



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## VIBRAÇÕES LIVRES ACOPLADAS EM CASCAS CILÍNDRICAS CONTENDO FLUIDO E CONECTADAS COM PLACAS DE FUNDO APOIADAS EM BASE ELÁSTICA

**Neander Berto Mendes**

**Lineu José Pedroso**

neanderberto@hotmail.com

lineu@unb.br

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil (PECC) - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura (GDPE). Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-970, Brasília-DF.

**Paulo Marcelo Vieira Ribeiro**

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Rua Acadêmico Hélio Ramos, s/n Cidade Universitária, 50.740-530, Recife, PE, Brasil.

**Resumo.** Neste trabalho são estudadas as vibrações livres acopladas de um tanque preenchido com um líquido invíscido e incompressível com uma superfície livre ortogonal ao eixo do tanque. O tanque é modelado por uma casca cilíndrica circular simplesmente apoiada e conectada a uma placa circular simplesmente apoiada por uma mola distribuída rotacional circunferencial artificial de rigidez apropriada. A placa é considerada assentada em uma fundação elástica de Winkler. Os efeitos das ondas de superfície livre e da pressão hidrostática do líquido são desprezados. Os modos de “bulging” (deformadas das paredes do tanque que oscilam com o líquido) da estrutura são investigados. A solução apresentada na literatura (Amabili, 1997) é obtida como um problema de autovalor pelo uso da expansão de Rayleigh-Ritz dos modos de vibração e então minimizando-se o quociente de Rayleigh para vibrações acopladas. Os efeitos da rigidez da fundação de Winkler e da rigidez das molas na junção casca-placa são analisados para tanques preenchidos com água. Os resultados

*apresentados são comparados com resultados numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos (MEF) via ANSYS.*

**Palavras-chave:** *Vibrações Livres, Sistema Casca-Placa, Elementos Finitos.*

## 1 INTRODUÇÃO

Baseado em artigo de Amabili (1997), o presente artigo relata um estudo de um tanque preenchido com um líquido invíscido e incompressível tendo uma superfície livre ortogonal ao eixo do tanque. O tanque é modelado por uma casca cilíndrica circular simplesmente apoiada conectada a uma placa circular simplesmente apoiada por uma mola distribuída rotacional artificial de rigidez oportuna. A placa é considerada como sendo assentada em uma fundação elástica Winkler. Este modelo é bastante realista porque a conexão entre a placa e a casca proporciona uma restrição recíproca que pode ser assumida como sendo um apoio simples. Em muitas aplicações, o topo do tanque é fechado por um diafragma delgado ou por um anel que restringe os deslocamentos da casca de um modo semelhante àquele de um apoio simples (exceto pelos modos de flexão de viga). Além disso, o efeito da rigidez do solo pode também ser modelado pela fundação elástica Winkler. Os modos de *bulging* da estrutura são investigados e a solução - obtida como um problema de autovalor pelo uso do método de Rayleigh-Ritz por Amabili (1997) – é comparada com a solução obtida pelo MEF via Ansys.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Durante anos recentes, muitos artigos sobre vibrações de estruturas feitas pela junção de elementos simples têm sido publicados. Técnicas diferentes têm sido utilizadas, tais como o método da mola artificial [Yuan e Dickinson (1992), Cheng e Nicolas (1992), Yuan e Dickinson (1992), Yuan e Dickinson (1994)], o método da matriz de transferência [Yamada, et al. (1986)] e o método da receptância [Huang e Soedel (1993), Huang e Soedel (1993), Huang e Soedel (1993)]. Essas técnicas foram aplicadas por alguns autores a estruturas casca cilíndrica - placa circular [Cheng e Nicolas (1992), Cheng (1994)].

O método de Rayleigh-Ritz tem provado ser muito eficiente no estudo de estruturas complexas mas, de modo a obter resultados corretos, as funções de teste devem satisfazer todas as condições de contorno geométricas. Quando o método de Rayleigh-Ritz é aplicado a uma estrutura obtida pela junção de alguns componentes em conjunto, as condições de contorno requerem a continuidade dos deslocamentos translacional e rotacional entre as junções rígidas das subestruturas. Esta condição provoca muitos problemas na escolha das funções de teste corretas a utilizar para cada componente individual. O uso de molas artificiais nas junções permite que se possa superar essa dificuldade. Em particular, as juntas entre os componentes da estrutura são representadas por molas artificiais translacionais e rotacionais que são distribuídas ao longo de todo comprimento ou área conjunta. Obviamente, cada grau de liberdade envolvido na junção deve ser simulado por uma mola distribuída.

A casca cilíndrica circular com placa de fundo é a estrutura placa-casca mais simples e é também importante para aplicações de engenharia. Vibrações livres destas estruturas têm sido estudadas, p.e., por Cheng e Nicolas (1992) e por Huang e Soedel (1993). Cheng (1994) também estudou as vibrações livres quando a casca cilíndrica circular com placa de fundo é acoplada com uma cavidade acústica preenchida com fluido. Uma aplicação comum desta estrutura é o tanque; tanques são muitas vezes acoplados com um líquido tendo uma

superfície livre. Os tanques preenchidos com líquido têm duas famílias de modos: *sloshing* e *bulging*. Modos de *sloshing* são causados pela oscilação da superfície livre do líquido, devido ao movimento de corpo rígido do container; esses modos são também afetados pela flexibilidade do container. As vibrações das paredes do tanque (placa de fundo e casca) recebem o nome de modos de *bulging* quando a amplitude de deslocamento da parede é dominante sobre aquela da superfície livre; neste caso, as paredes do tanque e a base oscilam com o líquido. O campo de velocidade do líquido em um tanque cilíndrico circular tem sido estudado por Bauer e Siekmann (1971). No entanto, eles consideraram a casca e a placa como sendo independentes e não acopladas; além disso, eles estavam interessados nos modos de *sloshing*.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1. Abordagem teórica para a estrutura casca-placa

Uma casca cilíndrica circular simplesmente apoiada feita de material isotrópico, homogêneo e linearmente elástico é considerada, de modo que a teoria de cascas de Flügge é aplicável. Uma placa circular delgada simplesmente apoiada é conectada a uma extremidade da casca e se apoia em uma fundação elástica de Winkler [Chiba (1994)]; assume-se também que a placa é feita de material isotrópico, homogêneo e linearmente elástico, de modo que a teoria de vibrações de placa de Kirchhoff [Leissa (1969)] é aplicável.

Quando uma placa é acoplada a uma casca circular cilíndrica, em geral três conexões de deslocamento e duas de inclinação devem ser consideradas, de acordo com a teoria de casca delgada clássica. No entanto, o tratamento completo do uso de cinco conexões não é necessário se se investiga apenas frequências mais baixas do sistema. Para esses modos, a placa pode ser assumida como sendo inelástica em seu plano e permitindo apenas deslocamentos transversais. Além disso, influências de deflexões na conexão nos planos tangenciais da casca podem ser desprezadas em relação a amplitudes transversais. Portanto apenas a inclinação radial no contorno da placa pode ser considerada como acoplada à inclinação axial da casca na extremidade de fundo. Uma abordagem similar foi utilizada em Faulkner (1969); em Huang e Soedel (1993) e Huang e Soedel (1993), a placa não foi conectada ao apoio simples da casca. No caso presente, apenas uma conexão é requerida; a casca e a placa são conectadas juntas por uma mola distribuída rotacional artificial de rigidez oportuna (Fig. 1) a fim de obter um tanque de raio  $a$  e altura  $L$ .

