



ACOPLAMENTO MEF-MDF PARA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS VIBROACÚSTICOS 2D

Renan Godoy Burgos

Sérgio Luís de Oliveira

Bernardo Lima Carvalho

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

renangodoy-@hotmail.com

sergioluis_eng@yahoo.com.br

bernardolcarvalho@hotmail.com

paulo.vribeiro@ufpe.br

Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE

Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil

Abstract. Problems related to Fluid-Structure Interaction (IFE) are present in many practical cases in Engineering. In this sense, dams reservoirs, sluices, navigation channels and columns of offshore platforms and wind turbines are some examples. The effect generated by the fluid over the structure has a key importance, because it changes its behavior and adds other forces, and so it's indispensable an analysis of the coupled system in order to improve the development of projects. Nowadays, because of the progress in computer industry, the numerical and computational tools are fairly efficient means to perform these evaluations. Among the most used numerical methods, there are the Finite Differences Method (FDM), the Finite Element Method (FEM) and the Finite Volume Method (FVM). This paper presents a code developed with FEM-FDM coupling for the solution of the interaction of an acoustic cavity and a flexible environment (elastic). The structural domain, which is ruled by the 2D elasticity equations, is evaluated using Constant Strain Triangle (CST) finite elements, while the fluid, ruled by Helmholtz equation, is evaluated through FDM. The code results are validated based in analytical solutions available in the literature, presenting negligible errors when used a fair sized mesh and it also has a viable processing time that makes the program usable.

Keywords: *Fluid-Structure Interaction, Modal Analysis, Finite Elements, Finite Differences, Vibroacoustic*

1 INTRODUÇÃO

Diversos sistemas físicos na engenharia são formados por um sólido atuando juntamente com um fluido. A solução de problemas deste tipo não está relacionado apenas à análise de cada meio separadamente. Para se ter o comportamento real destes sistemas, deve-se modelar o fenômeno de maneira acoplada. Daí vem a importância do estudo da Interação Fluido-Estrutura.

Dentre os vários casos práticos, podemos destacar a interação dinâmica de uma barragem com o seu reservatório, em que, durante a ação de um sismo, o fluido pode gerar esforços devido às pressões hidrodinâmicas no paramento da barragem, gerando uma nova configuração de tensões e estabilidade na estrutura (Sousa Jr., 2006). A interação entre uma eclusa e um canal de navegação também pode ser incluída neste problema, em que se forma uma cavidade acústica confinada por muros de concreto. Outros casos englobam pilares de plataformas e aerogeradores *offshore*, navios petroleiros e tanques propulsores de foguetes.



Figura 1. Eclusa de Tucuruí. Fonte: Geopolítica do Petróleo, site

Problemas de interação de uma estrutura com um fluido acústico já foram estudados e resolvidos por diversos métodos e podem ser encontrados em textos clássicos como os de Rayleigh (1945) e Lamb (1945). Trabalhos mais recentes, envolvendo uma abordagem analítica e com métodos numéricos, foram de maior interesse para este artigo. Silva e Pedroso (2006) apresentam desenvolvimento de soluções analíticas e numéricas para problemas unidimensionais, em que o acoplamento entre o sólido e a cavidade é feito a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) ou do Método das Diferenças Finitas (MDF), utilizando cada um deles separadamente. Sousa Jr. (2006) também resolve com os mesmos métodos de forma separada, porém evoluindo para problemas bidimensionais. Já Ribeiro (2010) cria o método “pseudo-acoplado” para resolver analiticamente cavidades acústicas bidimensionais.

Este trabalho propõe uma abordagem diferente para resolver o problema, em que o acoplamento é feito utilizando o MDF e o MEF simultaneamente. Foi desenvolvido um código computacional próprio em linguagem MATLAB para resolver problemas de interação entre uma estrutura flexível (com comportamento elástico-linear) e um meio acústico (fluido linearmente compressível), em que este é modelado a partir do MDF enquanto o primeiro tem seu comportamento aproximado pelo MEF com a utilização de elementos de viga e do tipo *Constant Strain Triangle* (CST). São feitas análises modais para casos com condições de

contorno variadas. A validação é feita a partir de resultados disponíveis na literatura ou obtidos com a utilização de software comercial (ANSYS).

