



MÉTODOS DE DIFERENÇAS FINITAS DE ALTA ORDEM PARA O PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Juliano Deividy B. Santos

Abimael Fernando D. Loula

juliano@lncc.br

aloc@lncc.br

Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC

Avenida Getúlio Vargas 333, CEP: 25651-075, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. *Classicamente aproximações por diferenças finitas são obtidas via expansões em série de Taylor. Propomos uma metodologia que faz uso de funções, sejam polinomiais ou não polinomiais, para a construção de aproximações por diferenças finitas de diferentes ordens. Usando-se a base polinomial de monômios naturais em malhas uniformes constata-se que esta estratégia gera a mesma aproximação de 5 pontos de diferenças para o problema de Helmholtz. Porém, diferentemente das formulações usuais, esta metodologia é aplicável em malhas não-uniformes. Alternativamente, funções não polinomiais são utilizadas para a gerar métodos de alta ordem. Neste trabalho utilizamos bases radiais compostas pelas funções de Bessel de primeiro tipo e ordem zero para gerar aproximações para a equação de Helmholtz em malhas uniformes e não-uniformes. Este procedimento conduz à aproximações idênticas às obtidas com o Quasi Optimal Finite Difference method (QOFD) introduzido por Fernandes e Loula (International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010; 82:1244-1281). Para malhas uniformes com stencils compactos de nove pontos provamos que esta metodologia conduz a uma aproximação de sexta ordem. Neste caso a obtenção dos resultados é simplificada, sem a necessidade de introdução de um funcional associado ao erro de truncamento como ocorre no método QOFD. Resultados numéricos são apresentados, comprovando as ordens de convergência das aproximações.*

Keywords: *Diferenças Finitas, Malhas não estruturadas, Helmholtz, Método de poluição mínima.*

1 INTRODUÇÃO

A modelagem sísmica é um campo fundamental na busca de fontes de combustíveis fósseis. O processo de aquisição sísmica, objetivando a descoberta de reservatórios de petróleo ou gás, trata-se, sinteticamente, de um navio que gera artificialmente ondas acústicas que interagem com o assoalho marinho e camadas sedimentares mais profundas. Receptores distribuídos estrategicamente sob o oceano captam as ondas acústicas refletidas do fundo marinho. Neste processo versões discretas da equação da onda são utilizadas para a obtenção de sismogramas de reflexão que fornecem as feições geológicas da região de interesse, (Karen Carrilho da Silva, 2012). O processo de discretização da equação da onda no domínio do tempo ou da frequência é feito usualmente por meio da técnica de diferenças finitas. A Figura (1) ilustra resumidamente um processo de aquisição sísmica.

Nas seções seguintes serão estudados e também desenvolvidas metodologias de aproximação por diferenças finitas que podem contribuir para a melhoria da qualidade dos sismogramas de reflexão.

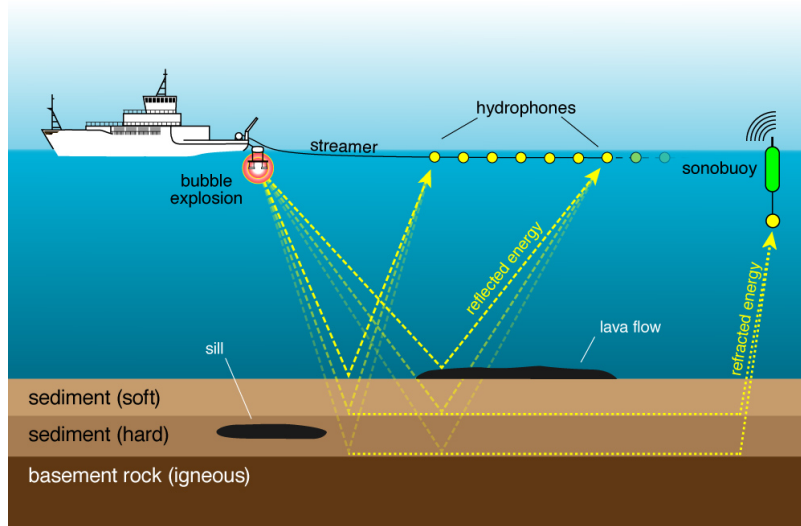


Figura 1: Exemplo ilustrativo de aquisição sísmica (Fonte: FishSafe-UK).

Equações em Derivadas Parciais (EDP) lineares de segunda ordem modelam uma variedade de fenômenos físicos e problemas da engenharia. Considerando-se um modelo linear, ondas acústicas equivalem à pequenas oscilações de um dado campo de pressão denotado aqui por $p(\mathbf{x}, t)$ que satisfaz a equação da onda acústica

$$-\Delta p + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}, \quad n_{sd} \in \{1, 2\}. \quad (1)$$

sendo c a velocidade do som no meio acústico e Ω um domínio suave.

Para um comportamento harmônico na dimensão temporal, com frequência circular ω , o campo de pressão é considerado na forma

$$p(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})e^{i\omega t} \quad (2)$$

de modo que o campo complexo $u(\mathbf{x})$ atende ao problema governado pela equação diferencial parcial de Helmholtz

$$\begin{aligned} -\Delta u - k^2 u &= 0, \text{ em } \Omega \\ u &= g, \text{ em } \Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

sendo Γ o contorno do domínio Ω .