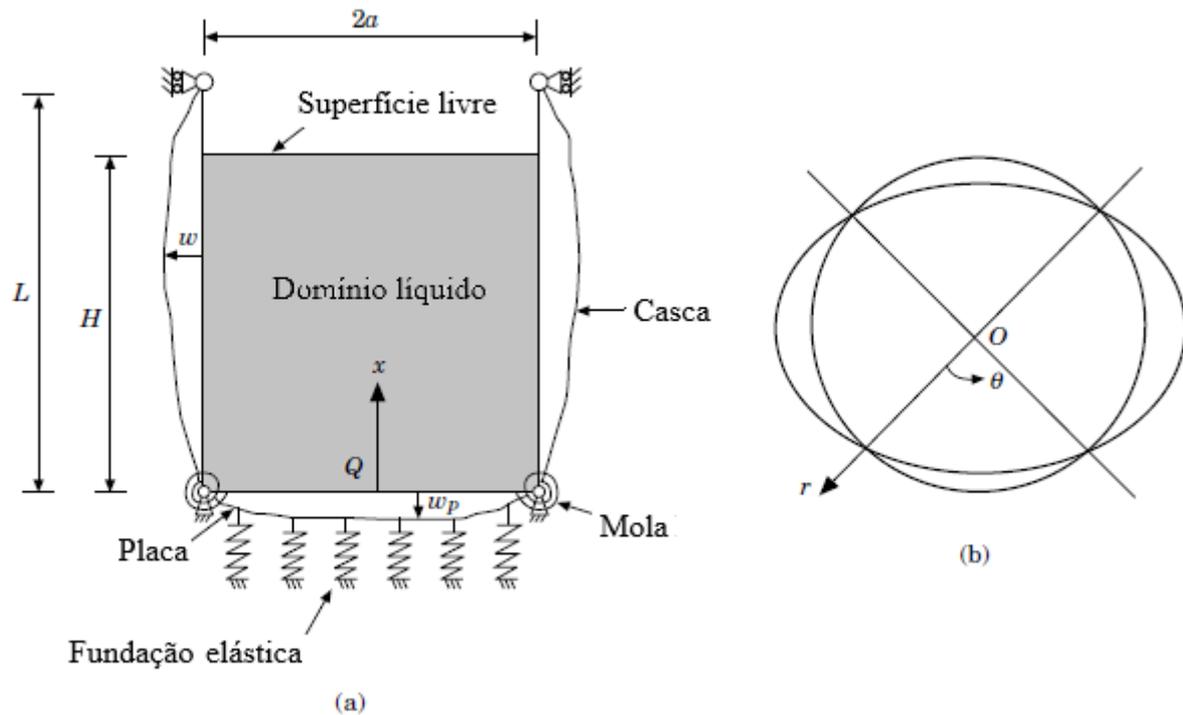


Figura 1 – Um diagrama do tanque e dos símbolos usados: (a) a seção transversal definida por  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ ; (b) o modo de vibração com  $n = 2$  diâmetros nodais na seção transversal definida por  $x = L/2$ . (Amabili, 1997, modificada)

Um sistema de coordenadas cilíndricas polares ( $O; r, \theta, z$ ) é introduzido, com o polo no centro da placa circular de fundo. Devido a simetria axial da estrutura, apenas modos de casca e de placa com o mesmo número  $n$  de diâmetros nodais são acoplados. Em particular, no estudo presente ambas as vibrações axissimétricas ( $n = 0$ ) e vibrações assimétricas ( $n > 0$ ) são investigadas. Adicionalmente, é interessante notar que, devido à simetria axial, para cada modo assimétrico existe um segundo modo tendo a mesma frequência e modo mas angularmente rotacionado por  $\pi/(2n)$ .

O método de Rayleigh-Ritz [Meirovitch (1986)] é aplicado para encontrar os modos de vibração do tanque cilíndrico circular. Portanto, o deslocamento radial  $w$  da parede da casca (veja Figura 1) pode ser dado pela expressão

$$w(x, \theta) = \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} q_s B_s \text{sen}(s\pi x/L), \quad (1)$$

onde  $n$  é o número de diâmetros nodais,  $q_s$  são parâmetros desconhecidos e  $B_s$  é uma constante que depende do critério de normalização adotado. Os autovetores de casca simples e vazia simplesmente apoiada [Leissa (1973)] são utilizados como funções admissíveis. Então a seguinte normalização é introduzida

$$(L/a)^2 \int_0^1 B_s^2 \text{sen}^2(s\pi l) dl = 1, \quad (2)$$

onde  $l = x/L$ . O resultado da integração dá

$$B_s = B = \sqrt{2}a/L \quad (3)$$

O deslocamento transversal,  $w_P$ , da placa pode ser dado por

$$w_P(r, \theta) = \cos(n\theta) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i \left[ A_{in} J_n \left( \frac{\lambda_{in} r}{a} \right) + C_{in} I_n \left( \frac{\lambda_{in} r}{a} \right) \right], \quad (4)$$

onde  $n$  e  $i$  são o número de diâmetros e círculos nodais, respectivamente,  $a$  é o raio da placa e  $\lambda_{in}$  é um parâmetro de frequência bem conhecido que está relacionado à frequência natural da placa;  $J_n$  e  $I_n$  são a função de Bessel e a função modificada de Bessel de ordem  $n$ , respectivamente. Na Equação (4), as autofunções da placa simples, simplesmente apoiada na borda e vibrando no vácuo, são assumidas como funções admissíveis. As funções de teste são linearmente independentes e constituem um conjunto completo. Valores de  $\lambda_{in}$  para placas simplesmente apoiadas são dados, por exemplo, na referência [Leissa e Narita (1980)]. Para simplificar os cálculos, as constantes dos modos de vibração  $A_{in}$  e  $C_{in}$ , são normalizadas de modo a ter

$$\int_0^1 [A_{in} J_n(\lambda_{in} \rho) + C_{in} I_n(\lambda_{in} \rho)] d\rho = 1, \quad (5)$$

onde  $\rho = r/a$ . O resultado da integração da Equação (5) é

$$\left\{ \frac{A_{in}^2}{2} \left[ (J'_n(\lambda_{in}))^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_{in}^2}\right) J_n^2(\lambda_{in}) \right] - \frac{C_{in}^2}{2} \left[ (I'_n(\lambda_{in}))^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_{in}^2}\right) I_n^2(\lambda_{in}) \right] + \frac{A_{in} C_{in}}{\lambda_{in}} [J_n(\lambda_{in}) I_{n+1}(\lambda_{in}) + I_n(\lambda_{in}) J_{n+1}(\lambda_{in})] \right\} = 1, \quad (6)$$

onde  $J'_n$  e  $I'_n$  indicam as derivadas de  $J_n$  e  $I_n$  em relação ao argumento. A razão das constantes dos modos de vibração é  $\frac{A_{in}}{C_{in}} = -\frac{I_n(\lambda_{in})}{J_n(\lambda_{in})}$  para placas simplesmente apoiadas.

A fim de resolver o problema, avalia-se as energias cinética e potencial da casca, placa, líquido, fundação elástica e mola de acoplamento. A energia cinética de referência [Meirovitch (1986)] da casca, desprezando a inércia tangencial, é dada por

$$T_s^* = \frac{1}{2} \rho_s h_s B^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L w^2 dx d\theta = \frac{1}{2} \rho_s a h_s \frac{L}{2} B^2 \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} q_s^2, \quad (7)$$

onde  $h_s$  é a espessura da casca,  $\rho_s$  é a densidade do material da casca ( $\text{kg m}^{-3}$ ) e

$$\psi_n = \begin{cases} 2\pi, & \text{para } n = 0 \\ \pi, & \text{para } n > 0 \end{cases}.$$

Na Equação (7) a ortogonalidade da função seno é utilizada. Similarmente, a energia cinética de referência da placa é dada por

$$T_P^* = \frac{1}{2} \rho_P h_P \int_0^{2\pi} \int_0^L w_P^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} \rho_P a^2 h_P \psi_n \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i^2, \quad (8)$$

onde  $h_P$  é a espessura da placa e  $\rho_P$  é a densidade do material da placa ( $\text{kg m}^{-3}$ ). Na Equação (8) a ortogonalidade das funções de Bessel (modos de vibração de placa) é utilizada. Então, a energia potencial máxima de cada modo de casca simples e vazia é igual ao produto da energia cinética de referência do mesmo modo pela frequência circular ao quadrado  $\omega_s^2$  desse modo. Além disso, em vibrações acopladas, devido à expansão em séries do modo de vibração, a energia potencial é a soma das energias de cada componente simples do modo.