2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ONDA BIDIMENSIONAL E ESTRUTURAS RETICULADAS (VIGAS)

2.1 MDF para a cavidade

O movimento do fluido na cavidade é governado pela equação da onda bidimensional, que, baseado em hipóteses simplificadoras (fluido é homogêneo, invíscido, linearmente compressível, com movimento irrotacional e os deslocamentos e suas derivadas espaciais são pequenos), pode ser descrito como (Sousa Jr., 2006):

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \therefore \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

onde p é a pressão dinâmica, a qual varia no espaço em duas dimensões (x e y) e no tempo (t), e c é a velocidade de propagação do som no fluido.

Considerando oscilações harmônicas no tempo, com frequência ω , a Eq. (1) pode ser reduzida à seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P = 0 \quad (2)$$

onde P agora é a pressão independente do tempo, variando apenas no espaço (x e y).

A partir da Eq. (2), pode-se aplicar o operador de diferenças finitas bidimensional para derivadas de segunda ordem, sendo discretizada da seguinte maneira:

$$\frac{P_{i-1,j} - 2 \cdot P_{i,j} + P_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i,j-1} - 2 \cdot P_{i,j} + P_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot P_{i,j} = 0 \quad (3)$$

onde i e j indicam as posições na malha nas direções x e y , respectivamente; Δx e Δy são o passo nas direções x e y , respectivamente. Assim, $P_{i,j}$ representa a pressão no ponto da malha referente à posição i em x e j em y .

Para todos os pontos (i, j) da malha, deve-se aplicar a regra de recorrência da Eq. (3). Cada vez que ela é utilizada, uma nova equação é gerada para a montagem do sistema de equações algébricas. Porém, quando se está sobre algum ponto do contorno da cavidade, a aplicação da Eq. (3) irá envolver um “ponto virtual”, isto é, um ponto que está fora da malha real do fluido. Este ponto deverá ser escrito em função dos outros pontos reais, fato obtido a partir da discretização das equações diferenciais do contorno.

Para facilitar o entendimento e desenvolvimento do problema, os pontos na malha devem ter apenas um único índice, ou seja, cada ponto com pressão $P_{i,j}$ deve ser substituído por $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, com n sendo o número total de pontos da malha da cavidade.

Condições de contorno

Neste trabalho são consideradas apenas as condições de contorno de pressão nula, parede rígida e interface fluido-estrutura. Esta última será detalhada mais adiante (tópico 4).

A primeira condição é modelada estabelecendo pressão nula na região, ou seja, $P_k = 0$, onde k representa o ponto em análise (pivô) sobre o contorno.

Para a condição de contorno rígido, tem-se que a vazão nesta região é nula (Silva e Pedroso, 2006). Isto significa que:

$$\frac{\partial P}{\partial N} = 0 \quad (4)$$

onde N indica a direção normal ao contorno.

Aplicando o operador de diferenças finitas para derivadas de primeira ordem em um ponto k do contorno, a Eq. (4) é reduzida para a seguinte relação:

$$\frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2 \cdot h} = 0 \therefore P_{k-1} = P_{k+1} \quad (5)$$

onde h é o passo da malha na direção perpendicular ao contorno e $k - 1$ e $k + 1$ são pontos adjacentes ao ponto k na direção perpendicular ao contorno.

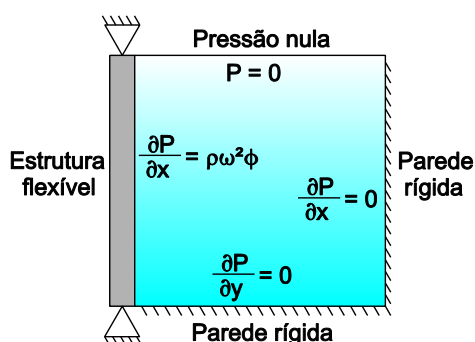


Figura 2. Condições de contorno para cavidade

2.2 MDF para estruturas reticuladas (vigas de flexão)

A equação do movimento de uma viga de flexão em vibração livre (sem considerar carregamento externo) pode ser obtido, de forma simplificada, a partir do equilíbrio de forças verticais e de momentos num elemento infinitesimal da estrutura, de acordo com a Fig. 3.

