incertos. Finalmente, $p(\mathcal{D}|\mathcal{M})$ representa a constante de normalização, denominada evidencia, que garante que a distribuição posterior integre a unidade.

A determinação da evidencia envolve a avaliação de de uma integral multi-dimensional, o que inviabiliza a determinação direta da distribuição posterior. Sendo assim, para resolver o problema da calibração bayesiana, algoritmos numéricos de simulação estocástica podem ser utilizados. Entre esses algoritmos, a “Calibração Bayesiana utilizando Confiabilidade Estrutural” (CBCE), proposta por Straub & Papaioannou (2015), apresenta um procedimento para a geração de amostras da distribuição posterior que não envolve diretamente a avaliação da evidencia.

A CBCE pode ser entendida como extensão de procedimento clássico de aceitação/rejeição de amostragens da distribuição a priori. Nesse procedimento, primeiramente é necessário introduzir uma variável aleatória auxiliar ξ uniformemente distribuída no intervalo $[0, \xi_{max}]$, onde:

$$\xi_{max} = \max_{\theta} p(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{M})p(\theta|\mathcal{M}) \quad (2)$$

No procedimento, as amostras $\theta^{(k)}$ e $\xi^{(k)}$ dos parâmetros e da nova variável são geradas utilizando simulação de Monte Carlo a partir das distribuições a priori uniformes. A amostra $[\theta^{(k)}, \xi^{(k)}]$ é então aceita caso:

$$\xi^{(k)} \leq p(\mathcal{D}|\theta^{(k)}, \mathcal{M})p(\theta^{(k)}|\mathcal{M}) \quad (3)$$

A Caso contrário a amostra é rejeitada. Ao final do processo, todas as amostras aceitas são realizações da distribuição posterior. A Figura 1a ilustra esse processo de aceitação/rejeição para um problema genérico envolvendo apenas uma variável aleatória θ . A linha sólida preta representa o termo $p(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{M})p(\theta|\mathcal{M})$, as cruzes representam as amostras aceitas e os pontos cinza as amostras rejeitadas.

No entanto, utilizando o procedimento clássico de aceitação/rejeição, o qual é baseado em simulação de Monte Carlo bruta, a grande maioria das amostras geradas são rejeitadas. Portanto, para conseguir alguns pontos da distribuição posterior é necessário gerar um grande número de amostras, o que pode acarretar em um elevado custo computacional (Visto que os modelos estruturais numéricos têm que ser avaliados a cada geração de amostras).

Com a CBCE esse problema é contornado uma vez que o problema de calibração bayesiana é encarado como um problema de confiabilidade estrutural. Nessa abordagem, as amostras aceitas são associadas com amostras no domínio de falha de problemas de confiabilidade (Amostras que satisfaz Eq.3), e as amostras restantes com amostras no domínio de sobrevivência. Nesse caso, a equação de estado limite pode ser escrita como uma função das variáveis aleatórias ξ e θ , dada por:

$$g(\theta, \xi) = \xi - p(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{M})p(\theta|\mathcal{M}) \quad (4)$$

Dessa maneira, qualquer técnica de confiabilidade estrutural pode ser utilizada para resolver o problema. Quando a CBCE é utilizada, amostras da distribuição posterior, i.e., amostras no domínio de falha, são geradas a partir de técnicas de amostragem inteligente, as quais permitem reduzir significativamente os custos computacionais.

Conforme sugerido por Straub & Papaioannou (2015), o problema de confiabilidade é solucionado utilizando simulação de subconjunto (Au & Beck, 2001). As simulações são realizadas no espaço normal padrão, onde as variáveis aleatórias são independentes e com distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário. Para transformar as variáveis aleatórias para o espaço normal padrão é utilizada a transformação composta utilizando o modelo de Nataf (1962) uma vez que distribuições não-gaussianas são consideradas.

A amostragem por simulação de subconjunto é baseada na decomposição do espaço normal padrão em eventos intermediários de falha. Um conjunto de regiões intermediárias de falha é então definido como sendo uma cadeia de eventos $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_m$, onde E_1 representa o próprio espaço normal padrão e E_m é o domínio de falha final procurado definido por $g(\theta, \xi) \leq 0$. A Figura 1b ilustra os eventos intermediários no espaço normal padrão.

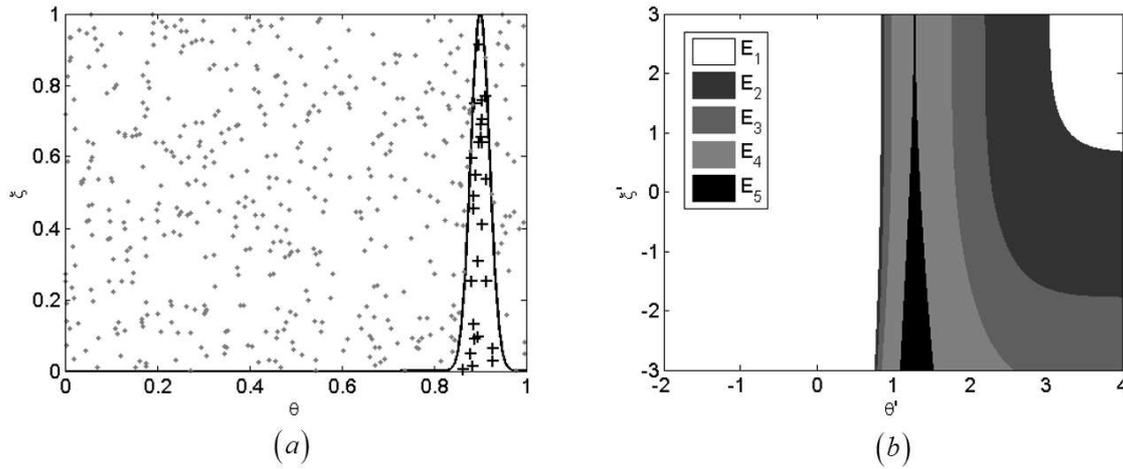


Figura 1. (a) processo de aceitação/rejeição (b) Eventos intermediários da simulação de subconjuntos

A probabilidade de falha p_F , ou probabilidade associada à aceitação de uma amostra da distribuição a priori, pode então ser determinada a partir da simulação de subconjuntos como:

$$p_F = P(E_1) \prod_{i=1}^{m-1} P(E_{i+1}|E_i) \quad (5)$$

sendo $P(E_i)$ a probabilidade associada a um evento E_i e as probabilidades condicionais $P(E_{i+1}|E_i)$ são obtidas a partir do algoritmo Metropolis-Hastings modificado. Para mais detalhes sobre a simulação de subconjuntos, consultar Au & Beck (2001), Au & Beck (2003), Zuev, Beck, Au, & Katafygiotis (2012).

No caso do presente trabalho foram utilizadas apenas distribuições a priori uniformes e independentes e a evidencia $p(\mathcal{D}|\mathcal{M})$, apresentada na Eq. 1, pode ser obtida a partir da probabilidade p_F como:

$$p(\mathcal{D}|\mathcal{M}) = \xi_{max} p_F \quad (6)$$

sendo p_F a probabilidade de aceitação de uma amostra, associada com a equação de estado limite Eq. 4 e determinada a partir de simulação de subconjuntos.