Por conseguinte a energia potencial máxima da casca é dada por

$$V_S = \frac{1}{2} \rho_S h_S a \frac{L}{2} B^2 \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} q_s^2 \omega_s^2, \quad (9)$$

onde  $\omega_s$  são as frequências circulares do modos de flexão da casca simplesmente apoiada que podem ser computadas pelo uso da teoria de cascas de Flügge [Leissa (1973)]. Similarmente, a energia potencial máxima da placa é a soma das energias cinéticas de referência das autofunções da placa no vácuo multiplicadas por  $\tilde{\omega}_{in}^2$ ,

$$V_P = \frac{1}{2} \rho_P a^2 h_P \psi_n \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i^2 \tilde{\omega}_{in}^2 = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \psi_n \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i^2 \lambda_{in}^4, \quad (10)$$

onde a frequência da placa circular  $\tilde{\omega}_{in}$  é relacionada ao parâmetro de frequência  $\lambda_{in}$  por

$$\tilde{\omega}_{in} = \left( \frac{\lambda_{in}^2}{a^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho_P h_P}} \text{ e } D = \frac{E_P h_P^3}{12(1-\nu_P^2)}$$

é a rigidez flexional da placa;  $\nu_P$  e  $E_P$  são a razão de Poisson e o módulo de Young da placa, respectivamente. A energia potencial máxima da mola distribuída rotacional conectando a placa e a casca é

$$V_C = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} c_I \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} - \left( \frac{\partial w_P}{\partial r} \right)_{r=a} \right]^2 a d\theta, \quad (11)$$

onde  $c_I$  é a rigidez da mola (Nm/m). É interessante notar que o sinal para rotações é atribuído, considerando que ambos  $w$  e  $w_P$  são considerados positivos para fora do tanque (ver Figura 1), de modo que ambos os deslocamentos dão uma contribuição positiva ao incremento do ângulo entre a casca e a placa, o que proporciona compressão à mola rotacional. A rotação da extremidade da casca em  $x = 0$  é dada por

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{B\pi}{L} \cos(n\theta) \sum_{s=1}^{\infty} q_s s. \quad (12)$$

A rotação da borda da placa, alterada pelo sinal, é

$$\left( \frac{\partial w_P}{\partial x} \right)_{r=a} = \cos(n\theta) \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i \frac{\lambda_{in}}{a} [A_{in} J_n'(\lambda_{in}) + C_{in} I_n'(\lambda_{in})]. \quad (13)$$

Assim, utilizando as Equações (11) – (13), a energia potencial máxima armazenada pela mola de acoplamento é dada pela Equação (14)

$$V_C = \frac{1}{2} c_I \left\{ B^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_s q_j s j + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{q}_i \tilde{q}_h \frac{\lambda_{in}}{a} \frac{\lambda_{hn}}{a} [A_{in} J_n'(\lambda_{in}) + C_{in} I_n'(\lambda_{in})] \times [A_{hn} J_n'(\lambda_{hn}) + C_{hn} I_n'(\lambda_{hn})] - 2B \frac{\pi}{L} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} q_s \tilde{q}_i s \frac{\lambda_{in}}{a} [A_{in} J_n'(\lambda_{in}) + C_{in} I_n'(\lambda_{in})] \right\} a \psi_n. \quad (14)$$

A energia potencial máxima armazenada pela fundação elástica de Winkler é

$$V_B = \frac{1}{2} k_I \int_0^{2\pi} \int_0^a w_P^2 r dr d\theta = \frac{1}{2} k_I \psi_n a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i^2, \quad (15)$$

onde  $k_I$  é a rigidez da fundação ( $N m^{-3}$ ).

### 3.2. Interação líquido-estrutura

O tanque é considerado parcialmente preenchido com um líquido invíscido e incompressível, com uma superfície livre ortogonal ao eixo do tanque; a superfície livre está a uma distância  $H$  da placa de fundo (ver Figura 1). As ondas de superfície livre, tensão superficial do líquido e efeitos da pressão hidrostática são desprezados no presente estudo [Morand e Ohayon (1992)], de modo que apenas energia cinética pode ser atribuída ao líquido; por conseguinte os modos de *sloshing* do tanque não são obtidos pela presente abordagem e apenas os modos de *bulging* são investigados. Como consequência dessas hipóteses, a superfície livre não exibe uma capacidade intrínseca de oscilação; assim, a superfície livre do líquido não está sujeita a uma força de restauração uma vez movida.

### 3.2.1. Energia cinética do líquido

Para um líquido incompressível e invíscido, o potencial de velocidade satisfaz a Equação de Laplace  $\nabla^2 \phi(r, \theta, x) = 0$ . No caso estudado, o potencial de velocidade do líquido, utilizando o princípio da superposição, é descrito pela soma  $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$ , onde a função  $\phi^{(1)}$  descreve o potencial de velocidade da casca flexível considerando a placa de fundo como rígida e a função  $\phi^{(2)}$  descreve o potencial de velocidade do líquido da placa de fundo flexível considerando a casca como rígida. Assim, utilizando o teorema de Green para funções harmônicas [Lamb (1945)], a energia cinética de referência do líquido pode ser calculada pela integração sobre o contorno do líquido,

$$T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L \int_S (\phi^{(1)} + \phi^{(2)}) \frac{\partial(\phi^{(1)} + \phi^{(2)})}{\partial z} dS, \quad (16)$$

onde  $\rho_L$  é a densidade de massa do líquido ( $\text{kg m}^{-3}$ ),  $z$  é a direção normal em qualquer ponto à superfície  $S$  e é orientada para fora,  $S = S_1 + S_2$ ,  $S_1$  é a superfície lateral da casca e  $S_2$  é a superfície da placa. Integração sobre a superfície livre do líquido não é necessária; de fato, as condições de contorno são

$$\left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial r}\right)_{r=\alpha} = w(x, \theta), \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, (\phi^{(1)})_{x=H} = 0, \quad (17a-c)$$

e

$$\left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=0} = -w_p(r, \theta), \left(\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial r}\right)_{r=\alpha} = 0, (\phi^{(2)})_{x=H} = 0, \quad (18a-c)$$

de modo que a expansão da Equação (16) na superfície livre é zero. A pressão dinâmica zero na superfície livre é assumida como uma condição de contorno como uma consequência da hipótese assumida de negligenciar as ondas de superfície livre. O resultado da integração da Equação (16) pode ser dividido em quatro diferentes termos utilizando as Equações (17a) e (18a).

$$T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L \int_{S_1} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)}) w dS + \frac{1}{2} \rho_L \int_{S_2} (\phi^{(1)} + \phi^{(2)}) w_p dS$$

$$= T_L^{*(1)} + T_L^{*(1-2)} + T_L^{*(2-1)} + T_L^{*(2)} \quad (19)$$

### 3.2.2. Interação líquido-casca

Nesta seção, o problema de vibração de uma casca flexível simplesmente apoiada em um tanque cilíndrico circular com uma base rígida é considerado. Um grande número de artigos sobre vibrações de cascas preenchidas com fluido têm sido publicados; vale a pena lembrar, por exemplo, referências [Berry e Reissner (1958), Lindholm et al. (1962), Kondo, H. (1981), Yamaki et al. (1984), Gupta e Hutchinson (1988), Amabili e Dalpiaz (1995), Amabili (1996)]. O potencial de velocidade do líquido é assumido como sendo da forma

$$\phi^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} q_s \Phi_s^{(1)}. \quad (20)$$