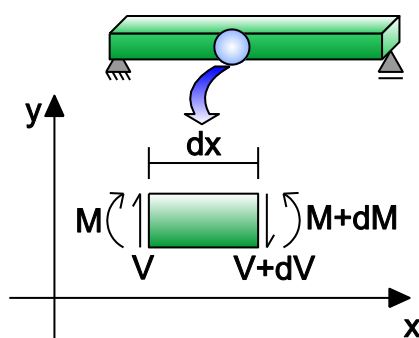


Figura 3. Esforços atuantes num elemento infinitesimal de viga

Pelo equilíbrio de momentos, obtém-se a relação entre momento e esforço cortante:

$$\frac{dM}{dx} = V \therefore (\text{derivando os dois lados em relação a } x) \therefore \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} \quad (6)$$

Pelo equilíbrio de forças verticais, tem-se:

$$\sum F_y = m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \therefore V - (V + dV) = \rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \therefore \frac{dV}{dx} = -\rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (7)$$

onde m é a massa do elemento, A é a área da seção transversal, ρ é massa específica do material e v é o deslocamento transversal, que varia no tempo t e no espaço x .

Substituindo a relação da Eq. (6) na Eq. (7) e introduzindo o conceito clássico de momento-curvatura da Resistência dos Materiais ($d^2v/dx^2 \cdot E \cdot I = M$), obtém-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E \cdot I \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia baricêntrico.

Considerando a rigidez à flexão da viga ($E \cdot I$) constante e substituindo $\rho \cdot A$ por $\bar{m}$, que é a massa por unidade de comprimento, chega-se na expressão da viga em vibração livre:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

Assim como no caso da cavidade, considerando oscilações harmônicas no tempo, tem-se:

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi = 0 \quad (10)$$

onde φ é o deslocamento transversal da viga, que varia apenas no espaço x , e ω é a frequência.

Aplicando o operador de diferenças finitas para derivadas de quarta ordem, a Eq. (10) fica discretizada da seguinte maneira:

$$E \cdot I \cdot \frac{(\varphi_{i-2} - 4 \cdot \varphi_{i-1} + 6 \cdot \varphi_i - 4 \cdot \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2})}{(\Delta x)^4} - \omega^2 \cdot \bar{m} \cdot \varphi_i = 0 \quad (11)$$

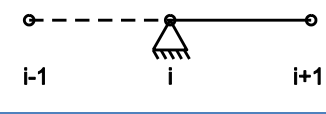
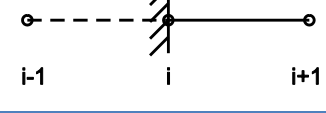
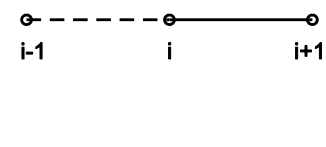
onde i indica a posição do ponto na malha e Δx é o passo.

Da mesma forma que o caso anterior, também haverá “pontos virtuais” quando estiver nos pontos sobre o contorno e nos adjacentes a eles. A aplicação das equações de discretização do contorno resolve este problema.

Condições de contorno

Neste trabalho são utilizadas 3 condições de contorno usuais para vigas. A tabela 1 a seguir apresenta um resumo das relações resultantes para cada vinculação. Os operadores de diferenças finitas são aplicados para o pivô i sobre o vínculo.

Tabela 1. Condições de contorno para vigas reticuladas

Apoio rotulado 	$\varphi_i = 0$ $M = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \therefore \frac{\varphi_{i-1} - 2 \cdot \varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \therefore \varphi_{i-1} = -\varphi_{i+1}$
Engaste 	$\varphi_i = 0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \therefore \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \therefore \varphi_{i-1} = \varphi_{i+1}$
Livre 	$M = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \therefore \frac{\varphi_{i-1} - 2 \cdot \varphi_i + \varphi_{i+1}}{\Delta x^2} = 0 \therefore \varphi_{i-1} = 2 \cdot \varphi_i - \varphi_{i+1}$ $V = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 \therefore \frac{-\varphi_{i-2} + 2 \cdot \varphi_{i-1} - 2 \cdot \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}}{2 \cdot \Delta x^3} = 0 \therefore$ $\therefore \varphi_{i-2} = 4 \cdot \varphi_i - 4 \cdot \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}$

2.3 Frequências e modos de vibração

Aplicando a Eq. (3) e a Eq. (11) para todos os pontos da malha da cavidade e viga, respectivamente, e utilizando as relações das condições de contorno de cada caso, forma-se um sistema de equações em termos das pressões (para cavidade) e outro em termos dos deslocamentos transversais (para estrutura). Organizando os termos dos sistemas em dois grupos para cada sistema, um que está multiplicando a frequência ao quadrado (matriz $[C]$) e outro que não está (matriz $[A]$), forma-se a seguinte equação matricial:

$$[A]\{\mu\} + \omega^2 \cdot [C]\{\mu\} = 0 \therefore ([A] + \omega^2 \cdot [C])\{\mu\} = 0 \quad (12)$$

onde $\{\mu\}$ é o vetor de variáveis, podendo ser ou $\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix}$ ou $\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{Bmatrix}$, a depender se

o caso é para a cavidade (variáveis são as pressões) ou para a viga (variáveis são os deslocamentos transversais), com n e m sendo o número total de pontos da malha da cavidade e estrutura, respectivamente.