2.2 Calibração Bayesiana para seleção de modelos

A calibração bayesiana também pode ser utilizada para a seleção do modelo mecânico mais apropriado para reproduzir estatisticamente os resultados experimentais (Beck & Yuen, 2004). Considerando o conjunto de modelos $\mathcal{M} = [\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{N_C}]$ é possível reescrever o teorema de Bayes como:

$$p(\mathcal{M}_k|\mathcal{D}, \mathcal{M}) = \frac{p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)p(\mathcal{M}_k|\mathcal{M})}{p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)} \quad (7)$$

Considerando que a priori todas as classes de modelos são igualmente plausíveis, tem-se uma distribuição a priori $p(\mathcal{M}_k|\mathcal{M}) = 1/N_c$. O termo $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)$ é a constante de normalização. Para determinar qual o modelo \mathcal{M}_k mais apropriado não é necessário obter a distribuição posterior $p(\mathcal{M}_k|\mathcal{D}, \mathcal{M})$. Isso porque a adequabilidade dessa distribuição aos resultados experimentais depende apenas da constante $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)$, a qual é igual à evidência associada à calibração dos parâmetros θ considerando a classe de modelo \mathcal{M}_k :

$$p(\theta|\mathcal{D}, \mathcal{M}_k) = \frac{p(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{M}_k)p(\theta|\mathcal{M}_k)}{p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)} \quad (8)$$

Portanto, para determinar a classe de modelo mais adequada, a calibração Bayesiana dos parâmetros θ é avaliada individualmente para cada modelo e a adequabilidade desses modelos é medida quantitativamente através da evidência $p(\mathcal{D}|\mathcal{M}_k)$. Quanto maior for o valor da evidência, mais próximo o modelo estará de reproduzir a tendência estatística dos resultados experimentais.

3 MODELO MECÂNICO PARA AS ANÁLISES DE FRATURA

O modelo mecânico de fratura a ser calibrado é baseado no Método dos Elementos de Contorno dual (MEC dual) e no Modelo Coesivo de Fratura (MCF). O MEC dual é utilizado para a discretização das fissuras ao passo que o comportamento de fratura quase-frágil é imposto pelo MCF. O modelo de fratura será detalhado a seguir nos próximos tópicos.

3.1 Método dos elementos de contorno dual

Na formulação MEC dual, duas equações integrais independentes são aplicadas nos pontos de colocação coincidentes das duas faces opostas de uma dada fissura. A primeira equação integral, ou equação integral de deslocamentos, pode escrita para um corpo elástico com contorno Γ como:

$$c_{ij}(\mathbf{f}, \mathbf{c})u_j(\mathbf{c}) + \int_{\Gamma} P_{ij}(\mathbf{f}, \mathbf{c})u_j(\mathbf{c})d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{f}, \mathbf{c})p_j(\mathbf{c})d\Gamma, \quad (9)$$

sendo u_j e p_j as componentes de deslocamentos e forças de superfície em um ponto do contorno Γ , \mathbf{f} o ponto fonte para a colocação da equação integral e \mathbf{c} é um ponto campo no contorno. c_{ij} é o termo livre que surge das integrais singulares da formulação, o qual é igual à $\delta_{ij}/2$ para contornos suaves, e U_{ij} e P_{ij} são as soluções fundamentais de Kelvin para os deslocamentos e forças de superfície dos problemas elastoestáticos (Brebbia & Dominguez, 1989).

Uma equação integral escrita em termos de deformações pode ser obtida diferenciando a Eq. (9) e considerando as relações cinemáticas de deslocamentos/deformações infinitesimais. Aplicando a lei generalizada de Hooke à essa equação é possível obter uma representação integral para as tensões. Finalmente, impondo o equilíbrio de Cauchy para as tensões no

contorno Γ é possível escrever a segunda equação integral utilizada na formulação MEC dual, i.e., equação integral de forças de superfície:

$$\frac{1}{2} p_j(\mathbf{f}) + \eta_i \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{f}, \mathbf{c}) u_k(\mathbf{c}) d\Gamma = \eta_i \int_{\Gamma} D_{ijk}(\mathbf{f}, \mathbf{c}) p_k(\mathbf{c}) d\Gamma, \quad (10)$$

Na Eq. (10), η_i são as componentes do versor $\boldsymbol{\eta}$ normal ao contorno Γ . Os novos núcleos integrais S_{ijk} e D_{ijk} contêm respectivamente as derivadas $P_{ij,l}$ e $U_{ij,l}$ das soluções fundamentais de Kelvin junto com as propriedades elásticas do material. As expressões para os núcleos S_{ijk} e D_{ijk} foram apresentadas no trabalho de Hong & Chen (1988).

As formulações convencionais do MEC podem ser obtidas utilizando separadamente a Eq. (9) ou a Eq. (10). A equação integral adotada é então transformada em um sistema de equações algébricas através da discretização do contorno em elementos isoparamétricos e da imposição da equação integral em todos os nós dos elementos através da técnica de colocação. Tal procedimento, quando utilizado para discretizar fissuras nos sólidos, gera equações linearmente dependentes devido à coincidência dos pontos de colocação nas faces das fissuras. Para contornar esse problema a formulação MEC dual propõe que a equação integral de deslocamentos, Eq. (9), seja utilizada para os pontos de colocação em uma das faces da fissura e a equação integral de forças, Eq. (10), seja utilizada na face oposta. Dessa maneira o sistema final resulta linearmente independente e pode ser solucionado. Nos pontos do restante do contorno a colocação é imposta utilizando a Eq. (9) visto que essa equação apresenta singularidades menos severas. Para tratar as integrais singulares adotou-se o método da subtração de singularidade. Já as integrais regulares foram calculadas utilizando a quadratura de Gauss-Legendre.

3.2 Modelo coesivo de fratura

Em se tratando de materiais frágeis, ZPF é pequena o suficiente para que seu efeito possa ser desprezado das análises mecânicas. Nesse contexto, a mecânica da fratura elástica linear pode ser adotada. No entanto, quando a ZPF não é suficientemente pequena, efeitos mecânicos não lineares aparecem e não podem ser negligenciados. Nesses casos é necessário utilizar conceitos da mecânica da fratura não linear. Grandes ZPF são geralmente observadas em concretos, rochas, madeiras, compósitos poli cristalinos e diversos outros tipos de materiais os quais são classificados como quase-frágeis.

Para representar os efeitos mecânicos da ZPF nos materiais quase-frágeis, o MCF pode ser adotado (Hillerborg, Modeer, & Petersson, 1976). Nessa abordagem, a degradação mecânica é representada por uma fissura fictícia posicionada na frente da fissura real conforme ilustra a Figura 2a. A resistência residual do material é representada por tensões coesivas agindo nas faces da fissura fictícia no intuito de fecha-la. Para impor o modelo é necessário conhecer uma lei coesiva que relacione as tensões coesivas com as aberturas das faces da fissura fictícia. Essas leis podem ser obtidas a partir de resultados experimentais por meio de análises inversas conforme ilustra a Figura 2b. No entanto, sua determinação nem sempre é uma tarefa fácil, especialmente quando o comportamento estocástico de fratura do concreto é levado em consideração.