As funções  $\Phi_s^{(1)}$  são dadas por

$$\Phi_s^{(1)}(x, r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} I_n \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{r}{H} \right) \cos(n\theta) \cos \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{x}{H} \right). \quad (21)$$

onde  $A_{mn}$  são coeficientes que dependem dos inteiros  $m$ ,  $n$  e  $s$ . As funções  $\Phi_s^{(1)}$  satisfazem a equação de Laplace e as duas condições de contorno dadas nas Equações (17 b, c); a condição dada na Equação (17a) é utilizada para calcular os coeficientes  $A_{mn}$ :

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{a}{H} \right) \cos(n\theta) \cos \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{x}{H} \right) = B \operatorname{sen} \left( s \pi \frac{x}{L} \right). \quad (22)$$

Se se multiplicar a Equação (22) por

$$\cos \left( \frac{2j-1}{2} \pi \frac{x}{H} \right)$$

e então integrar entre  $0$  e  $H$ , utilizando a bem conhecida propriedade das funções ortogonais, obtém-se

$$\Phi_s^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4B}{(2m-1)\pi} \sigma_{ms} \left[ \frac{I_n \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{r}{H} \right)}{I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{a}{H} \right)} \right] \cos(n\theta) \cos \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{x}{H} \right). \quad (23)$$

onde

$$\sigma_{ms} = \frac{\left[ \frac{s}{L} + (-1)^m \frac{2m-1}{2H} \operatorname{sen} \left( s \pi \frac{H}{L} \right) \right]}{\left( \frac{s^2}{L^2} - \frac{4m^2 - 4m + 1}{4H^2} \right) \pi} \text{ se } s \neq \frac{2m-1}{2} \frac{L}{H}, \quad (24a)$$

ou

$$\sigma_{ms} = \frac{L}{2s\pi} \text{ se } s = \frac{2m-1}{2} \frac{L}{H}, \quad (24b)$$

Portanto, o termo  $T_L^*$  da energia cinética de referência do líquido é dada por

$$T_L^{*(1)} = \frac{1}{2} \rho_L \int_0^{2\pi} \int_0^H (\phi^{(1)})_{r=a} \omega a d\theta dx = \frac{1}{2} \rho_L B^2 a \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_s q_j \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4 \sigma_{ms} \sigma_{jm} I_n \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{a}{H} \right)}{(2m-1) \pi I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \pi \frac{a}{H} \right)}$$

(25)

### 3.2.3. Interação líquido-placa

Nesta seção, o problema de vibração da placa de fundo flexível simplesmente apoiada é estudado com a casca cilíndrica circular considerada rígida [Bauer e Siekmann (1971), Chiba (1994), Amabili e Dalpiaz (1995), Amabili (1996), Bhuta e Koval (1964), Chiba (1992), Chiba (1993)]. O potencial de velocidade do líquido  $\phi^{(2)}$  é assumido como sendo da forma

$$\phi^{(2)} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{q}_i \Phi_i^{(2)}. \tag{26}$$

As funções  $\Phi_i^{(2)}$ , para modos axissimétricos ( $m = 0$ ), são expressas como

$$\Phi_i^{(2)}(r, \theta, x) = K_{i00}(x - H) + \sum_{k=1}^{\infty} K_{i0k} J_0 \left( \varepsilon_{0k} \frac{r}{a} \right) \left[ \frac{\cosh(\varepsilon_{0k} \frac{x}{a}) - \sinh(\varepsilon_{0k} \frac{x}{a})}{\tanh(\varepsilon_{0k} \frac{H}{a})} \right], \tag{27}$$

e, para modo assimétricos ( $m > 0$ ), como

$$\Phi_i^{(2)}(r, \theta, x) = \cos(n\theta) \sum_{k=0}^{\infty} K_{ink} J_n \left( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) \left[ \frac{\cosh(\varepsilon_{nk} \frac{x}{a}) - \sinh(\varepsilon_{nk} \frac{x}{a})}{\tanh(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a})} \right], \tag{28}$$

onde  $\varepsilon_{nk}$  são soluções da equação

$$J_n'(\varepsilon_{nk}) = 0. \tag{29}$$

As funções  $\Phi_i^{(2)}$  satisfazem as Equações (18b,c). As constantes  $K_{ink}$  são calculadas de modo a satisfazer a Equação (18a). Para modos assimétricos,

$$\sum_{k=0}^{\infty} K_{ink} J_n \left( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) \frac{\varepsilon_{nk}}{a \tanh(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a})} = \left[ A_{in} J_n \left( \frac{\lambda_{in} r}{a} \right) + C_{in} I_n \left( \frac{\lambda_{in} r}{a} \right) \right]. \tag{30}$$

Se se multiplicar a Equação (30) por  $\left(\frac{1}{a^2}\right) J_n \left( \varepsilon_{nk} \frac{r}{a} \right) r$  e então integrar, isso resulta em

$$K_{ink} = \frac{(A_{in} \beta_{ink} + C_{in} \gamma_{ink})}{\alpha_{nk} \varepsilon_{nk}} a \tanh \left( \varepsilon_{nk} \frac{H}{a} \right), \tag{31}$$

onde

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{n}{\varepsilon_{nk}} \right)^2 \right] [J_n(\varepsilon_{nk})]^2, \tag{32}$$

$$\beta_{nk} = \frac{\lambda_{in}}{\varepsilon_{nk}^2 + \lambda_{in}^2} J_n'(\lambda_{in}) J_n(\varepsilon_{nk}), \tag{33}$$

$$\gamma_{ink} = \frac{\lambda_{in}}{\varepsilon_{nk}^2 + \lambda_{in}^2} I_n'(\lambda_{in}) J_n(\varepsilon_{nk}). \quad (34)$$

Então, o termo  $T_L^{*(2)}$  da energia cinética de referência do líquido é dada por

$$T_L^{*(2)} = \frac{1}{2} \rho_L \alpha^3 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{q}_i \tilde{q}_h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_{in} \beta_{ink} + C_{in} \gamma_{ink})}{\alpha_{nk} \varepsilon_{nk}} (A_{hn} \beta_{hnk} + C_{hn} \gamma_{hnk}) \tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right), \quad (35)$$

Para modos axissimétricos, a Equação (30) é substituída por

$$-K_{i00} + \sum_{k=1}^{\infty} K_{i0k} J_0\left(\varepsilon_{0k} \frac{r}{a}\right) \frac{\varepsilon_{0k}}{a \tanh\left(\varepsilon_{0k} \frac{H}{a}\right)} = \left[ A_{i0} J_0\left(\frac{\lambda_{i0} r}{a}\right) + C_{i0} I_0\left(\frac{\lambda_{i0} r}{a}\right) \right], \quad (36)$$

A constante  $K_{i00}$  é dada por

$$\frac{K_{i00}}{2} = - \int_0^1 [A_{i0} J_0(\lambda_{i0} \rho) + C_{i0} I_0(\lambda_{i0} \rho)] \rho d\rho = - \tau_{i0}, \quad (37)$$

onde [Wheelon (1968)]

$$\tau_{i0} = \left[ \left(\frac{A_{i0}}{\lambda_{i0}}\right) J_1(\lambda_{i0}) + \left(\frac{C_{i0}}{\lambda_{i0}}\right) I_1(\lambda_{i0}) \right]. \quad (38)$$

As constantes  $K_{i0k}$ , para  $k > 0$ , são obtidas pela Equação (31) calculada para  $n = 0$ ; portanto para modos axissimétricos, o termo  $T_L^{*(2)}$  da energia cinética de referência do líquido é dada por

$$T_L^{*(2)} = \frac{1}{2} \rho_L \alpha^3 \psi_n \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{q}_i \tilde{q}_h \left[ 2 \frac{H}{a} \tau_{i0} \tau_{h0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A_{i0} \beta_{i0k} + C_{i0} \gamma_{i0k})}{\alpha_{0k} \varepsilon_{0k}} (A_{h0} \beta_{h0k} + C_{h0} \gamma_{h0k}) \tanh\left(\varepsilon_{0k} \frac{H}{a}\right) \right], \quad (39)$$