A equação de Helmholtz é um exemplo de EDP que modela os harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas.

Nas seções seguintes, serão introduzidas aproximações por diferenças finitas para o problema modelo (3) com condições de Dirichlet.

2 APROXIMAÇÕES POR DIFERENÇAS FINITAS EM MALHAS NÃO UNIFORMES

Seja Ω um domínio aberto limitado em $\mathbb{R}^{n_{sd}}$, $n_{sd} = 1, 2$ ou 3 , com um contorno Lipschitz-contínuo $\Gamma = \partial\Omega$. Um problema de valor de contorno qualquer, na sua forma forte, pode ser modelado de forma abstrata por:

Problema F: Encontrar a variável de campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{sd}}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$, tal que

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{em } \Omega, \quad (4)$$

com as condições de contorno dadas por:

$$u = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (5)$$

onde \mathbf{f} é um termo fonte definido no domínio Ω e $\bar{\mathbf{g}}$ é a condição de contorno prescrita sobre todo o contorno Γ . O operador \mathcal{L} representa um operador diferencial linear no domínio Ω .

A discretização das equações (4) e (5) em diferenças finitas pode ser descrita dentro de um *framework* de tal forma que seja independente do número de pontos usados no stencil e também independente da construção da malha, se uniforme ou não uniforme, conforme a apresentação a seguir.

Considerando que a equação (4) é uma equação diferencial parcial de uma variável escalar $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, sua aproximação clássica em diferenças finitas sobre um ponto x_i , interior ao domínio, deve atender à seguinte relação

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}_i) \cong \sum_{j \in \mathcal{A}_i} c_i u(\mathbf{x}_j), \quad (6)$$

com os coeficientes c_i , com $j \in \mathcal{A}_i$, calculados de forma a que o valor do operador \mathcal{L} sobre a variável u no ponto \mathbf{x}_i seja dado aproximadamente como combinação linear dos valor da função u avaliados nos pontos \mathbf{x}_j pertencentes a uma vizinhança \mathcal{A}_i de \mathbf{x}_i . Adotamos a notação U_j como sendo uma possível aproximação de $u(\mathbf{x}_j)$, no nó j , onde U_j é prescrito caso $\mathbf{x}_j \in \Gamma$.

Denotando por \mathcal{A}_i o conjunto de todos os pontos \mathbf{x}_j adjacentes ao ponto interior \mathbf{x}_i e por $|\mathcal{A}_i|$ o número de pontos do referido conjunto, o cálculo de c_i , stencil de diferenças finitas centrado em \mathbf{x}_i , pode ser obtido de diversas formas. Aqui utilizaremos a expressão direta, dada pela Equação (6), substituindo a variável u por cada uma das funções bases do conjunto

$$\mathbb{B}_i := \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{|\mathcal{A}_i|}\}, \quad (7)$$

obtemos para cada $\varphi_l, l = 1, \dots, |\mathcal{A}_i|$, uma equação,

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_i} c_j \varphi_l(\mathbf{x}_j) = \mathcal{L}\varphi_l(\mathbf{x}_i), \quad (8)$$

a qual é avaliada no ponto i , resultando em um sistema de $|\mathcal{A}_i|$ equações algébricas lineares. Na forma matricial, sendo $m = |\mathcal{A}_i|$, tal sistema é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \gamma_{m3} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}}_C = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}}_F \quad (9)$$

sendo que \mathbf{M} é a matriz de entradas $\gamma_{lj} = \varphi_l(\mathbf{x}_j)$, $j, l = 1 \dots k$, C o vetor de incógnitas e F o vetor de termo fonte com componentes $f_l = \mathcal{L}\varphi_l(\mathbf{x}_i)$. Os $|\mathcal{A}_i|$ pontos \mathbf{x}_j são escolhidos segundo algum critério de forma a garantir que a matriz \mathbf{M} seja não singular e que se obtenha a melhor representação do operador pelo stencil de diferenças. Se $m \geq |\mathcal{A}_i|$ o sistema dado pela Equação (9) ainda pode ser resolvido usando a técnica de mínimos quadrados, minimizando o erro ponderado $E = \sum_{l=1}^m \left\{ W_l \left\{ \sum_{j \in \mathcal{A}_i} c_j \phi(\mathbf{x}_j) - \mathcal{L}\phi(\mathbf{x}_i) \right\} \right\}$ sendo W_l uma função peso de suporte compacto associada ao ponto l (ver (Liszka & Orkisz, 1980)).

As metodologias para a obtenção dos coeficientes associados às discretizações por diferenças clássicas, obtidas via expansão em série de Taylor da variável de campo u , são factíveis apenas em malhas ortogonais e uniformes, (LeVeque, 2005). Entretanto, como será apresentado a seguir, a metodologia apresentada nesta seção mostra-se factível em malhas mais gerais (não estruturadas).

Com efeito, considerando-se, por simplicidade, o problema de Helmholtz aproximado pelo método diferenças finitas apresentado nesta seção tomamos como base o seguinte conjunto

$$\mathbb{B}_i := \{1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y, xy^2, x^2y^2\}, \quad (10)$$

composto pelos nove primeiros polinômios canônicos. Para este caso tem-se $|\mathcal{A}_i| = 9$.