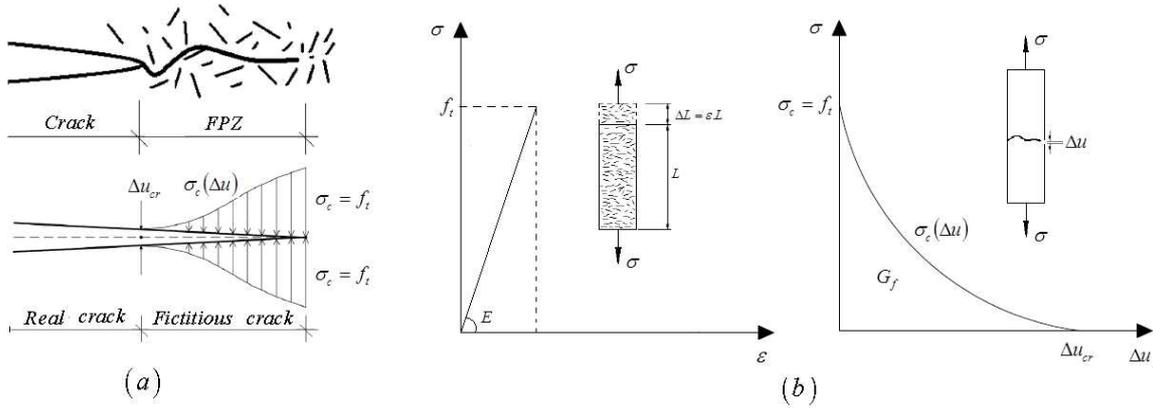


Figura 2. (a) Modelagem da ZPF, (b) Obtenção das leis coesivas a partir de resultados experimentais

As leis coesivas são definidas geralmente a partir de dois parâmetros do material: A resistência à tração f_t e a energia de fratura G_f . A lei coesiva mais comumente encontrada na literatura relaciona linearmente as tensões coesivas, σ_c , às aberturas da fissura fictícia, Δu . Quando a abertura Δu é nula, a resistência residual é igual a f_t . Por outro lado, a resistência residual cai para zero no caso da abertura Δu ser maior que um valor crítico Δu_{cr} .

Alternativamente, Δu e σ_c podem também ser relacionados por uma lei exponencial conforme ilustrado na Figura 3a. Novamente apenas os dois parâmetros f_t e G_f são necessários. Uma outra lei coesiva comumente adotada é a lei bilinear conforme ilustra a Figura 3c. Para esse tipo de modelo coesivo são necessários mais dois parâmetros para definir o ponto de inflexão: $f_t'' = a.f_t$ e $\Delta u'' = b.\Delta u_{cr}$, onde a e b são, respectivamente, as razões f_t''/f_t e $\Delta u''/\Delta u_{cr}$, as quais devem estar entre zero e um. De acordo com Oliveira & Leonel (2013) e Leonel & Venturini (2010) as seguintes razões podem ser utilizadas $a = 1/3$ e $b = 2/9$ para materiais cimentícios conforme ilustra o modelo coesivo da Figura 3b.

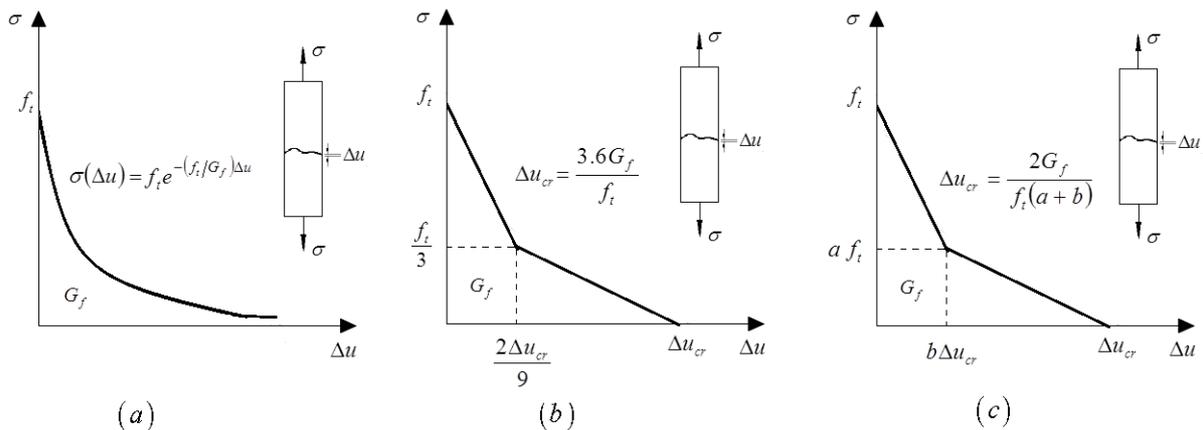


Figura 3. Leis coesivas: (a) Lei exponencial, (b) Lei bilinear: 2 parâmetros (c) Lei bilinear: 4 parâmetros

No presente estudo, os três modelos coesivos apresentados na Figura 3 são considerados para serem calibrados com base nas respostas experimentais dos corpos de prova de concreto

testados à fratura. Nas análises de calibração, esses modelos são denominados, respectivamente como, lei exponencial, lei bilinear com dois parâmetros incertos e lei bilinear com quatro parâmetros incertos.

3.3 Equações algébricas do problema de fratura coesiva

A discretização do contorno externo e das fissuras em elementos e a imposição das equações integrais por colocação gera o clássico sistema de equações dos elementos de contorno apresentado na Equação (11).

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (11)$$

Em que \mathbf{u} e \mathbf{p} são vetores que contém, respectivamente, os deslocamentos e as forças nos pontos de colocação do contorno e das faces da fissura. A matriz \mathbf{H} é construída a partir das integrais dos núcleos P_{ij} e S_{ijk} ao passo que a matriz \mathbf{G} é construída considerando os núcleos U_{ij} and D_{ijk} . Os pontos de colocação podem estar localizados tanto na face esquerda, “e”, ou direita, “d”, da fissura ou ainda no contorno externo “c”. Considerando a divisão do sistema de acordo com a localização dos pontos fontes é possível reescrever a Eq. (11) como:

$$\mathbf{H}_c^c \mathbf{u}_c + \mathbf{H}_c^e \mathbf{u}_e + \mathbf{H}_c^d \mathbf{u}_d = \mathbf{G}_c^c \mathbf{p}_c + \mathbf{G}_c^e \mathbf{p}_e + \mathbf{G}_c^d \mathbf{p}_d \quad (12)$$

Os deslocamentos e forças na Eq. (12) são a princípio descritos no sistema de coordenadas globais. Para introduzir o MCF nas equações algébricas é interessante transformar os termos da Eq. (12) relacionados à fissura para um sistema de coordenadas locais definidos em termos das direções normal, “ η ”, e tangencial, t , à ambas as faces da fissura. Sendo assim, os deslocamentos e forças são separados em componentes normais, $\mathbf{u}_{f\eta}$, $\mathbf{p}_{f\eta}$, e componentes tangenciais, \mathbf{u}_{ft} , \mathbf{p}_{ft} , com a face $f = e, d$, conforme ilustrado na Figura 4. Além disso, impondo as condições de contorno para o contorno externo do problema, as equações algébricas podem ser reescritas conforme apresentado na Equação (13).