A Eq. (12) está na forma de um problema de autovalores e autovetores que, quando solucionado, fornece as frequências naturais (solução do polinômio característico resultante do determinante de $|[A] - \omega^2 \cdot [-C]|$ igual a zero) e os modos de vibração, respectivamente.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: ELASTICIDADE 2D E FORMULAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA DO ELEMENTO CST

Problemas de elasticidade bidimensional costumam ser expressos por um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem acopladas. Com base nas restrições impostas na direção da espessura (normalmente a direção z), um problema bidimensional pode ser considerado tanto um estado plano de tensões como um estado plano de deformações.

Estão presentes as condições de estado plano de tensões quando a dimensão da espessura é muito menor do que as dimensões do comprimento e da largura de um sólido. Ou seja, admite-se que as tensões serão nulas na direção z ao longo de todo o corpo, assim, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Para estes casos, a relação tensão-deformação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Já o estado plano de deformações em um sólido ocorre quando a dimensão da espessura é muito maior do que as outras duas dimensões. Ou seja, admite-se que as deformações na direção de z são iguais à zero, ou seja, $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Para estes casos, a relação tensão-deformação passará para seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De forma compacta, temos:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (15)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material para os estados planos de tensão ou deformação.

3.1 Equações governantes

Em problemas bidimensionais, as tensões e deformações não dependem da coordenada na direção da espessura (direção z). As equações básicas de equilíbrio da Teoria da Elasticidade podem ser obtidas com o equilíbrio estático de um elemento infinitesimal de dimensões dx e dy , conforme ilustrado na Fig. 4.

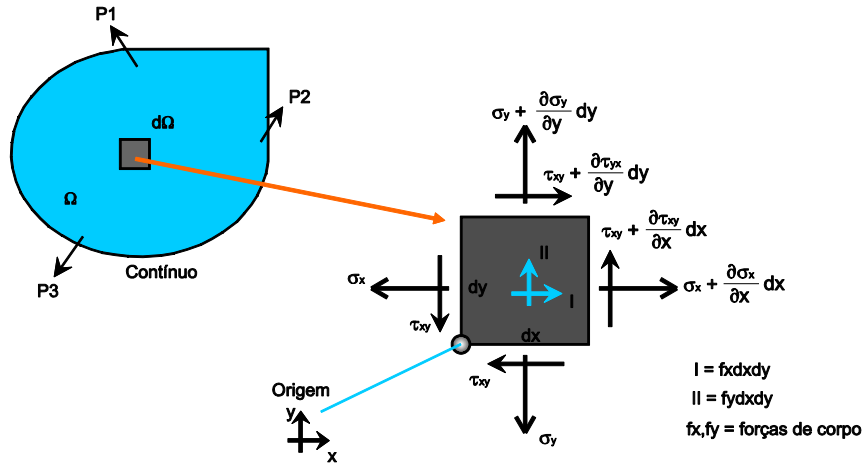


Figura 4. Equilíbrio de um elemento infinitesimal de um contínuo (Ribeiro, 2015)

Fazendo o equilíbrio translacional do elemento de espessura unitária, nas direções x e y , temos como resultado o seguinte sistema de equações diferenciais de equilíbrio para um problema de elasticidade bidimensional.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \end{cases} \quad (16)$$

onde f_x e f_y são as forças de corpo.

3.2 Formulação do MEF para problemas de estado plano

Para a solução numérica do sistema indicado na Eq. (13) usando o MEF, pode-se aplicar a utilização tradicional de funcionais, que surgem no Método de Energia Potencial Mínima, por exemplo, ou o Método dos Resíduos Ponderados (MRP) que permite a elaboração de declarações integrais que constituem a base do MEF.