A Figura (2) contém exemplos de *stencil* sobre malhas uniforme, (a), e não uniformes, (b).

Objetivando o caso mais geral, simulações foram feitas sobre malhas não uniformes, ou seja, quando os parâmetros de malha Δx e Δy são em geral distintos. Para a geração deste tipo de malha adotamos o expediente de gerar uma malha estruturada de coordenadas $(a_i, b_i) \in \mathcal{I}$ de nós interiores i e, em seguida, através de uma função randômica, perturbar de forma independente estas coordenadas

$$\begin{aligned} a'_i &:= a_i + 0.3 \cdot r_i \Delta x \\ b'_i &:= b_i + 0.3 \cdot s_i \Delta y \end{aligned} \quad (11)$$

onde r_i e s_i são números randômicos distribuídos uniformemente no intervalo $[-0.5, 0.5]$. A perturbação foi definida de modo a possuir um valor máximo percentual dos parâmetros de malha Δx e Δy . Em experimentos adotamos perturbações com valor percentual máximo de 30%. A Figura (3) apresenta exemplos de diferentes malhas geradas a partir desta metodologia.

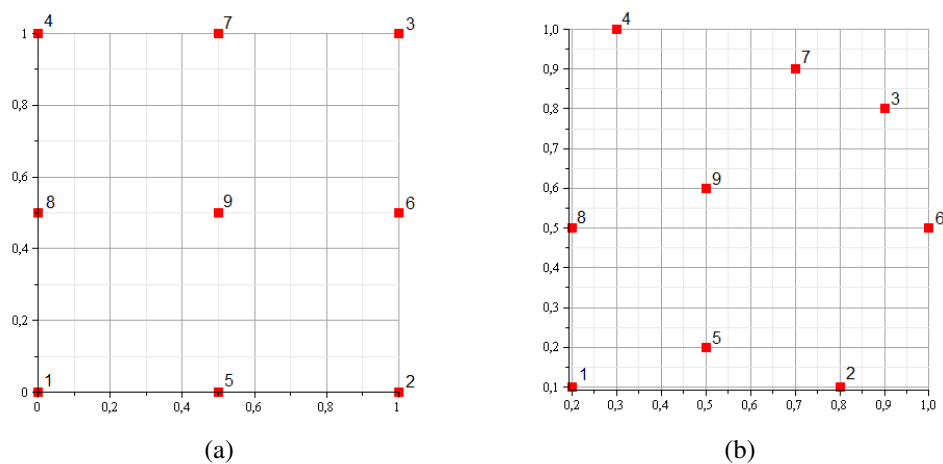


Figura 2: Exemplos de pontos de stencil de nove nós em malhas do tipo retangular uni-forme e não uniforme, respectivamente.