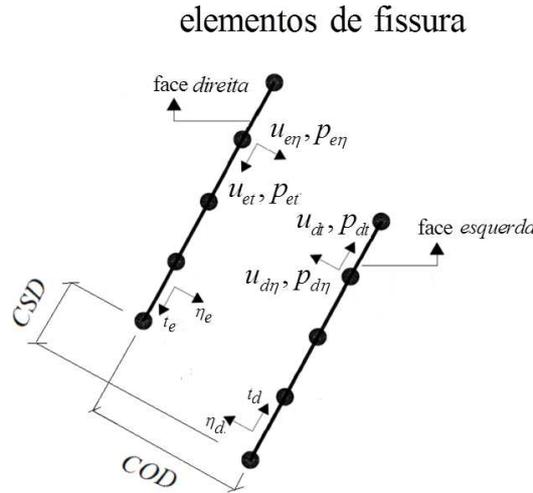


Figura 4 Variáveis no sistema de coordenadas locais das fissuras

$$\mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_c + \mathbf{H}_c^{e\eta} \mathbf{u}_{e\eta} + \mathbf{H}_c^{e\tau} \mathbf{u}_{e\tau} + \mathbf{H}_c^{d\eta} \mathbf{u}_{d\eta} + \mathbf{H}_c^{d\tau} \mathbf{u}_{d\tau} = \mathbf{G}_c^{e\eta} \mathbf{p}_{e\eta} + \mathbf{G}_c^{e\tau} \mathbf{p}_{e\tau} + \mathbf{G}_c^{d\eta} \mathbf{p}_{d\eta} + \mathbf{G}_c^{d\tau} \mathbf{p}_{d\tau} + \mathbf{F}_c \quad (13)$$

sendo $\mathbf{H}_c^{f\eta}, \mathbf{H}_c^{f\tau}, \mathbf{G}_c^{f\eta}$ e $\mathbf{G}_c^{f\tau}$ compostas por componentes de \mathbf{H} e \mathbf{G} multiplicados pelos termos da matriz de rotação do sistema de coordenadas. \mathbf{x}_c é um vetor que contém os valores incógnitos no contorno externo, \mathbf{A}_c^c é composta por colunas de \mathbf{H}_c^c e \mathbf{G}_c^c associadas com os valores incógnitos e \mathbf{F}_c é o vetor que contém a contribuição dos valores prescritos no contorno. A condição de equilíbrio de forças nas faces das fissuras coesivas impõe que $\mathbf{p}_{e\eta} = -\mathbf{p}_{d\eta} = \mathbf{p}_\eta$ e $\mathbf{p}_{e\tau} = -\mathbf{p}_{d\tau} = \mathbf{p}_\tau$. Portanto, o sistema de equações apresentado na Eq. (13) pode ser reescrito como:

$$\mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_c + \mathbf{H}_c^{e\eta} \mathbf{u}_{e\eta} + \mathbf{H}_c^{e\tau} \mathbf{u}_{e\tau} + \mathbf{H}_c^{d\eta} \mathbf{u}_{d\eta} + \mathbf{H}_c^{d\tau} \mathbf{u}_{d\tau} = (\mathbf{G}_c^{e\eta} - \mathbf{G}_c^{d\eta}) \mathbf{p}_\eta + (\mathbf{G}_c^{e\tau} - \mathbf{G}_c^{d\tau}) \mathbf{p}_\tau + \mathbf{F}_c \quad (14)$$

No intuito de incluir o MCF nas equações algébricas é necessário introduzir o conceito de abertura da fissura, ou COD (Crack Open Displacement) e deslizamento da fissura, ou CSD (Crack Slide Displacement). Vetores contendo os COD e os CSD podem ser definidos a partir dos vetores de deslocamentos em coordenadas locais como: $\mathbf{COD} = -\mathbf{u}_{e\eta} - \mathbf{u}_{d\eta}$ e $\mathbf{CSD} = \mathbf{u}_{e\tau} + \mathbf{u}_{d\tau}$ (Ver Fig.4). No caso elástico, ou seja, antes da fissura coesiva se propagar, tem-se $\mathbf{COD} = \mathbf{CSD} = 0$ e, portanto, a fissura é assumida como fechada. Quando a máxima tensão circunferencial na ponta da fissura fechada superar a resistência à tração do material as descontinuidades de deslocamento passam a ser observadas, ou seja, a fissura pode abrir e deslizar. Nesse caso, a resistência residual ao longo do trecho da fissura correspondente à ZPF é representada por tensões coesivas $\mathbf{p}_c(\mathbf{COD})$ que de acordo com o modelo são associadas com as aberturas \mathbf{COD} . As tensões normais na ZPF devem então satisfazer a lei coesiva

adotada, ou seja, $\mathbf{p}_\eta = \mathbf{p}_C(\text{COD})$ e as tensões tangenciais são assumidas como nulas, $\mathbf{p}_t = 0$, quando a fissura abre representando um comportamento perfeitamente frágil ao cisalhamento.

Introduzindo então as condições impostas pelo modelo coesivo quando a fissura se propaga, o sistema de equações algébricas que deve ser solucionado para obter a resposta do problema pode ser expresso conforme a seguir.

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_c + (\mathbf{H}_c^{e\eta} - \mathbf{H}_c^{d\eta}) \mathbf{u}_{e\eta} - \mathbf{H}_c^{d\eta} \text{COD} + (\mathbf{H}_c^{et} - \mathbf{H}_c^{dt}) \mathbf{u}_{et} + \\ & \mathbf{H}_c^{dt} \text{CSD} - (\mathbf{G}_c^{e\eta} - \mathbf{G}_c^{d\eta}) \mathbf{p}_C(\text{COD}) - \mathbf{F}_c = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

O sistema de equações descrito em Eq. (15) é não linear devido à dependência entre as variáveis \mathbf{p}_C e COD . O sistema não linear pode ser solucionado através de uma estratégia incremental-iterativa descrita em Cordeiro & Leonel (2016) a qual se baseia na reaplicação sucessiva do excedente de tensão nas faces da fissura correspondentes à ZPF. A estratégia incremental além de reduzir os erros numéricos envolvidos na resolução do sistema não linear também permite a obtenção das curvas de força versus deflexão as quais serão utilizadas para a calibração do modelo de fratura estocástico.

4 METAMODELAGEM VIA REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

O problema de confiabilidade estrutural intrinsecamente relacionado à calibração Bayesiana descrito no tópico 2.1 requer uma análise de simulação de Monte Carlo do problema de fratura não-linear. Mesmo utilizando um modelo mecânico eficiente para a análise de fratura, realizar a simulação de Monte Carlo utilizando diretamente o modelo é extremamente custoso computacionalmente. Para contornar esse problema a utilização de Meta-modelos pode reduzir significativamente o custo computacional da simulação e viabilizar a análise de calibração Bayesiana. Meta-modelos são capazes de representar simplificadamente modelos de alta complexibilidade e, uma vez calibrados adequadamente, permitem descrever o comportamento do modelo com reduzido custo computacional. Para a calibração do meta-modelo é necessário um conjunto de realizações do modelo a ser reproduzido para um conjunto amostras de seus parâmetros de entrada.