### 3.2.4. Efeito de acoplamento do líquido

Na seção 3.2.1 foi mostrado que a energia cinética de referência do líquido não é dada pela simples soma de  $T_L^{*(1)}$  e  $T_L^{*(2)}$ , mas é dada por quatro termos; esse fato pode ser justificado como efeito de acoplamento do líquido. De fato, mesmo que se elimine a presença da mola de acoplamento entre a placa e a casca, esses dois elementos resultam, acoplados pela presença do líquido dentro do tanque. Em particular, a quantidade  $T_L^{*(1-2)}$ , para modos assimétricos, é dada por

$$T_L^{*(1-2)} = \frac{1}{2} \rho_L \int_{S_1} (\phi^{(2)})_{r=a} w dS = \frac{1}{2} \rho_L B \alpha^2 \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_s \tilde{q}_i \sum_{k=1}^{\infty} K_{ink} J_n(\varepsilon_{nk}) \left[ \frac{\zeta_{snk}^{(1)}}{\zeta_{snk}^{(2)}} - \frac{\zeta_{snk}^{(2)}}{\tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right)} \right], \quad (40)$$

onde as constantes  $K_{ink}$  são dadas pela Equação (31) e

$$\zeta_{snk}^{(1)} = \frac{\left(\frac{s\pi a}{L}\right) - \left(\frac{s\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{s\pi H}{L}\right) \cosh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right) + \varepsilon_{nk} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi H}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right)}{\varepsilon_{nk}^2 + \frac{s^2 \pi^2 a^2}{L^2}}, \quad (41)$$

$$\zeta_{snk}^{(2)} = \frac{-\left(\frac{s\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{s\pi H}{L}\right) \operatorname{senh}\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right) + \varepsilon_{nk} \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi H}{L}\right) \cosh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right)}{\varepsilon_{nk}^2 + \frac{s^2 \pi^2 a^2}{L^2}}. \quad (42)$$

A quantidade  $T_L^{*(1-2)}$ , para modos axissimétricos ( $n = 0$ ),

$$T_L^{*(1-2)} = \frac{1}{2} \rho_L B a^2 \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_s \tilde{q}_i \left\{ K_{i00} \zeta_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} K_{i0k} J_0(\varepsilon_{0k}) \left[ \zeta_{s0k}^{(1)} - \frac{\zeta_{s0k}^{(2)}}{\tanh\left(\varepsilon_{0k} \frac{H}{a}\right)} \right] \right\} \quad (43)$$

onde

$$\zeta_s^{(0)} = \frac{-\left(\frac{s\pi a}{L}\right) H + a \operatorname{sen}\left(\frac{s\pi H}{L}\right)}{\left(\frac{s\pi a}{L}\right)^2}, \quad (44)$$

O último componente da energia cinética de referência do líquido é o termo  $T_L^{*(2-1)}$  que tem a seguinte expressão para ambos os modos axissimétrico e assimétrico:

$$T_L^{*(2-1)} = \frac{1}{2} \rho_L \int_{S_2} (\phi^{(1)})_{x=0} w_p dS = \frac{1}{2} \rho_L B a^2 \psi_n \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} q_s \tilde{q}_i \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{4 \sigma_{ms}}{(2m-1) \pi I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)} \right\} (A_{in} \zeta_{imn}^{(1)} + C_{in} \zeta_{imn}^{(2)}) \quad (45)$$

Aqui, as constantes  $\sigma_{ms}$  são dadas pelas Equações (24 a,b) e

$$\zeta_{imn}^{(1)} = \frac{\frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H}}{\left(\frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H}\right)^2 + \lambda_{in}^2} J_n(\lambda_{in}) I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right), \quad (46)$$

$$\zeta_{imn}^{(2)} = \frac{\lambda_{in} I_n \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right) I_n'(\lambda_{in}) - \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} I_n(\lambda_{in}) I_n' \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)}{\lambda_{in}^2 - \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)^2}. \quad (47)$$

### 3.3. O problema do autovalor

Para o cálculo numérico de frequências naturais e os parâmetros desconhecidos descrevendo os modos, apenas  $N$  termos na expansão de  $w$ , Equação (1), e  $\tilde{N} + 1$  na expansão de  $w_p$ , Equação (4), são considerados, onde  $N$  e  $\tilde{N}$  são escolhidos grandes o suficiente para se obter a precisão necessária para a solução. Por isso, todas as energias são dadas por

somatórios finitos. É conveniente introduzir uma notação vetorial; o vetor  $\mathbf{q}$  de parâmetros desconhecidos é definido por

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{\tilde{q}\} \end{Bmatrix}, \quad (48)$$

onde

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \text{ e } \{\tilde{q}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_0 \\ \vdots \\ \tilde{q}_N \end{Bmatrix} \quad (49)$$

A energia potencial máxima da casca torna-se

$$V_S = \frac{1}{2} \rho_S h_S a \frac{L}{2} \psi_n B^2 \mathbf{q}^T \mathbf{K}_S \mathbf{q}. \quad (50)$$

A matriz particionada  $\mathbf{K}_S$  é

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\omega}_1] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad (51)$$

onde os elementos da diagonal da submatriz  $[\boldsymbol{\omega}_1]$  são dados por

$$\omega_{1sj} = \delta_{sj} \omega_s^2, \quad s, j = 1, \dots, N, \quad (52)$$

e  $\delta_{sj}$  é o delta de Kronecker. A energia potencial máxima da placa pode ser escrita como

$$V_P = \frac{1}{2} \frac{D}{a^2} \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}_P \mathbf{q}. \quad (53)$$

A matriz  $\mathbf{K}_P$  é

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\lambda}_1] \end{bmatrix}, \quad (54)$$

onde os elementos da diagonal da submatriz  $[\boldsymbol{\lambda}_1]$  são dados por

$$\lambda_{1ih} = \delta_{ih} \lambda_{in}^4, \quad i, h = 1, \dots, \tilde{N}. \quad (55)$$

A energia potencial máxima armazenada pela mola de acoplamento pode ser escrita como

$$V_C = \frac{1}{2} c_1 a \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}_C \mathbf{q}. \quad (56)$$

A matriz  $\mathbf{K}_C$  é

$$\mathbf{K}_C = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_1] & [\mathbf{K}_2] \\ [\mathbf{K}_2]^T & [\mathbf{K}_3] \end{bmatrix}, \quad (57)$$

onde os elementos das submatrizes  $[\mathbf{K}_i]$  são dados no Apêndice A. A energia potencial máxima armazenada pela fundação elástica de Winkler pode ser escrita como

$$V_B = \frac{1}{2} k_1 a^2 \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{K}_B \mathbf{q}. \quad (58)$$

A matriz  $\mathbf{K}_B$  é

$$\mathbf{K}_B = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{1}] \end{bmatrix}, \quad (59)$$

onde  $[\mathbf{1}]$  é a submatriz identidade  $(\tilde{N} + 1) \times (\tilde{N} + 1)$ . A energia cinética de referência da casca, Equação (7), pode ser escrita como

$$T_s^* = \frac{1}{2} \rho_s h_s a \frac{L}{2} \psi_n B^2 \mathbf{q}^T \mathbf{M}_S \mathbf{q}. \quad (60)$$

A matriz  $\mathbf{M}_S$  é

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} [\mathbf{1}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \quad (61)$$

onde  $[\mathbf{1}]$  é a submatriz identidade  $N \times N$ . A energia cinética de referência da placa, Equação (8), pode ser escrita como

$$T_p^* = \frac{1}{2} \rho_p h_p a^2 \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}_P \mathbf{q}, \quad (62)$$

A matriz  $\mathbf{M}_P$  é

$$\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{1}] \end{bmatrix}, \quad (63)$$

onde  $[\mathbf{1}]$  é a submatriz identidade  $(\tilde{N} + 1) \times (\tilde{N} + 1)$ . A energia cinética de referência do líquido pode ser escrita como

$$T_L^* = \frac{1}{2} \rho_L a \psi_n \mathbf{q}^T \mathbf{M}_L \mathbf{q}, \quad (64)$$

onde  $\mathbf{M}_L$  é a matriz particionada simétrica de dimensão  $(N + (\tilde{N} + 1)) \times (N + (\tilde{N} + 1))$ :