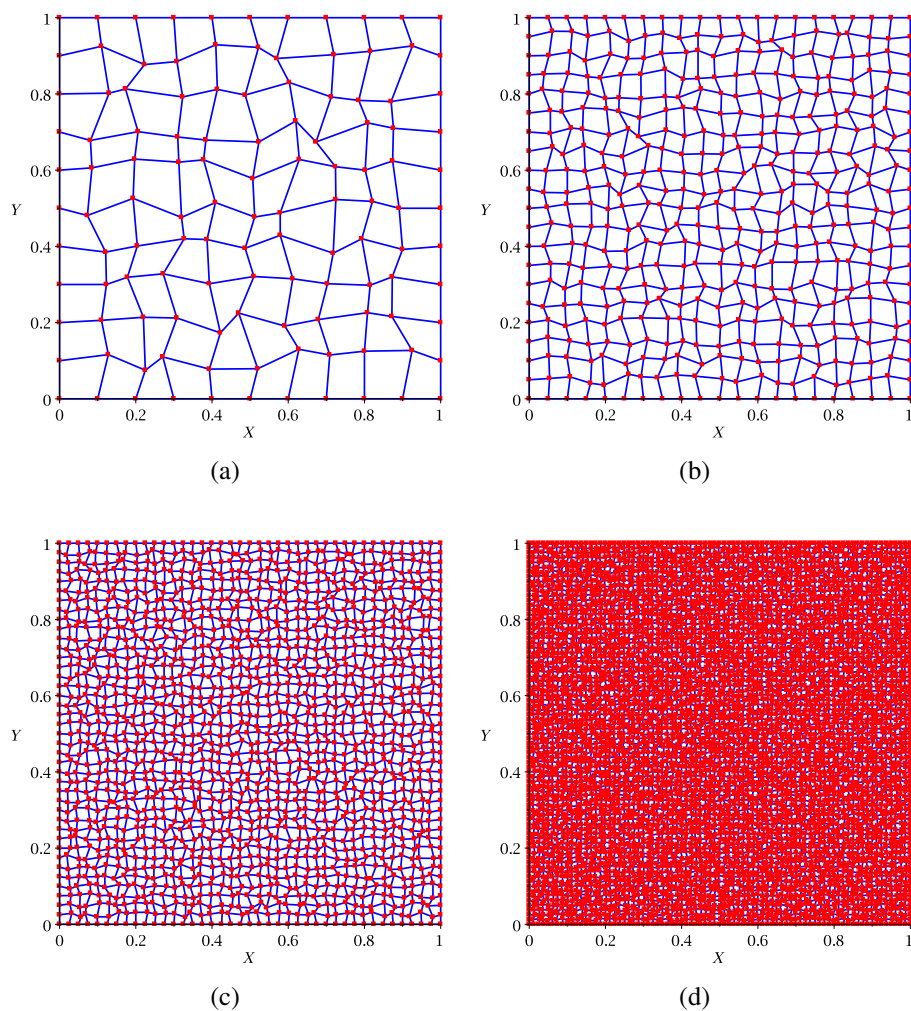


Figura 3: Exemplos de malhas não-uniformes aplicadas ao problema de Helmholtz. (a) Malha não-uniformes com 10×10 elementos; (b) Malha não-uniformes com 20×20 elementos; (c) Malha não-uniformes com 40×40 elementos; (d) Malha não-uniformes com 80×80 elementos.

Como apresentado na Figura (4), vemos que a base canônica mostra-se robusta tanto para malhas uniformes, como também para malhas não uniformes. Contudo a mesma, em ambas situações, apresenta taxa de convergência de segunda ordem. Para este experimento foram utilizadas condições de contorno de Dirichlet, número de onda $k := 20$ e sobre domínios $\Omega = [0, 1]$ com 10×10 elementos, 20×20 , 40×40 e 80×80 elementos.

Para malhas uniformes, o uso base de funções formada pelos nove primeiros polinômios canônicos gera uma equivalente à obtida via expansão em série de Taylor. Ou seja, ambas as metodologias geram um mesmo stencil associado aos pontos interiores da malha para o problema modelo (3) que para o caso bidimensional é dado por

$$-U_{xx}(x, y) - U_{yy}(x, y) - k^2U(x, y) = 0 \tag{12}$$

onde o esquema de diferenças finitas para

$$U_{xx}(x, y) + U_{yy}(x, y)$$

é dado por

$$\frac{U(x + h, y) + U(x - h, y) - 4U(x, y) + U(x, y + h) + U(x, y - h)}{h^2} \tag{13}$$

sendo $U(x, y) = U(\mathbf{x}_j)$ com $\mathbf{x}_j \in \mathcal{A}_i$.

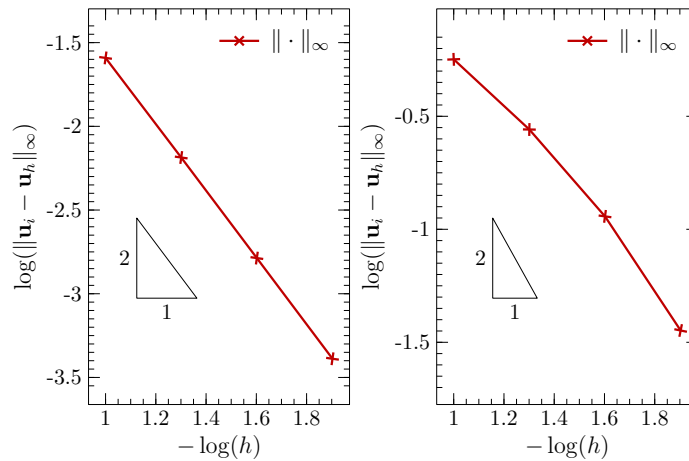


Figura 4: Estudo de convergência do problema de Helmholtz unidimensional para a base canônica em malhas uniformes e não-uniformes. À esquerda base canônica e malha uniforme; À direita base canônica e malha não uniforme

3 FORMULAÇÃO QOFD- QUASI OPTIMAL FINITE DIFFERENCE

A metodologia Quasi Optimal Finite Fiffrence (QOFD) foi desenvolvida e apresentada em (Fernandes & Loula, 2010),(Fernandes, 2009). É um método que se baseia em ondas planas, da forma

$$w(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = e^{ik\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{x}} \tag{14}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^{n_{sd}}$ a direção da onda w .

Definimos o conjunto

$$\Sigma := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{\sigma}| = 1\}, \quad (15)$$

de todas as direções possíveis no espaço de dimensão n_{sd} . Para $n_{sd} = 2$ ter-se-á um círculo unitário e para $n_{sd} = 3$ uma esfera unitária.

Para apresentar resumidamente método QOFD, algumas definições preliminares serão dadas a seguir, em consonância com as referências citadas no início desta seção.

Seja X um conjunto finito tal que $|X|$ denote seu número de elementos e $\mathcal{N} = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{|\mathcal{N}|-1}\} \subset \Omega \cup \Gamma$ um conjunto de pontos indexados, também chamados de nós, onde a solução possa ser avaliada e aproximada. Iremos denotar o conjunto de pontos de \mathcal{N} no interior de Ω por \mathcal{I} , de modo que $\mathcal{I} := \mathcal{N} \cap \Omega$. O conjunto de pontos de \mathcal{N} no contorno (ou fronteira) de Ω será denotado por $\mathcal{BP} := \mathcal{N} \cap \Gamma$. Além disso, para cada $i \in \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$, será associado o conjunto $\mathcal{A}_i \subset \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$, que contém os pontos adjacentes a x_i escolhidos segundo um determinado critério. Deste modo, se $j \in \mathcal{A}_i$, ter-se-á que x_j será adjacente a x_i . Para as aplicações que serão feitas mais adiante será suficiente admitirmos que $i \in \mathcal{A}_i$, para todo $i \in \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$.