A qualidade de ajuste da resposta do meta-modelo em relação ao modelo detalhado pode ser mensurada a partir do coeficiente de determinação r^2 , o qual pode ser expresso como:

$$r^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N_{data}} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{N_{data}} (y_i - \bar{y})^2} \quad (16)$$

sendo y_i os valores de resposta obtidos pelo modelo original, \bar{y} representa a média desses valores e \hat{y}_i são os valores obtidos com o meta-modelo calibrado. Quanto mais próximo de um for valor de r^2 , melhor será a previsão do meta-modelo.

Para validar a qualidade de ajuste dos meta-modelos, uma estratégia muito comum é deixar de usar algumas das realizações do modelo original durante o processo de calibragem. Portanto, calibra-se o meta-modelo com algumas das realizações e subsequentemente calcular-se o coeficiente de determinação entre as respostas do meta-modelo calibrado e as respostas do modelo original deixadas previamente de lado. Essa estratégia permite de maneira geral

quantificar a relevância do meta-modelo e, portanto, foi adotada no presente trabalho. O meta-modelo utilizado para simular o modelo coesivo de fratura é baseado em Redes Neurais Artificiais (RNA). Para as análises via redes neurais, utilizou-se o software COSSAN-X (Patelli, et al., 2012), o qual é baseado na biblioteca Fast Artificial Neural Network (Nissen, 2003).

A utilização de meta-modelos é muito comum em problemas de confiabilidade estrutural (Bucher & Bourgund, 1990). Logo, a ideia de utilizar um meta-modelo para melhorar a eficiência da CBCE é uma extensão natural. O procedimento típico pode ser descrito em três etapas: (i) exploração dos intervalos de amostragem dos parâmetros do modelo a partir de observações experimentais; (ii) calibração e validação do meta-modelo para garantir que as principais características do modelo original são capturadas com precisão; (iii) realizar a simulação de Monte Carlo utilizando o meta-modelo ao invés do modelo afim de reduzir custos computacionais.

5 APLICAÇÃO

O objetivo desse exemplo é obter as distribuições posteriores $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{D}, \mathcal{M}_k)$ e identificar qual dos modelos coesivos \mathcal{M}_k melhor representou os resultados experimentais de fratura em concreto. Os resultados experimentais foram obtidos por Zimmermann et al. (2014) para peças de concreto submetidas a um teste experimental padronizado de fratura por flexão em três pontos. Já os resultados numéricos para a obtenção das distribuições são obtidos com as redes neurais calibradas a partir dos modelos mecânicos de fratura coesiva. Por fim, após a determinação do modelo mais adequado, a respectiva distribuição posterior dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é testada para avaliar como o a resposta modelo mecânico calibrado se adequa às observações experimentais.

5.1 Descrição dos testes experimentais de referência

O teste padronizado de flexão em três pontos EN-14651 (2005) foi realizado experimentalmente por Zimmermann et al. (2014) em espécimes de concreto de classe de resistência C25/30 com entalhes iniciais no centro do vão das peças. Dois diferentes tipos de mistura que resultaram na mesma classe de resistência de concreto foram testados pelo autor. No entanto, no presente trabalho apenas uma das misturas foi considerada. Os testes de flexão em três pontos foram realizados em 5 corpos de prova após 176 dias de cura resultando em 5 curvas experimentais de força versus deslocamento. Mesmo mantendo as condições de ensaio fixas para os corpos de prova, significantes variações foram observadas nas curvas de força-deflexão, o que é comum acontecer em ensaios de peças de concreto. Para reproduzir numericamente as variações estatísticas observadas nas curvas experimentais é necessário calibrar um modelo estocástico de fratura. Sendo assim a calibração Bayesiana foi aplicada ao modelo de fratura de elementos de contorno e a seleção de modelos foi aplicada para determinar qual das leis coesivas adotadas resultou em uma melhor aproximação para o comportamento incerto da flexão em três pontos.

5.2 Calibração dos modelos

Nos modelos estocásticos de fratura coesiva, as incertezas foram abordadas apenas em relação ao módulo de elasticidade E e aos parâmetros de resistência à fratura. Todos os outros parâmetros, como as dimensões por exemplo, foram considerados como determinísticos. A

Figura 5 a seguir apresenta as dimensões e também as condições de contorno fixadas para o problema.

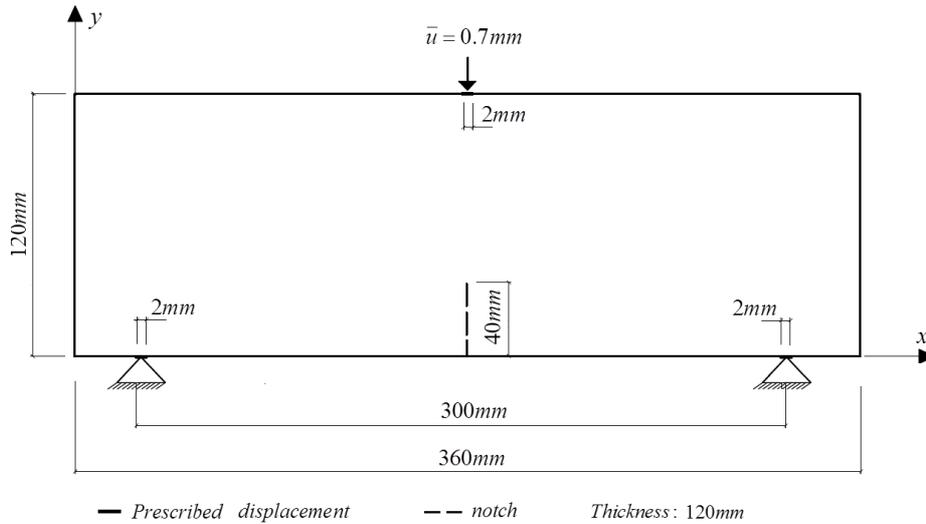


Figura 5. Dimensões e condições de contorno para o modelo de flexão em três pontos

O modelo numérico é adotado é composto por 146 elementos de contorno descontínuos de aproximação quadrática totalizando 438 nós. Conforme ilustra a Figura 5, as condições de contorno foram impostas por deslocamentos prescritos, os quais foram aplicados incrementalmente em 100 passos de carga. A Figura 6 a seguir apresenta a malha adotada para o modelo em sua configuração indeformada e também na configuração deformada com deslocamentos 20 vezes ampliados.

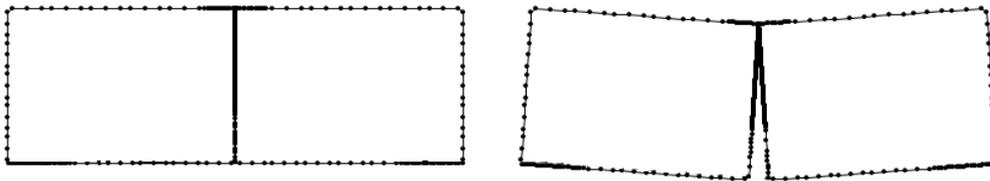


Figura 6. Discretização em elementos de contorno

Para a calibração do modelo estocástico é necessário obter as curvas numéricas de força-deslocamento. Essas curvas foram construídas considerando a deflexão e a força equivalente no ponto da face superior da viga onde os deslocamentos foram impostos. Três modelos estocásticos foram utilizados, $\mathcal{M} = [\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3]$, para representar o comportamento de fratura não-linear do concreto. No modelo \mathcal{M}_1 o comportamento coesivo é introduzido através da lei coesiva exponencial ilustrada na Figura 3a. Já o modelo \mathcal{M}_2 está associado com a lei coesiva bilinear de dois parâmetros apresentada na Figura 3b. A lei bilinear de quatro parâmetros (Figura 3c), por sua vez, é utilizada para descrever o comportamento coesivo do modelo \mathcal{M}_3 . Visando calibrar os modelos também em regime elástico, o módulo de Young E também foi considerado como um dos parâmetros θ em todos os casos. Portanto, para os modelos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 os parâmetros a serem calibrados são o módulo de elasticidade E , a resistência à tração f_t e a energia de fratura G_f , ou seja, $\theta = [E, f_t, G_f]$. Já no caso do modelo \mathcal{M}_3 tem-se $\theta = [E, f_t, G_t, a, b]$, sendo a e b as razões que definem o ponto de inflexão.