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_1] & [\mathbf{M}_2] \\ [\mathbf{M}_2]^T & [\mathbf{M}_3] \end{bmatrix}, \quad (65)$$

onde os elementos da submatriz  $[\mathbf{M}_i]$  são dados no Apêndice B. Assim é útil introduzir o quociente de Rayleigh para vibrações fluido-estrutura acopladas [Zhu (1994)]. O quociente de Rayleigh pode ser escrito como

$$\frac{V_S + V_P + V_C + V_B}{T_S^* + T_P^* + T_L^*} \quad (66)$$

Assim, os valores do vetor  $\mathbf{q}$  de parâmetros desconhecidos são determinados de modo a tornar a Equação (66) estacionária [Meirovitch (1986)], e a seguinte equação de Galerkin é obtida:

$$\left( \frac{1}{2} B^2 \rho_s h_s a L \mathbf{K}_S + \frac{D}{a^2} \mathbf{K}_P + c_1 a \mathbf{K}_C + k_1 a^2 \mathbf{K}_B \right) \mathbf{q} - A^2 \left( \frac{1}{2} B^2 \rho_s h_s a L \mathbf{M}_S + \rho_p h_p a^2 \mathbf{M}_P + \rho_L a \mathbf{M}_L \right) \mathbf{q} = 0 \quad (67)$$

onde  $A$  é a frequência circular (rad/s) do tanque parcialmente preenchido com líquido. Equação (67) fornece um problema de autovalor linear para uma matriz real, simétrica.

### 3.4 Parâmetros de análise

Os resultados obtidos por Amabili (1997), utilizando o método teórico apresentado, considerando dez modos de placa e dez modos de casca na expansão de Rayleigh-Ritz são mostrados na Tabela 1. Comparações são feitas com resultados obtidos pelo MEF.

O código MEF comercial ANSYS é utilizado nos procedimentos de análise em elementos finitos. Na análise em elementos finitos, modelos tridimensionais são construídos com elementos de casca elástica (SHELL63) para casca e placa, elementos de combinação para a junção casca-placa (COMBIN7) e fundação de Winkler (COMBIN14) e elementos de fluido acústico (FLUID30) para a região fluida. SHELL63 tem seis graus de liberdade em cada nó: translações nas direções nodais  $x$ ,  $y$  e  $z$  e rotações em torno dos eixos nodais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . COMBIN7 é uma junção que pode ser usada para conectar duas ou mais partes de um modelo em um ponto comum. Capacidades deste elemento incluem flexibilidade (ou rigidez) da junção, fricção, amortecimento e certas características de controle. COMBIN14 tem capacidade longitudinal ou torcional em, aplicações 1D, 2D e 3D. A opção mola-amortecedor longitudinal é um elemento uniaxial tração-compressão com até três graus de liberdade em cada nó: translações nas direções nodais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Flexão ou torção não são consideradas. A opção mola-amortecedor torsional é um elemento puramente rotacional com três graus de liberdade em cada nó: rotações em torno dos eixos nodais  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Flexão ou cargas axiais são desconsideradas. FLUID30 é utilizado para modelagem de meios fluidos e da interface de problemas de interação fluido-estrutura. Este elemento tem oito nós de canto com quatro graus de liberdade por nó: translações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e pressão. As translações, contudo, são aplicáveis apenas em nós que estejam na interface. Efeitos de aceleração, tais como em problemas de *sloshing*, podem ser incluídos.

As condições de contorno adotadas são: para a casca, simplesmente apoiada no topo e no fundo ( $u = 0$ ,  $v = 0$ ); para a placa, simplesmente apoiada ( $w = 0$ ); para a fundação elástica de Winkler, engaste; e para o fluido, aberta na superfície livre. A condição fluido-estrutura é considerada nas interfaces casca-líquido e placa-líquido. O problema de autovalores formulado no âmbito do MEF para análise de vibrações é resolvido pelo método modal *BlockLanczos* (para sistemas estruturais desacoplados) e *Unsymmetric* (para sistemas fluido-estrutura acoplados) incluídos no código ANSYS.

A escolha dos tipos de elementos foi definida pelas suas características e pelos bons resultados apresentados em testes de validação efetuados.

### 3.5 Modelos

Nas análises, as seguintes propriedades dos materiais são adotadas: a casca e a placa consideradas são feitas de aço com: módulo de Young  $E = 206 \text{ GPa}$ , razão de Poisson  $\nu = 0,3$  e massa específica  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ ; o líquido é água com massa específica  $\rho_L = 1000 \text{ kg/m}^3$ . A velocidade do som ( $c$ ) adotada em propriedades do material dos elementos fluidos no ANSYS foi de  $10^6 \text{ m/s}$ , de modo a simular  $c \rightarrow \infty$ , uma vez que o fluido é considerado incompressível. As propriedades geométricas adotadas são raio  $a = 0,175 \text{ m}$ , comprimento  $L = 0,60 \text{ m}$ ; espessura da casca  $h_s = 1,00 \text{ mm}$  e espessura da placa  $h_p = 0,55 \text{ mm}$ .

Os casos analisados no presente trabalho e suas principais particularidades são apresentados na Fig. 2.

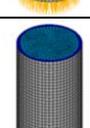
Caso	Esquema	Altura d'água $H \text{ (m)}$	Rigidez da mola $c_1 \text{ (Nm/m)}$	Rigidez da fundação $k_1 \text{ (N/m}^3\text{)}$
1		0,00	$\infty$	0,00
2		0,60	$\infty$	0,00
3		0,60	$10^{-1}$	0,00
4		0,60	$\infty$	$10^8$

Figura 2 - Casos analisados no presente trabalho e suas principais particularidades

Segundo Amabili (1997), a rigidez  $c_1 = 10^6 \text{ Nm/m}$  pode ser usada para simular uma rigidez infinita, para o tanque considerado.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para verificar a presente metodologia, os quatro primeiros resultados do tanque com a placa de fundo tendo  $n = 4$  diâmetros nodais, para o Caso 2, publicados por Amabili (1997) são comparados com os resultados numéricos pelo MEF correspondentes. A diferença mencionada é calculada por  $(|f_A - f_N|/|f_A|) \cdot 100$ , onde  $f_A$  é a frequência do método teórico apresentado em Amabili (1997) e  $f_N$  é aquela do MEF via ANSYS.

Tabela 1 - Comparação das quatro primeiras frequências naturais da casca com a placa de fundo em estudo tendo  $n = 4$  diâmetros nodais (Caso 2)

Modo	$f$ (Hz)		Diferença (%)
	Amabili (1997)	MEF	
1	100,86	105,55	4,65
2	124,49	120,46	3,24
3	292,08	292,11	0,13
4	319,66	334,72	4,71

Comparando os resultados da referência com os resultados numéricos obtidos pelo MEF via ANSYS, a diferença máxima é menor ou igual a 4,71% para o caso analisado. Nota-se, assim, acurácia do modelo desenvolvido.

A Fig. 3 apresenta as quatro primeiras frequências naturais em Hz e os modos de vibração numéricos tendo  $n = 4$  diâmetros nodais, obtidos via ANSYS para os quatro casos analisados conforme a Fig.2. São mostrados: as deformadas, os deslocamentos radiais da casca e transversais da placa e se o modo é casca-dominante (o deslocamento da casca é muito maior que o deslocamento da placa) ou placa-dominante (o deslocamento da placa é muito maior que o deslocamento da casca).