Sendo \mathbf{x} um ponto dado em \mathcal{N} , associamos um índice $\text{ind}(\mathbf{x})$, que, para qualquer $i \in \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$, é dado por $\text{ind}(\mathbf{x}_i) := i$. Donde segue que $\text{ind}(X)$ será o conjunto dos índices dos pontos de X em \mathcal{N} . Temos, em particular, que $\text{ind}(\mathcal{N}) = \{0, \dots, |\mathcal{N}| - 1\}$.

A seguinte aproximação geral de diferenças finitas, baseada nas definições anteriores, é dada pela solução do sistema linear de equações

$$L_h U_i = \sum_{j \in \mathcal{A}_i} S_i^j U_j = 0, \quad \forall i \in \text{ind}(\mathcal{I}), \quad (16)$$

de modo que U_j seja uma aproximação para $u(\mathbf{x}_j)$, e U_j prescrito em $x_j \in \mathcal{BP}$. Considerando ondas planas (equação (14)) com direções $\boldsymbol{\sigma}$ restritas ao espaço (15), tem-se que a matriz do sistema linear global é composta pelos coeficientes S_i^j , a serem determinados. Com a aplicação do operador discreto L_h na solução exata u do problema modelo (3) teremos o erro de truncamento local que, para uma onda plana com direção $\boldsymbol{\sigma}$, será definido por:

$$\mathcal{T}_i(\boldsymbol{\sigma}) = L_h w(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} S_i^j w(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}_j). \quad (17)$$

Para cada nó $i \in \mathcal{I}$, denota-se S_i como sendo a lista ordenada dos coeficientes S_i^j onde $j \in \mathcal{A}_i$ e definimos o funcional

$$J(S_i) = \|\mathcal{T}_i(\boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(\Sigma)}^2 = \int_{\Sigma} |\mathcal{T}_i(\boldsymbol{\sigma})|^2 d\boldsymbol{\sigma}, \quad (18)$$

onde o diferencial $d\boldsymbol{\sigma}$ indica que a integral é feita sobre $\boldsymbol{\sigma}$.

Deseja-se determinar os coeficientes S_i^j onde $j \in \mathcal{A}_i \setminus \{i\}$ e $S_i^i = 1$, por meio da minimização do funcional (18) em relação aos coeficientes S_i^j . Fazendo a substituição da expressão do erro local de truncamento (17) no funcional definido em (18), obtemos

$$J(S_i) = \sum_{m \in \mathcal{A}_i} \sum_{n \in \mathcal{A}_i} S_i^m \overline{S_i^n} \int_{\Sigma} e^{ik\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)} d\boldsymbol{\sigma} = W_{mn} \sum_{m \in \mathcal{A}_i} \sum_{n \in \mathcal{A}_i} S_i^m \overline{S_i^n} \quad (19)$$

sendo

$$W_{mn} = \int_{\Sigma} e^{ik\sigma(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n)} d\sigma = (2\pi)^{\frac{n_{sd}}{2}} J_{\frac{n_{sd}}{2}-1}(kh_{mn})(kh_{mn})^{1-\frac{n_{sd}}{2}}, \quad (20)$$

onde J_s denota a função de Bessel de primeiro tipo e ordem s . Para cada $\mathbf{x} \in \mathcal{T}$, prescreve-se $S_i^i = 4$ de modo que o funcional (19) é minimizado em relação aos coeficientes S_i^j que serão, por consequência, solução do sistema linear de equações

$$WS_i = 0, \quad \text{com } S_i^i = 4. \quad (21)$$

Para malhas compostas por quadriláteros bilineares uniformes, a aproximação via QOFD para o problema de Helmholtz (equação (3)) conduz a um stencil de nove pontos. Um aspecto relevante a ser destacado é que esta metodologia pode ser empregada em malhas mais gerais como não-estruturadas ou mesmo sem malha (Fernandes, 2009).

Para uma malha uniforme de quadriláteros bilineares, o stencil associado possui nove nós e por questões de simetria apenas o cálculo de três coeficientes é necessário. O cálculo dos coeficientes associados ao stencil pelo programa **Maple** impondo-se que $A_0 = 4$ nos forneceu

$$A_1 = -\frac{4}{5} - \frac{29}{125}(kh)^2 - \frac{2549}{50000}(kh)^4 - \frac{473849}{45000000}(kh)^6 - \frac{10086892607}{4704000000000}(kh)^8 \dots$$

$$A_2 = -\frac{1}{5} - \frac{17}{250}(kh)^2 - \frac{801}{50000}(kh)^4 - \frac{76313}{22500000}(kh)^6 - \frac{1091144231}{1568000000000}(kh)^8 \dots$$

de modo que o erro de truncamento local é o seguinte

$$\frac{\mathcal{T}}{k^2} = -\frac{\cos(8\theta)}{322560}(kh)^6 + O((kh)^8). \quad (22)$$

e erro de dispersão dado por

$$\frac{k - k^h}{k} = \frac{\cos(8\theta)}{774144}(kh)^6 + O((kh)^8). \quad (23)$$

Para uma malha uniforme, estes coeficientes A_1 e A_2 são idênticos até sexta ordem aos obtidos para o método Quasi Stabilized Finite Element Method (QSFEM) introduzido em (Babuska & Ihlenburg, 1995). Aqui vale salientar que QSFEM e QODFD fazem parte dos chamados métodos de poluição mínima, pois minimizam a diferença entre os números de onda exato k e discreto k^h , este último é obtido quando se introduz uma aproximação por diferenças finitas ao problema.