Em todos os casos é assumido uma distribuição estatística normal conjunta entre as deflexões e as respectivas cargas aplicadas para a construção da função de verossimilhança. Além disso, todas as distribuições a priori foram assumidas como sendo independentes e uniformemente distribuídas entre limites aceitáveis obtidos a partir de observações do trabalho de Zimmermann et al. (2014). Para todos os modelos \mathcal{M}_k as distribuições a priori do módulo elástico e dos parâmetros de fratura foram adotadas como:

$$p(E|\mathcal{M}_k) \sim U[33.28, 94.72] \text{ GPa}$$

$$p(f_t|\mathcal{M}_k) \sim U[1.36, 6.64] \text{ MPa}$$

$$p(G_f|\mathcal{M}_k) \sim U[100.13, 545.87] \text{ J/m}^2$$

No caso do modelo \mathcal{M}_3 , as distribuições a priori dos a and b foram assumidas como independentes e uniformemente distribuídas entre o intervalo [0.1 0.9].

A função de verossimilhança deve ser construída para cada modelo estocástico que se queira calibrar. A seguir a estratégia adotada para a calibração dos modelos coesivos é brevemente apresentada. Das curvas experimentais de força-deflexão, quatro valores de referência [d_1, d_2, d_3, d_4] foram extraídos e os correspondentes valores de carga foram registrados conforme ilustra a Figura 7. Como existem cinco curvas experimentais, 20 valores de carga são extraídos das observações experimentais no total.

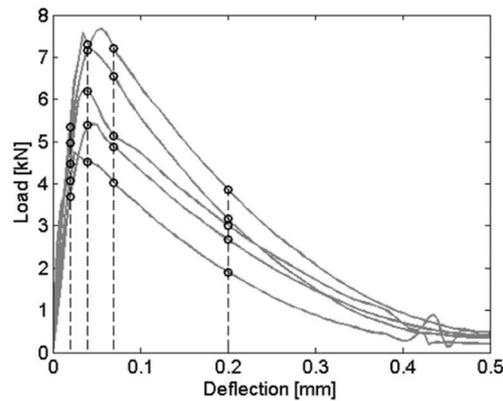


Figura 7. Seleção das deflexões de referência e extração das correspondentes cargas

As deflexões de referência foram definidas para o concreto em análise como $\mathbf{d} = [0.02, 0.04, 0.06, 0.19]$ mm. Esses valores foram fixados baseados nas cinco curvas experimentais. Três das quatro deflexões de referência foram adotadas em pontos próximos à região onde as curvas experimentais apresentavam os máximos valores de carga. Já a última deflexão foi fixada na região de amolecimento das curvas para levar em conta o comportamento quase-frágil do material.

É então assumido que as correspondentes cargas de referência (Quatro variáveis aleatórias com cinco amostras experimentais cada) seguem uma distribuição normal multivariada. Portanto, um vetor de médias e uma matriz de covariância podem ser obtidas como:

$$\mathbf{m}_D = [m_1, m_2, m_3, m_4]^t, \text{ and } \mathbf{C}_D = [c_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 4} \quad (17)$$

$$m_i = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 l_i^{(k)} \quad (18)$$

sendo $l_i^{(k)}$ a carga associada com a deflexão d_i da $k^{\text{ésima}}$ curva experimental. Por sua vez, os termos da matriz de covariância podem ser calculados como:

$$c_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^4 (l_i^{(k)} - m_i)(l_j^{(k)} - m_j) \quad (19)$$

Assumindo que as variáveis aleatórias de cargas de referência seguem uma distribuição normal multivariada, tem-se que a função de densidade de probabilidade associada às cargas experimentais pode ser expressa como:

$$f_N(\mathbf{l}) = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{C}_D|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{m}_D)^t \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{m}_D)\right) \quad (20)$$

Sendo \mathbf{l} um vetor contendo as quatro variáveis aleatórias de carga (associadas com as quatro deflexões de referência) e $|\cdot|$ é a designação para o determinante de uma matriz.

Para construir a função de verossimilhança entre o modelo estocástico com distribuições a priori de θ e os dados experimentais é necessário proceder simulações de fratura coesiva via modelo não calibrado para obter amostras das variáveis aleatórias de cargas numéricas, $\mathbf{l}(\theta) = [l_1(\theta), l_2(\theta), l_3(\theta), l_4(\theta)]^t$. Fixando um modelo \mathcal{M}_k e procedendo a amostragem numérica das cargas é possível escrever a função de verossimilhança como:

$$p(\mathcal{D}|\theta, \mathcal{M}_k) = f_N(\mathbf{l}(\theta)) = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{C}_D|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{l}(\theta) - \mathbf{m}_D)^t \mathbf{C}_D^{-1}(\mathbf{l}(\theta) - \mathbf{m}_D)\right) \quad (21)$$

para $k=1, 2, 3$.

Para proceder a simulação de Monte Carlo, necessária para a Calibração Bayesiana, é utilizada a meta-modelagem via RNA. As RNA's são calibradas a partir de 500 curvas numéricas obtidas para cada um dos modelos coesivos considerando as distribuições a priori dos parâmetros θ . Com o meta-modelo calibrado torna-se então viável, em termos de custo computacional, proceder a simulação de Monte Carlo. Como três modelos coesivos foram considerados, a calibração da RNA teve que ser realizada três vezes sendo, portanto necessário um total de 1500 análises numéricas via elementos de contorno.

A qualidade do ajuste entre os resultados via BEM e a resposta da RNA calibrada é de extrema importância para a garantir a validação da calibração Bayesiana dos modelos. No intuito de quantificar a qualidade desse ajuste, a RNA é primeiramente calibrada utilizando 450 amostras das 500 simulações via BEM. Por fim, o coeficiente de determinação r^2 é posteriormente calculado utilizando as 50 amostras que haviam sido deixadas de lado. Os valores observados na Tabela 1 retratam um ajuste extremamente bom entre o modelo de elementos de contorno e as redes neurais. Portanto, as distribuições posteriores obtidas utilizando as RNA que serão apresentadas no próximo tópico representam amostras estatisticamente aceitáveis para os parâmetros de entrada θ para os modelos de elementos de contorno condicionadas às curvas experimentais de referência.