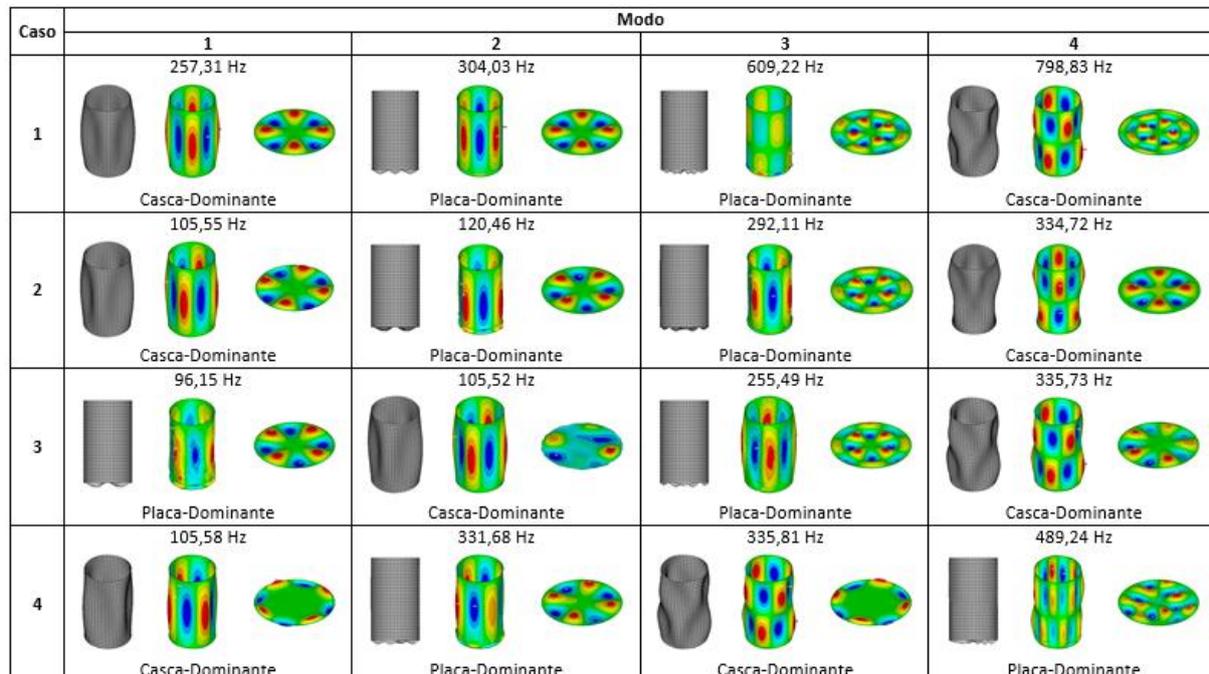


Figura 3 - Frequências naturais em Hz e modos de vibração numéricos para a casca com a placa de fundo em estudo tendo  $n = 4$  diâmetros nodais, obtidos via ANSYS

Tomando como base o Caso 2 – tanque completamente preenchido por água, rigidez da mola infinita e desconsiderando a fundação elástica – observa-se que os modos de vibração são simétricos. Modos de vibração com um número  $n$  par de diâmetros nodais são simétricos em relação ao eixo longitudinal, enquanto aqueles modos com um número  $n$  ímpar de diâmetros nodais são antissimétricos. O primeiro (105,55 Hz, uma onda axial) e o quarto (334,72 Hz, duas ondas axiais) modos são casca-dominantes enquanto o segundo (120,46 Hz, nenhum círculo nodal) e o terceiro (292,11 Hz, um círculo nodal) são placa-dominantes.

No Caso 1, o tanque está sem água. As frequências são mais altas, uma vez que não há a parcela de massa adicional de fluido. Os acréscimos das frequências do Caso 1 são de 144% e

152% em relação aos modos correspondentes do Caso 2 para os primeiros modos casca-dominante e placa-dominante, respectivamente. O efeito da alteração da rigidez da mola  $c_I$  na junção casca-placa é observado no Caso 3. Adotou-se um valor extremo oposto:  $c_I = 10^{-1}$  Nm/m. Alguns modos são mais sensíveis a rigidez da mola que outros. Para o caso analisado, os modos casca-dominante praticamente não sofrem alterações na frequência: de 105,55 Hz no Caso 2 para 105,52 Hz no Caso 3 para uma onda axial e de 334,72 Hz para 335,73 Hz para duas ondas axiais. Já os modos placa-dominantes são significativamente alterados: de 120,46 Hz para 96,15 Hz (redução de 20,2%) para nenhum círculo nodal e de 292,11 Hz para 255,49 Hz (redução de 12,5%) para um círculo nodal. No Caso 4, a rigidez da fundação elástica de Winkler é alterada para um valor extremo ( $k_I = 10^8$  N/m<sup>3</sup>). Para os valores estudados, percebe-se que os modos casca-dominantes são pouco afetados pela mudança: de 105,55 Hz no Caso 2 para 105,58 Hz no Caso 4 para uma onda axial e de 334,72 Hz para 335,81 Hz para duas ondas axiais. Já os modos placa-dominantes são bastante afetados: de 120,46 Hz para 331,68 Hz (aumento de 175%) para nenhum círculo nodal e de 292,11 Hz para 489,42 Hz (aumento de 67%) para um círculo nodal. Segundo Amabili (1997), a rigidez flexional relativamente baixa da placa considerada explica esses aumentos.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo analisar vibrações livres de uma casca cilíndrica circular reta unida a uma placa de fundo apoiada em uma base elástica, preenchida com fluido. Baseando-se no trabalho de Amabili (1997), abordagem numérica pelo MEF via software ANSYS foi utilizada para o presente estudo. Os comparativos entre os resultados de referência e os aqui obtidos mostraram concordâncias, validando assim a análise processada em ANSYS.

Foram apresentadas as quatro primeiras frequências naturais da casca com a placa de fundo em estudo tendo  $n = 4$  diâmetros nodais para quatro casos: 1) tanque sem água, 2) tanque completamente preenchido (considerando a rigidez da mola artificial que simula a junção casca-placa infinita e desconsiderando a fundação elástica nos Casos 1 e 2), 3) rigidez da mola reduzida e 4) rigidez da fundação elevada. A presença de água reduz as frequências em função da massa adicional de fluido. Para os casos analisados, aumento das rigidezes da mola artificial ou da fundação elástica de Winkler não afetam os modos dominantes de casca mas afetam enormemente os modos dominantes de placa, elevando suas frequências.

O intuito desse estudo é dar uma pequena contribuição para o desenvolvimento de uma metodologia adequada que forneça o suporte técnico para a prática de projetos seguros e confiáveis de tanques.