Considera-se que o domínio Ω seja tomado como um elemento finito de forma arbitrária (triangular ou retangular, por exemplo), tornando o contínuo da Fig. 4 um conjunto de elementos finitos, onde no interior de cada elemento os deslocamentos (u,v) são definidos por funções de interpolação $u(x,y)$ e $v(x,y)$. A matriz de rigidez do elemento $[K_e]$ pode ser obtida conforme dedução mostrada por Logan (2012), Kwon e Bang (2000) e muitos outros autores, onde obtém-se a seguinte expressão para determinação de $[K_e]$:

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (17)$$

onde $[D]$ é a matriz constitutiva do material para o estado plano de tensões ou para o estado plano de deformações e $[B]$ é a matriz que contém as derivadas parciais, em relação a x e y , das funções Hermitianas $(H_1, H_2 \dots H_n)$. A matriz $[B]$ é obtida a partir da seguinte expressão:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial H_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial H_n}{\partial y} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial y} & \frac{\partial H_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.3 Elemento triangular de deformação constante (CST)

Em elementos finitos, um sólido plano pode ser dividido em vários elementos contíguos. Devido a sua grande versatilidade de discretização de geometrias diversas, a maneira mais simples de dividir um sólido plano é usando elementos triangulares.

Considere o triângulo mostrado na Fig. 5. Esse é o elemento mais simples da elasticidade bidimensional. Para interpolação ao longo dos campos de deslocamentos $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são adotadas funções lineares em x e y como a seguir:

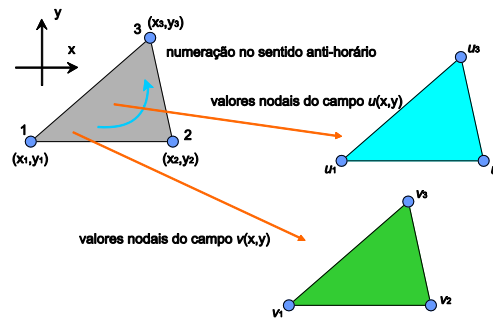


Figura 5. Representação do elemento CST (Ribeiro, 2015)

$$u(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (19)$$

$$v(x, y) = c_4 + c_5x + c_6y \quad (20)$$

Em notação matricial para Eq. (19), temos:

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Os valores de deslocamentos nodais na direção x (u_1, u_2, u_3) indicam três condições para obtenção dos coeficientes c_i . Assim, o problema pode ser reformulado com a particularização de Eq. (21) para os valores nodais, com isso temos então:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Se os três pontos não estiverem alinhados, pode-se então afirmar que a matriz de coeficientes em Eq. (22) possui inversa. Desta forma é possível determinar os coeficientes desconhecidos c_i da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

onde A é a área do triângulo, dada por:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Das Eqs. (21) e (23), temos:

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Após as realizações dos produtos, temos:

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} [H_1(x, y) \quad H_2(x, y) \quad H_3(x, y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

onde H_i são as funções Hermitianas, dadas por:

$$H_1(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \quad (27)$$

$$H_2(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (28)$$

$$H_3(x, y) = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (29)$$

Substituindo as Eqs. (27) a (29) na matriz $[B]$ dada na Eq. (18), obtém-se a seguinte matriz $[B]$ para o elemento triangular CST:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) & 0 & (y_3 - y_1) & 0 & (y_1 - y_2) & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2) & 0 & (x_1 - x_3) & 0 & (x_2 - x_1) \\ (x_3 - x_2) & (y_2 - y_3) & (x_1 - x_3) & (y_3 - y_1) & (x_2 - x_1) & (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Como para o elemento CST a matriz $[B]$ é constante, e definindo a espessura do elemento como t , a matriz de rigidez do elemento $[K_e]$ é dada por:

$$[K_e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega = [B]^T [D] [B] \int_{\Omega} d\Omega \div [K_e] = [B]^T [D] [B] (At) \quad (31)$$

Matriz de massa para o elemento CST

A partir das equações de equilíbrio dinâmico de um elemento infinitesimal de um sólido deformável, pode-se obter a seguinte expressão para determinação da matriz de massa do elemento $[M_e]$ (Soriano, 2009):

$$[M_e] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV \quad (32)$$

onde ρ é a massa específica do material e $[N] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & H_2 & 0 & H_3 \end{bmatrix}$ é a matriz com as funções de forma, que são iguais às funções Hermitianas adotadas para obtenção dos campos de deslocamentos do elemento (Eqs. (27) a (29)).