Na Figura (5) são apresentados resultados de um estudo de convergência de aproximação QOFD nas normas $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ em comparação com o a interpolante para o problema modelo Eq. (3). Estes experimentos foram realizados tomando o domínio o retângulo $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ de elementos quadriláteros bilineares uniformes, número de onda $k := 20$ e condições de Dirichlet. Estes experimento foram aplicados em malhas em 10×10 elementos, 20×20 elementos, 40×40 elementos e 80×80 elementos.

Pode-se observar que o QOFD apresenta taxa ótima de convergência na norma $L^2(\Omega)$ e precisão idêntica à interpolante (veja Figura (5a)). No que concerne à norma $H^1(\Omega)$, os resultados

nos mostram que taxas ótimas também foram obtidas neste caso, com precisão idêntica à interpolante. Conforme apresentado no gráfico da Figura (5b). Por este estudo também confirmamos que a aproximação de sexta ordem para o QOFD na norma do máximo em malha uniforme e condição de contorno de Dirichlet, estando de acordo com a ordem do erro de truncamento dado em (22).

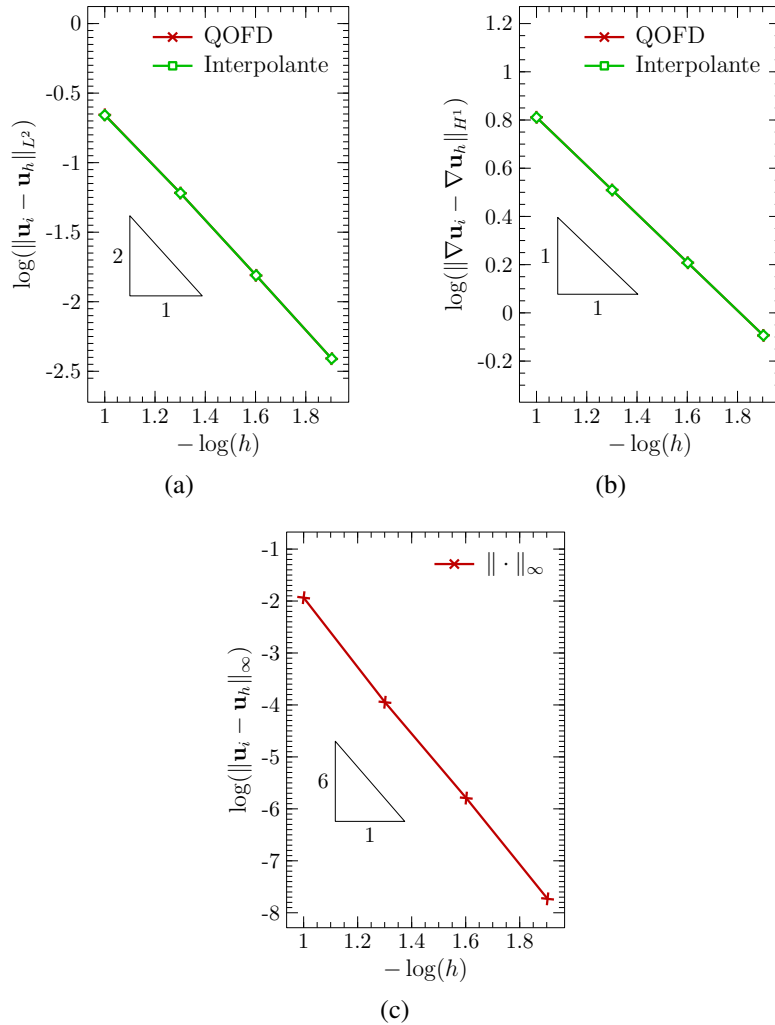


Figura 5: Comparação taxas de convergência pela aproximação QOFD na norma L^2 ilustradas em (9a). A figura (5b) mostra o resultado de convergência para a seminorma do H^1 . Confirmação da taxa de sexta ordem do método QOFD ilustrado na Figura (5c). Com condições de Dirichlet e $k = 20$.

O desafio da próxima seção será o de propormos uma metodologia alternativa para a obtenção dos coeficientes do QOFD de forma mais simplificada e direta, de maneira que a etapa de minimização do funcional de mínimos quadrados não será necessária de modo que a base de funções específica para o problema será empregada na montagem do sistema de equações, assim como feito com a base canônica anteriormente.