Tabela 1. Qualidade de ajuste entre os resultados do BEM e a resposta das RNA calibradas

Deflexão de referência	r^2		
	Lei Exponencial	Lei Bilinear dois parâmetros	Lei Bilinear quatro parâmetros
0,02	0,9940	0,9646	0,9827
0,04	0,9994	0,9938	0,9914
0,06	0,9992	0,9981	0,9860
0,19	0,9994	0,9987	0,9938

5.3 Resultados

A calibração Bayesiana é então procedida para os três modelos \mathcal{M}_k e os resultados obtidos para a evidência é ilustrado na Figura 8 em forma de gráfico de barras para cada caso.

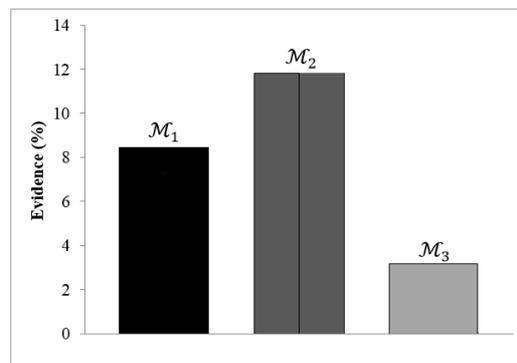


Figura 8. Valores de evidência para os modelos coesivos

Baseado nos resultados das evidências, o modelo que melhor se ajustou às respostas experimentais do concreto foi o modelo \mathcal{M}_2 , o qual é baseado na lei coesiva bilinear com dois parâmetros. Visto que o número de parâmetros a serem calibrados é maior para o modelo bilinear ilustrado na Figura 3c, era esperado que o modelo \mathcal{M}_3 fosse mais flexível e permitisse uma melhor captura de comportamentos estocásticos com grande complexibilidade. No entanto, para a adequada calibração dos parâmetros extras desse modelo seriam necessárias mais informações experimentais, i.e., mais de cinco curvas experimentais. Portanto, para cálculo da evidência, modelos de alta complexibilidade calibrados com poucas informações experimentais são penalizados (Ver Beck & Yuen (2004) e Muto & Beck (2008)). Sendo assim, de acordo com o apresentado na Figura 8 é possível observar que o modelo com a lei bilinear de quatro parâmetros foi o modelo estocástico menos apropriado.

As distribuições posteriores conjuntas em pares e individuais dos parâmetros $\theta = [E, f_t, G_f]$ são apresentadas na Figuras 9 para o caso do modelo com a melhor evidência, ou seja, modelo \mathcal{M}_2 . As distribuições a priori são ilustradas na figura em cinza enquanto que as distribuições posteriores são representadas em preto.

A partir dos resultados é possível observar que as distribuições dos parâmetros f_t e G_f são fortemente correlacionadas. Já a distribuição associada ao módulo de Young não parece ter sido afetada pela calibração Bayesiana, ou seja, a distribuição posterior permanece aproximadamente uniformemente distribuída no intervalo [33.28 x 94.72] *GPa*. Portanto, é

possível afirmar que a influência do módulo de Young nas curvas de força-deflexão dos testes de fratura em concreto é bem menor em comparação à influência dos parâmetros coesivos f_t e G_f . Para validar o modelo calibrado, 20 amostras da distribuição posterior apresentada na Figura 9 foram consideradas para reproduzir numericamente via modelo mecânico o comportamento estatístico das curvas experimentais. Esses resultados são apresentados na Figura 10 onde é possível observar que as respostas do modelo de elementos de contorno calibrado reproduzem satisfatoriamente o comportamento estocástico das observações experimentais. O ajuste entre as respostas experimentais e numéricas é ótimo na vizinhança dos pontos das deflexões de referência e permanece bom para as outras regiões das curvas.

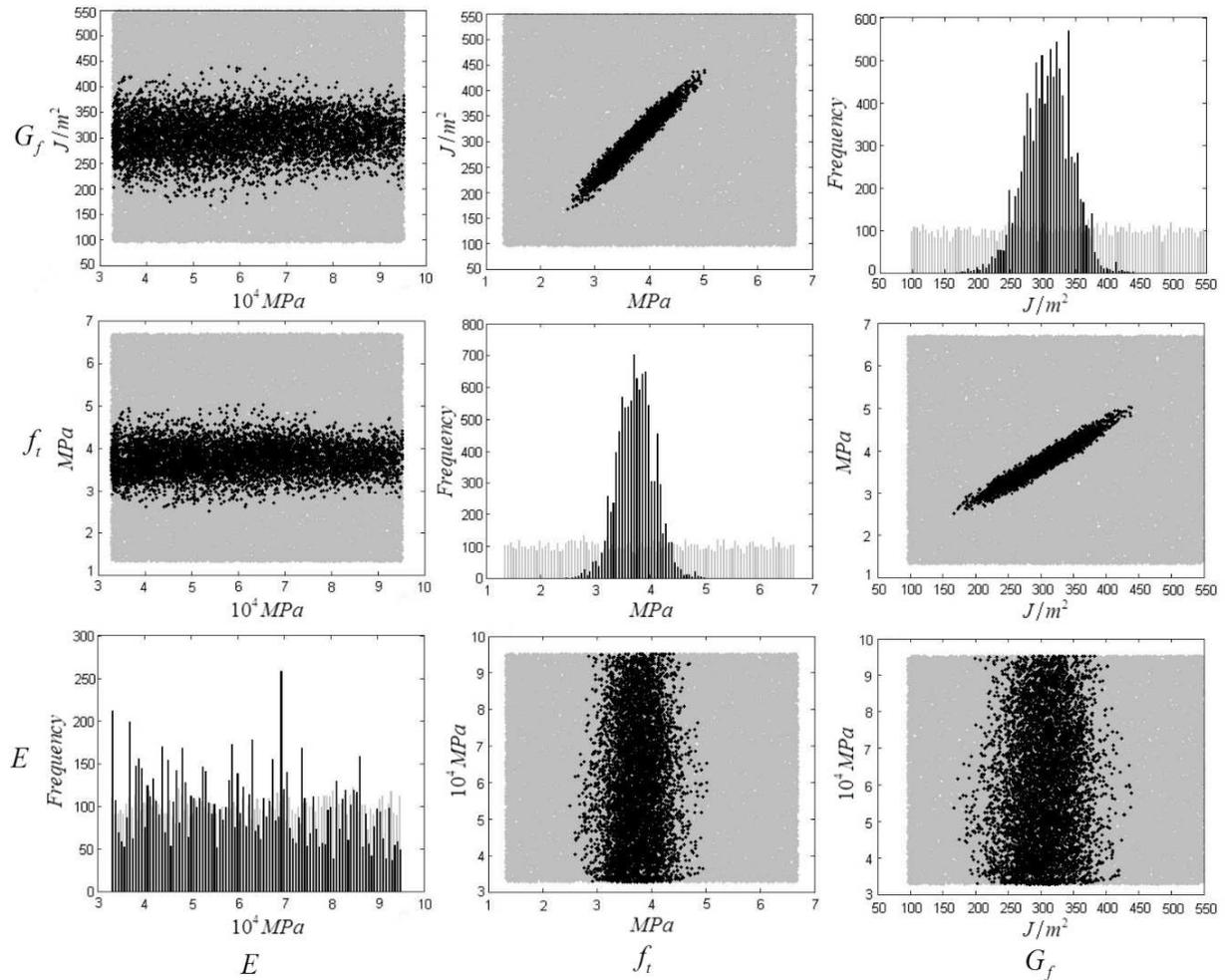


Figura 9. Distribuições a priori e a posteriori dos parâmetros do modelo \mathcal{M}_2 calibrados a partir dos resultados experimentais