Este trabalho pode ser expandido para analisar o efeito nas frequências naturais de diferentes espessuras de placa, rigidezes da conexão casca-placa pela mola artificial rotacional distribuída, rigidezes da fundação elástica de Winkler, níveis de fluido e relações altura/raio da casca.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pelos recursos recebidos nesta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Amabili, M. (1997). Bulging modes of circular bottom plates in rigid cylindrical containers filled with a liquid. In: *Journal of Sound and Vibration* 199(3), 431-452.
- Amabili, M. (1996). Bulging modes of circular bottom plates in rigid cylindrical containers filled with a liquid. In: *Shock and Vibration*.
- Amabili, M. (1996). Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells. In: *Journal of Sound and Vibration* 191, 757-780.
- Amabili, M. e Dalpiaz, G. (1995). Breathing vibrations of a horizontal circular cylindrical tank shell, partially filled with liquid. In: *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics* 117, 187-191.
- Amabili, M. e Dalpiaz, G. (1995). . Vibration of a fluid-filled circular cylindrical tank: axisymmetric modes of the elastic bottom plate. *Proceedings of the International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, 15-17 June, Manchester, U.K. 1, 38.1-38.8.
- Amabili, M., Frosali, G. e Kwak, M. K. (1996). Free vibrations of annular plates coupled with fluids. In: *Journal of Sound and Vibration* 191, 825-846.
- Bauer, H. F. e Siekmann, J. (1971). Dynamic interaction of a liquid with the elastic structure of a circular cylindrical container. In: *Ingenieur Archiv* 40, 266-280.
- Berry, J. G. e Reissner, E. (1958). The effect of an internal compressible fluid column on the breathing vibrations of a thin pressurized cylindrical shell. In: *Journal of Aeronautical Science* 25, 288-294.
- Bhuta, G. e Koval, L. R. (1964). Hydroelastic solution of the sloshing of a liquid in a cylindrical tank. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 36, 2071-2079.
- Cheng, L. (1994). Fluid-structural coupling of a plate-ended cylindrical shell: vibration and internal sound field. In: *Journal of Sound and Vibration* 174, 641-654.
- Cheng, L. e Nicolas, J. (1992). Free vibration analysis of a cylindrical shell-circular plate system with general coupling and various boundary conditions. In: *Journal of Sound and Vibration* 155, 231-247.
- Chiba, M. (1994). Axisymmetric free hydroelastic vibration of a flexural bottom plate in a cylindrical tank supported on an elastic foundation. In: *Journal of Sound and Vibration* 169, 387-394.
- Chiba, M. (1993). Nonlinear hydroelastic vibration of a cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid: part II: linear axisymmetric vibration analysis. In: *Journal of Fluids and Structures* 7, 57-73.
- Chiba, M. (1992). Nonlinear hydroelastic vibration of cylindrical tank with an elastic bottom, containing liquid, part I: experiment. In: *Journal of Fluids and Structures* 6, 181-206.
- Faulkner, L. L. (1969). *Ph.D. Thesis, Purdue University*. Vibration analysis of shell structures using receptances.
- Gupta, R. K. e Hutchinson, G. L. (1988). Free vibration analysis of liquid storage tanks. In: *Journal of Sound and Vibration* 122, 491-506.

- Huang, D. T. e Soedel, W. (1993). On the free vibrations of multiple plates welded to a cylindrical shell with special attention to mode pairs. In: *Journal of Sound and Vibration* 166, 315-339.
- Huang, D. T. e Soedel, W. (1993). Study of the forced vibration of shell-plate combinations using the receptance method. In: *Journal of Sound and Vibration* 166, 341-369.
- Kondo, H. (1981). Axisymmetric vibration analysis of a circular cylindrical tank. In: *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers (JSME)* 24, 215-221.
- Lamb, H. (1945). *Hydrodynamics*. New York: Dover. p. 46.
- Leissa, A. W. (1973). *Vibration of Shells*. NASA SP-288. Washington D.C.: U.S. Government Printing Office.
- Leissa, A. W. (1969). *Vibration of Plates*. NASA SP-160. Washington, DC: Government Printing Office.
- Leissa, A. W. e Narita, Y. (1980). Natural frequencies of simply supported circular plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 70, 221-229.
- Lindholm, U. S., Kana, D. D. e Abramson, H. N. (1962). Breathing vibrations of a circular cylindrical shell with an internal liquid. In: *Journal of Aeronautical Science* 29, 1052-1059.
- Meirovitch, L. (1986). *Elements of Vibration Analysis*. New York: McGraw-Hill; (second edition). pp. 270-282.
- Morand, H. J.-P. e Ohayon, R. (1992). *Interactions Fluides-Structures*. Paris: Masson. pp. 71-72. (English edition: 1995 Fluid Structure Interaction. New York: John Wiley)
- Wheeler, A. D. (1968) *Tables of Summable Series and Integrals Involving Bessel Functions*. San Francisco: Holden-Day.
- Yamada, G., Irie, T. e Tamiya, T. (1986). Free vibration of a circular cylindrical double shell system closed by end plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 108, 297-304.
- Yuan, J. e Dickinson, S. M. (1994). The free vibration of circular cylindrical shell and plate systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 175, 241-263.
- Yuan, J. e Dickinson, S. M. (1992). On the use of artificial springs in the study of the free vibrations of systems comprised of straight and curved beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 152, 203-216.
- Yuan, J. e Dickinson, S. M. (1992). The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method. In: *Journal of Sound and Vibration* 159, 39-55.
- Yamaki, N., Tani, J. e Yamaji, T. (1984). Free vibration of a clamped-clamped circular cylindrical shell partially filled with liquid. In: *Journal of Sound and Vibration* 94, 531-550.
- Zhu, F. (1994). Rayleigh quotients for coupled free vibrations. In: *Journal of Sound and Vibration* 171, 641-649.

## APÊNDICES

### Apêndice A: Matriz de mola $\mathbf{K}_C$

Neste apêndice, a matriz de mola particionada  $\mathbf{K}_C$ , Equação (57), é reportada. Os elementos da submatriz de mola  $\mathbf{K}_1$  de dimensões  $N \times N$  são dadas por

$$(K_1)_{sj} = B^2 \left( \frac{\pi^2}{L^2} \right) sj. \quad (A1)$$

Os elementos da submatriz de mola  $\mathbf{K}_2$  de dimensão  $N \times (\tilde{N} + 1)$  são dadas por

$$(K_2)_{si} = -B \left( \frac{\pi}{L} \right) s \left( \frac{\lambda_{in}}{a} \right) [A_{in} J'_n(\lambda_{in}) + C_{in} I'_n(\lambda_{in})]. \quad (A2)$$

O elemento da submatriz de mola  $\mathbf{K}_3$  de dimensão  $(\tilde{N} + 1) \times (\tilde{N} + 1)$  são dadas por

$$(K_3)_{ih} = \left( \frac{\lambda_{in}}{a} \right) \left( \frac{\lambda_{hn}}{a} \right) [A_{in} J'_n(\lambda_{in}) + C_{in} I'_n(\lambda_{in})] [A_{hn} J'_n(\lambda_{hn}) + C_{hn} I'_n(\lambda_{hn})]. \quad (A3)$$

### Apêndice B: Matriz $\mathbf{M}_L$ para tanques preenchidos parcialmente

Neste apêndice, os elementos da matriz particionada  $\mathbf{M}_L$ , descrevendo o efeito inercial do líquido dentro do tanque, são dados apenas por modos assimétricos; o caso axissimétrico é facilmente obtido pelo uso das equações dadas na seção 3.2. Os elementos da submatriz  $\mathbf{M}_1$  de dimensão  $N \times N$  são dados por

$$(M_1)_{sj} = B^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\sigma_{ms} \sigma_{jm} I_n \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)}{(2m-1)\pi I'_n \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right)}, \quad (B1)$$

onde  $\sigma_{ms}$  são definidos na Equação (24a, b). Os elementos da submatriz  $\mathbf{M}_2$  de dimensão  $N \times (\tilde{N} + 1)$  são dadas por

$$(M_2)_{si} = \frac{1}{2} B a \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} K_{ink} J_n(\varepsilon_{nk}) \left[ \zeta_{snk}^{(1)} - \frac{\zeta_{snk}^{(2)}}{\tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right)} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ 4\sigma_{ms} / \left[ (2m-1)\pi I'_n \left( \frac{2m-1}{2} \frac{\pi a}{H} \right) \right] \right] (A_{in} \zeta_{imn}^{(1)} + C_{in} \zeta_{imn}^{(2)}) \right\} \quad (B2)$$

onde  $K_{ink}$ ,  $\zeta_{snk}^{(1)}$ ,  $\zeta_{snk}^{(2)}$ ,  $\zeta_{imn}^{(1)}$  e  $\zeta_{imn}^{(2)}$  são definidos nas Equações (31), (41), (42), (46) e (47), respectivamente. Os elementos da submatriz  $\mathbf{M}_3$  de dimensão  $(\tilde{N} + 1) \times (\tilde{N} + 1)$  são dadas por

$$(M_3)_{ih} = a^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A_{in} \beta_{ink} + C_{in} \gamma_{ink})}{\alpha_{nk} \varepsilon_{nk}} (A_{hn} \beta_{hnk} + C_{hn} \gamma_{hnk}) \tanh\left(\varepsilon_{nk} \frac{H}{a}\right). \quad (B3)$$