4 PROPOSTA DE BASES RADIAIS COM MÍNIMA POLUIÇÃO

A investigação analítica de ondas em meios não dispersivos é baseada na Equação de Helmholtz reduzida, apresentada no problema modelo (3). Propomos uma abordagem para

este problema em coordenadas polares com dependência apenas radial

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + k^2 u = 0, \text{ em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (24)$$

sendo o número de ondas k uma constante. Neste caso será adotada uma metodologia de resolução por diferenças finitas de modo que o conjunto de funções base adotado será formado pelas funções de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Seja $\mathbf{x}_j = (a_j, b_j)$ um ponto do stencil centrado em $\mathbf{x}_i = (a, b)$. Para cada nó $j \in \mathcal{A}_i$ deste, definimos

$$r_j = \sqrt{(a - a_j)^2 + (b - b_j)^2} \quad (25)$$

de modo que as funções de Bessel associadas serão

$$J_0(kr_j) = 1 - \frac{(kr_j)^2}{4} + \frac{(kr_j)^4}{64} - \frac{(kr_j)^6}{2304} + \dots \quad (26)$$

que são funções que satisfazem a equação de Helmholtz, cada uma centrada em um dos nove nós do stencil, com dependência apenas radial. Definimos o conjunto composto por estas funções conforme segue

$$\mathbb{B} = \{J_0(kr_j), j = 1, 2, \dots, 9\}. \quad (27)$$

Empregando-se o conjunto das funções (27) na metodologia apresentada na seção (2), é possível a obtenção dos mesmos coeficientes da formulação QOFD.

Como todas as funções da base de Bessel satisfazem o problema identicamente precisamos fixar um parâmetro de alguma maneira conveniente levando-se em conta a numeração dos nós do stencil. Isto será feito impondo-se a restrição $\varphi_{|\mathcal{A}_i|} = \varphi_9 = 1$, que não satisfaz a EDP de Helmholtz (24). Com isso, o sistema 9×9 terá termo de fonte não nulo, donde a solução não trivial é factível.

Este procedimento, empregado em malhas uniformes e fixando o coeficiente $c_m := c_9 = 4$, resulta no stencil da figura Fig. (6) cuja simetria implica em

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = c_4 = c_3 = A_1 \\ c_5 = c_6 = c_7 = c_8 = A_2 \end{aligned} \quad (28)$$

sendo que

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{4}{5} - \frac{29}{125}(kh)^2 - \frac{2549}{50000}(kh)^4 - \frac{473849}{45000000}(kh)^6 - \frac{10086892607}{4704000000000}(kh)^8 \dots \\ A_2 &= -\frac{1}{5} - \frac{17}{250}(kh)^2 - \frac{801}{50000}(kh)^4 - \frac{76313}{22500000}(kh)^6 - \frac{1091144231}{1568000000000}(kh)^8 \dots \end{aligned} \quad (29)$$

são os mesmos coeficientes do método Quasi Optimal Finite Difference method (QOFD) apresentado em (Fernandes, 2009). Ou seja, nossa proposta é equivalente ao stencil de poluição mínima do método QOFD, sendo um método superior à aproximações feitas com base canônica.

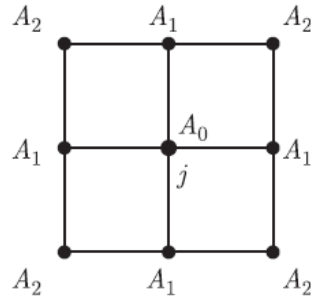


Figura 6: Stencil uniforme de nove nós.

Estudos de convergência apresentados nas figuras Fig. (7) apontam que um método de segunda ordem é obtido para aproximação usual seja a malha uniforme ou não, conforme os gráficos (7a) e (7b), por essa ordem.

No que segue, as aproximações via base de Bessel resultam em sexta ordem para malha uniforme e pelo menos terceira ordem para malha não uniforme conforme consta nos gráficos (8a) e (8b) de modo respectivo.

A Figura (9) apresenta um estudo em que taxas de convergência ótima foram obtidas para para as normas L^2 e H^1 , em consonância com as obtidas via a formulação QOFD.

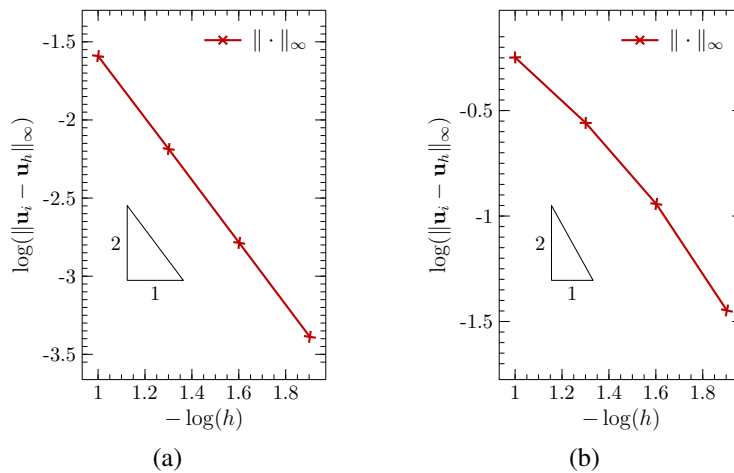


Figura 7: Estudo de convergência do problema de Helmholtz para as bases canônica uniformes e irregulares. (a) Base canônica e malha uniforme; (b) Base canônica e malha não uniforme. Condições de Dirichlet e $k = 20$;