A matriz de massa consistente pode ser determinada conforme mostrado por Souza Jr. (2006) e Logan (2012). Para o elemento CST temos então:

$$[M_e] = \frac{\rho A t}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

3.4 Frequências e modos de vibração

Aplicando a Eqs. (31) e (33) para todos os elementos da malha em MEF da estrutura, pode montar uma equação matricial da mesma forma que ocorreu para o MDF:

$$[K]\{\varphi\} - \omega^2 \cdot [M]\{\varphi\} = 0 \therefore ([K] + \omega^2 \cdot [-M])\{\varphi\} = 0 \quad (34)$$

onde $[K]$ é a matriz rigidez global, $[M]$ é a matriz de massa global e $\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$ é o vetor

com deslocamentos nodais.

Assim, tem-se novamente um problema de autovalores e autovetores que, quando solucionado, fornece as frequências naturais e os modos de vibração, respectivamente.

4 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

A estratégia para solução do problema acoplado é resolver as equações tanto da estrutura quanto do fluido simultaneamente. Isto acarretará em algumas mudanças.

Primeiramente, na equação da estrutura, deverá ser incorporado um termo referente às forças devido às pressões do fluido na região de interface com o sólido. Com isso, já no caso final do sistema de equações desenvolvido, aparecerá um vetor de pressões multiplicado por sua matriz associada. Esta será diferente para o tipo de discretização utilizado para a estrutura. Caso o sólido seja discretizado por MEF, os termos associados às pressões são as áreas de influência de cada força transversal à estrutura devido ao fluido. Já no MDF, por se tratar de um método discreto, esta área de influência não faz mais sentido, sendo os termos multiplicando as pressões apenas o valor unitário. Estes termos devem estar de acordo com os

graus de liberdade de translação transversal à estrutura e pressão associada ao ponto de influência na cavidade. Percebe-se então que, para este caso, ocorre o acréscimo das variáveis da equação do fluido (pressões) na resolução da equação da estrutura, que tem os deslocamentos transversais como variáveis.

A outra alteração ocorre para a equação da onda bidimensional com o acréscimo da condição de contorno da interface fluido-estrutura (como pode ser visto na Fig. 2). Esta resulta em uma equação adicional que, em MDF, gera uma nova relação para reescrever os “pontos virtuais” em termos dos pontos reais da malha da cavidade. A condição diz o seguinte (Silva e Pedroso, 2006):

$$\frac{\partial P}{\partial N} = -\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho \cdot (-\omega^2 \cdot \varphi) \therefore \frac{\partial P}{\partial N} = \rho \cdot \omega^2 \cdot \varphi \quad (35)$$

onde ρ indica densidade do fluido.

Aplicando o operador de diferenças finitas para derivadas de primeira ordem, obtém-se a relação desejada:

$$\frac{P_{k+1} - P_{k-1}}{2 \cdot h} = \rho \cdot \omega^2 \cdot \varphi_k \therefore P_{k-1} = P_{k+1} - 2 \cdot h \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot \varphi_k \quad (36)$$

Neste caso, nota-se o acréscimo das variáveis da equação do sólido (deslocamentos transversais) na resolução da equação do fluido, que tem as pressões como variáveis.

As equações da estrutura e da cavidade podem ser organizadas em uma única equação matricial (matriz de rigidez e massa acoplados), sendo dispostos nas primeiras linhas os termos originados da equação do sólido e, imediatamente a seguir, os termos resultantes da equação do fluido. Ou seja, seria escrever a Eq. (12) (caso estrutura) ou Eq. (34) seguida da Eq. (12) (caso fluido). Além disso, os termos adicionais referentes à interação fluido-estrutura devem ser acrescentados, como mostrado a seguir:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] & [FS_e] \\ 0 & [A] \end{bmatrix} + \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} [-M] & 0 \\ [FS_f] & [C] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\varphi\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde $[FS_e]$ e $[FS_f]$ indicam as matrizes com os termos da interação fluido-estrutura originados das equações de movimento da estrutura e do fluido, respectivamente.

A matriz $[FS_e]$ é composta por elementos com valor unitário, caso seja discretizado por MDF, ou, caso seja escolhido o MEF, os elementos serão a área de influência de valor Δx (pontos no interior do contorno) e $\Delta x/2$ (pontos na extremidade do contorno) ou Δy e $\Delta y/2$, a depender da direção da interface fluido-estrutura. Já para a matriz $[FS_f]$, utilizando a relação da Eq. (36) e incorporando-a na Eq. (3), obtém-se os termos com valor $2 \cdot \rho/h$. Para as duas matrizes, os elementos devem ser adicionados em suas posições correspondentes, de acordo com o que foi explicado no começo deste tópico 4. Para os restantes dos elementos destas matrizes, atribui-se valor nulo.