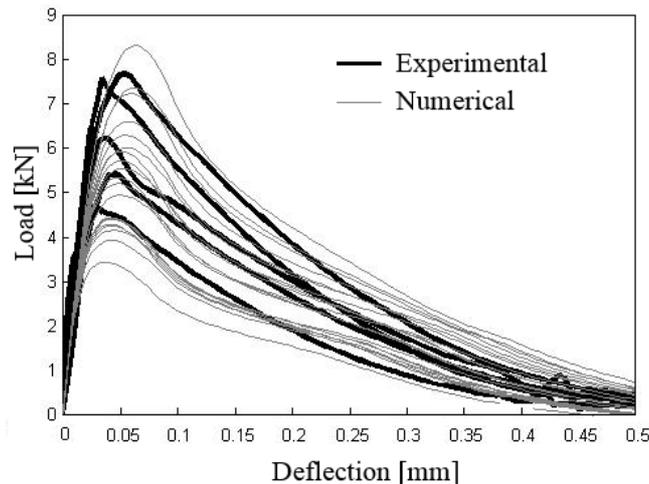


Figura 10. Curvas experimentais versus 20 respostas numéricas obtidas com os modelos estocásticos calibrados

6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentado um procedimento para realizar a calibração Bayesiana de modelos de fratura coesiva a partir de observações experimentais de fratura em vigas de concreto. Com o procedimento é também possível identificar entre distintos modelos estocástico calibrados qual melhor se ajusta às observações experimentais existentes. O modelo mecânico adotado para reproduzir o comportamento da fratura no concreto foi baseado no método dos elementos de contorno e no modelo coesivo de fratura. Três diferentes leis coesivas foram adotadas para descrever o comportamento de fratura não linear: Exponencial, Bilinear com dois parâmetros e Bilinear com quatro parâmetros. A calibração Bayesiana é então procedida para cada um desses modelos a partir da qual é possível descobrir amostras de distribuições estatísticas para os parâmetros de entrada dos modelos coesivos que melhor ajustam os resultados estocásticos numéricos aos experimentais. Foram procedidas 20 realizações do modelo calibrado mais adequado para validar o procedimento de calibração através da comparação das respostas numéricas com as respostas experimentais. A concordância observada entre as curvas numéricas e experimentais demonstra a precisão do modelo calibrado para reproduzir o comportamento estocástico da fratura no concreto, validando assim o procedimento.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a bolsa de estudos fornecida pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CPNq) nº 141565/2015-2 e ao projeto FAPESP nº 2014/18928-2. Essa pesquisa é parte das atividades previstas pelo projeto USP/COFECUB 2012.1.672.1.0.

REFERÊNCIAS

- Au, S.-K., & Beck, J. L. (2001). Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4), 263-277.
- Au, S.-K., & Beck, J. L. (2003). Subset Simulation and its Application to Seismic Risk Based on Dynamic Analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(8), 901-917.

- Bayes, T. (1763). "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53, 370-418.
- Beck, J. L., & Katafygiotis, L. S. (1998). Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(4), 380-391.
- Beck, J. L., & Yuen, K.-V. (2004). Model selection using response measurements: Bayesian probabilistic approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(2), 192-203.
- Beck, J., & Zuev, K. (2013). Asymptotically Independent Markov Sampling: a new MCMC scheme for Bayesian Inference. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 3(2), 445-474.
- Brebbia, C., & Dominguez, J. (1989). *Boundary Elements: An introductory Course*. New York: McGraw Hill.
- Bucher, C., & Bourgund, U. (1990). A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Journal of Structural Safety*, 7(1), 57-66.
- Calvi, A. (2005). "Uncertainty-based loads analysis for spacecraft: Finite element model validation and dynamic responses. *Computers & Structures*, 83(14), 1103-1112.
- Chen, J., & Hong, H. (1999). Review of dual boundary element methods with emphasis on hypersingular integrals and divergent series. *Applied Mechanics Reviews*, 52(1), 17-33.
- Ching, J., & Chen, Y. (2007). Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(7), 816-832.
- Cisilino, A., & Aliabadi, M. (1999). Three-dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 63, 713-733.
- Cordeiro, S., & Leonel, E. (2016). Fracture analysis of wood structures using a multi-region anisotropic boundary element formulation. *CILAMCE*.
- Datta, B. (2002). Finite-element model updating, eigenstructure assignment and eigenvalue embedding techniques for vibrating systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(1), 83-96.
- EN-12350-2. Testing fresh concrete – Part 2: Slump-test (2009).
- EN-14651. Test method for metallic fibered concrete – measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (lop), residual) (2005).
- Friswell, M. I., & Mottershead, J. E. (1995). "Finite element model updating in structural dynamics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.
- Hillerborg, A., Modeer, M., & Petersson, P.-E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6, 773-782.
- Hills, R., Pilch, M., Dowding, K., Red-Horse, J., Paez, T., Babuška, I., & Tempone, R. (2008). Validation Challenge Workshop. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(29-32), 2375-2380.
- Hong, H., & Chen, J. (1988). Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(6), 1028-1044.

- Jaynes, E. (2003). *Probability theory: The logic of science*. Cambridge, UK: Cambridge University.
- Katafygiotis, L. S., & Beck, J. L. (1998). Updating models and their uncertainties. II: Model identifiability. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4), 463-467.
- Leonel, E. D., Venturini, W., & Chateauneuf, A. (2011). A BEM model applied to failure analysis of multi-fractured structures. *Engineering Failure Analysis*, 18, 1538-1549.
- Leonel, E., & Venturini, W. (2010). Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 122-129.
- Muto, M., & Beck, J. (2008). Bayesian updating and model class. *Journal of Vibration and Control*, 14(1-2), 7-34.
- Nataf, A. (1962). *Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données (in french)*. Paris: Académie des Sciences.
- Nissen, S. (2003). *Implementation of a fast artificial neural network library (FANN)*. Department of Computer Science University of Copenhagen (DIKU).
- Oliveira, H., & Leonel, E. (2013). Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, 111, 86-97.
- Patelli, E., Panayirci, H. M., Broggi, M., Goller, B., Beaurepaire, P., Pradlwarter, H. J., & Schuëller, G. I. (2012). General purpose software for efficient uncertainty management of large finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 51, 31-48.
- Portela, A., Aliabadi, M., & Rooke, D. (1992). The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1269-1287.
- Saleh, A., & Aliabadi, M. (1995). Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 51, 533-545.
- Straub, D., & Papaioannou, I. (2015). Bayesian Updating with Structural Reliability Methods. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(3), 04014134.
- Zimmermann, T., Strauss, A., Lehký, D. D., & Keršner, Z. (2014). Stochastic fracture-mechanical characteristics of concrete based on experiments and inverse analysis. *Construction and Building Materials*, 73, 535-543.
- Zuev, K. M., Beck, J. L., Au, S.-K., & Katafygiotis, L. S. (2012). Bayesian post-processor and other enhancements of Subset Simulation for estimating failure probabilities in high dimensions. *Computers & Structures*, 92-93, 283-296.