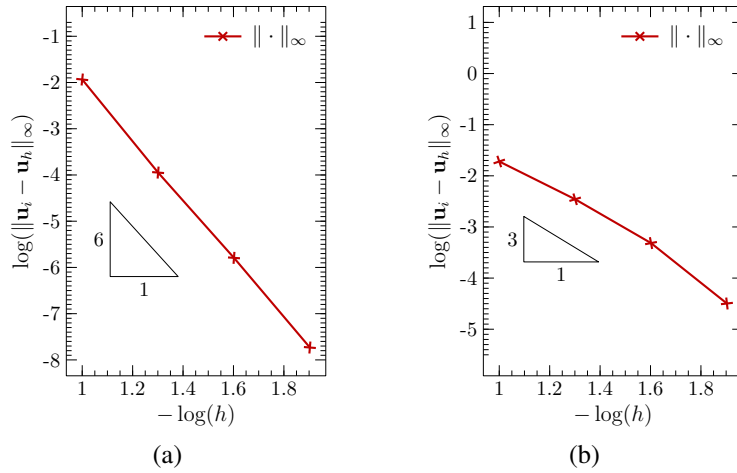


Figura 8: Estudo de convergência do problema de Helmholtz para as bases de Bessel em malhas uniformes e irregulares. (a) Base de Bessel e malha uniforme; (b) Base Bessel e malha não-uniforme. Condições de Dirichlet e $k = 20$.

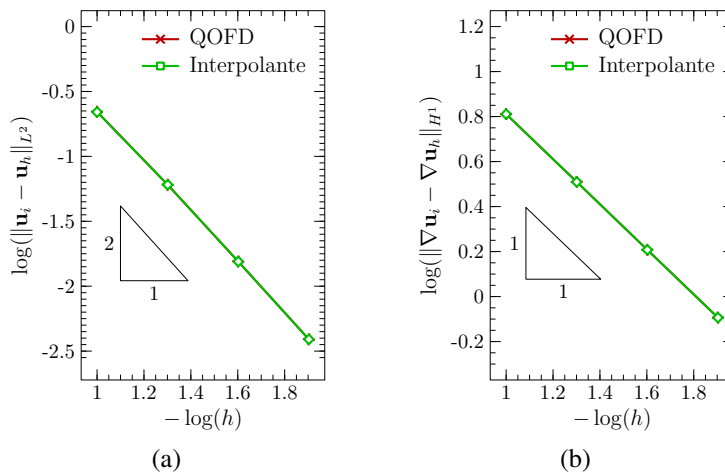


Figura 9: Comparação taxas de convergência pela aproximação QOFD na norma L^2 ilustradas em (9a). A Figura (9b) mostra o resultado de convergência para a seminorma do H^1 . condições de Dirichlet e $k = 20$.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentadas metodologias para a obtenção de aproximações em diferenças finitas para o problema de Helmholtz, munido de condições de contorno de Dirichlet. O método de poluição mínima QOFD foi apresentado e aplicado ao referido problema sobre malhas uniformes. Para situações envolvendo malhas não-uniformes fossem factíveis apresentamos uma metodologia que faz uso de uma base de funções para a obtenção de um sistema linear de equações. Com isso os coeficientes do stencil são obtidos e assim uma solução aproximada do problema é dada. Por meio de uma base de funções composta pelos polinômios canônicos, aproximações de segunda ordem na norma do máximo foram obtidas para malhas uniformes e não-uniformes.

Para a obtenção de uma formulação equivalente ao QOFD o emprego de uma base de funções composta pelas funções de Bessel de primeiro tipo e ordem zero, considerando-se apenas o problema com dependência radial. Este expediente gerou exatamente os mesmos coe-

ficientes do QOFD, onde a obtenção dos coeficientes mostrou-se simplificada. Estudos com diferentes normas foram realizados confirmando as equivalências de ambas formulações. Nossa proposta pode ser, inclusive, generalizada a outras classes de problemas como apresentamos em (Santos & Loula, 2016).

Estas metodologias obtidas visando aproximações de alta ordem, se comparadas às aproximações clássicas, possuem aplicação direta em problemas de modelagem sísmica, contribuindo para a melhoria da qualidade de dados sísmicos gerados a partir de aquisições sísmicas.

6 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao programa de recursos humanos PRH da Agência Nacional de Petróleo (ANP) pelo financiamento do mestrado.

REFERÊNCIAS

- Babuska, I. M., & Ihlenburg, F. (1995). Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part i: The h version of the fem., *Computers. & Mathematics with Applications*, 30, 937.
- Fernandes, D. T. (2009). *Métodos de elementos finitos e diferenças finitas estabilizados para o problema de Helmholtz*. Tese de doutorado, LNCC.
- Fernandes, D. T., & Loula, A. (2010). Quasi optimal finite difference method for Helmholtz problem on unstructured grids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*(82), 1244-1281.
- Karen Carrilho da Silva, K. C. (2012). *Modelagem de migração reversa no tempo e estudos de iluminação empregando o conceito de dados sísmicos blended* (Dissertação de Mestrado). COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- LeVeque, R. J. (2005). *Finite difference methods for differential equations*. University of Washington.
- Liszka, T., & Orkisz, J. (1980). The finite difference method on arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computer e Structures*(11), 83-95.
- Santos, J. D. B., & Loula, A. F. D. (2016). Geração de aproximações de diferenças finitas em malhas não uniformes para as edp's de Laplace e Helmholtz. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*.