É importante destacar que, para se ter consistência no fenômeno e na solução do problema, os termos da interação fluido-estrutura originados da equação da estrutura e do fluido devem ter sinais contrários. Ou seja, se os termos em $[FS_f]$ forem positivos, aqueles em $[FS_e]$ devem ser negativos.

5 ESTRUTURA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código computacional para fazer análises modais em problemas de interação fluido-estrutura foi desenvolvido em MATLAB e montado de acordo com o fluxograma a seguir.

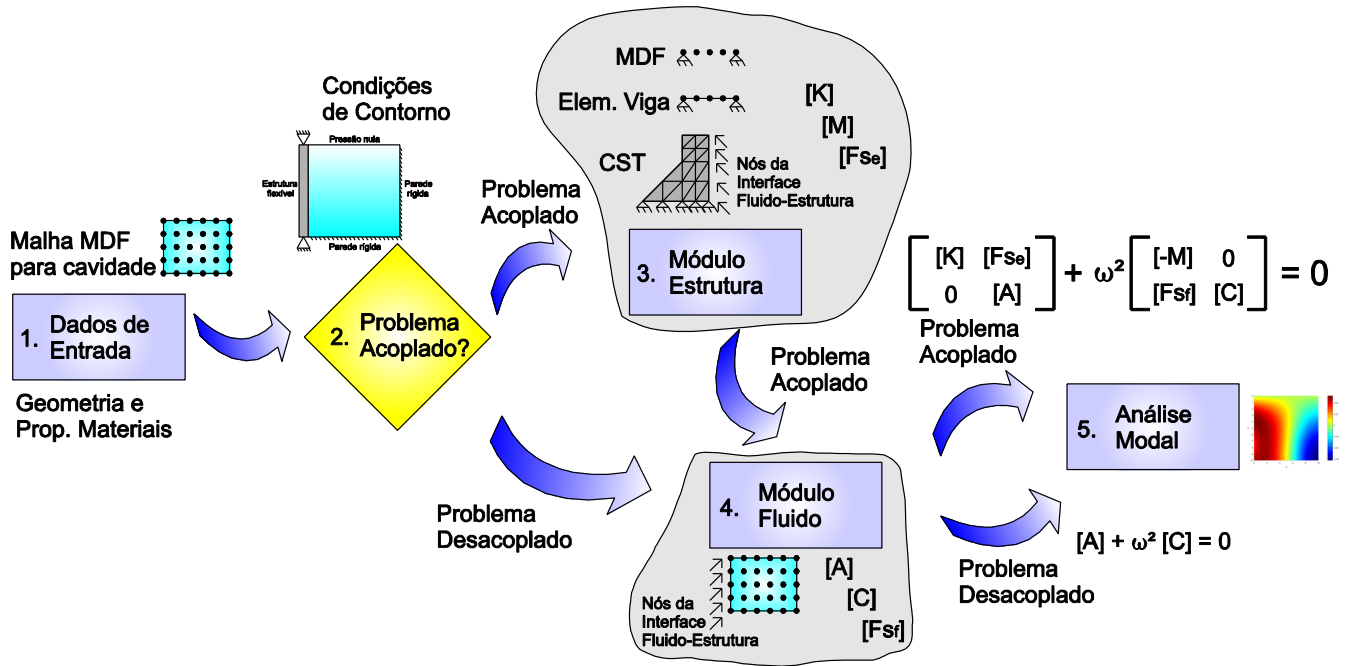


Figura 6. Fluxograma do programa desenvolvido

Etapa 1: Aqui são inseridos pelo usuário os dados referentes à geometria (dimensões das formas da cavidade e estrutura, esta quando acoplado e sua malha gerada pelo código), propriedades dos materiais (densidade, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, velocidade do som no fluido) e à quantidade de pontos para geração da malha em MDF da cavidade, sendo calculados os passos em cada direção.

Etapa 2: Neste ponto, deve ser especificado se o problema é acoplado ou não. Em caso negativo, são especificadas as condições de contorno da cavidade, se parede rígida ou pressão nula, para as suas extremidades superior, inferior, esquerda e direita, e o código pula para a etapa 4. Em caso positivo, deve-se dizer quais os contornos com interface fluido-estrutura, além das duas condições anteriores, seguindo para a etapa 3. Nota-se que o código permite a inclusão de múltiplas interfaces do fluido em contato com estrutura.

Etapa 3: Esta parte é dedicada completamente à estrutura. Se esta for reticulada, pode-se escolher entre o MDF e o MEF por elementos de viga para o cálculo, e o próprio código cria a malha baseado na geometria e quantidade de pontos discretizados na cavidade para o lado associado à estrutura, especificados na etapa 1. Caso seja um sólido 2D, o método usado é MEF por CST. Se sua geometria for simples, como a combinação de formas retangulares, o código ainda é capaz de gerar a malha, sendo criado dois vetores para guardar as coordenadas dos nós (pois será necessário para montagem da matriz $[B]$). Se a geometria for mais complexa, como a de uma barragem, é necessário gerar a malha em outro programa, como o GiD, e entrar com seus dados no código. Após esta fase, começa a montagem das matrizes globais $[K]$ e $[M]$ da estrutura a partir de um *loop*, com a atualização dos valores da rigidez e massa de cada elemento, ou, caso seja MDF, com a atualização da regra de recorrência da Eq. (11) mais a aplicação das condições de contorno (apoio, engaste ou livre). Além disso, a

matriz $[FS_e]$ também é montada. É importante observar que, seja qual for o método utilizado, a quantidade de nós da estrutura na interface em contato com o fluido deve ser compatível com a quantidade de nós na mesma interface da cavidade (malha conforme).

Etapa 4: A penúltima etapa contempla apenas a cavidade. Aqui, deve-se montar as matrizes $[A]$ e $[C]$ basicamente aplicando a regra de recorrência da Eq. (3) em todos os pontos da malha, utilizando as condições de contorno quando necessário. Observando a malha à direita da Fig. 7, uma forma eficiente de conduzir essa implementação é aplicando a Eq. (3) para os nós de canto da cavidade, os quais englobam dois contornos (representados em vermelho), seguidos pelos nós das extremidades, que englobam um único contorno (excluindo os nós de canto; representados em amarelo) e, finalmente, os nós internos da cavidade (nós remanescentes). Para o problema acoplado, é montada também a matriz com os termos da interação fluido-estrutura originados da equação do fluido (matriz $[FS_f]$). Uma estratégia para incorporar a condição de contorno de pressão nula é, primeiramente, considerar o contorno como parede rígida (condição da Eq. (5)) e, posteriormente, na etapa 5, eliminar as linhas e colunas da matriz final referentes a essa condição.

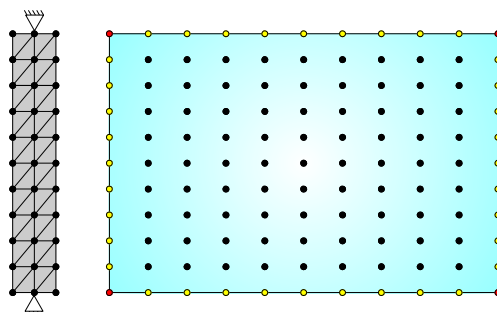


Figura 7. À esquerda, malha para a estrutura (CST); à direita, malha para cavidade (MDF)

Etapa 5: Para finalizar, de posse das matrizes originadas da estrutura e da cavidade, é organizada a equação matricial da forma da Eq. (37) (ou, para o caso desacoplado, apenas a Eq. (12) para o caso do fluido) e eliminam-se as linhas e colunas, desta matriz final, referentes aos graus de liberdade restritos na estrutura (quando usado o MEF) e àqueles onde há pressão nula no fluido. Assim, resolve-se o problema de autovalores e autovetores. Na solução, são geradas duas matrizes, em que em uma delas são guardadas as frequências naturais (autovalores) e na outra os modos de vibração (autovetores) associados a cada frequência. O programa exibe automaticamente as primeiras frequências naturais. É possível também plotar o campo de pressões para um modo de vibração desejado.

6 ESTUDOS DE CASO

Para todos os casos estudados, deseja-se fazer uma análise modal do fenômeno. Assim, o objetivo principal é obter as frequências naturais de vibração do sistema acoplado fluido-estrutura (saída de dados do programa a partir do código desenvolvido). Além disso, para todos os exemplos, a cavidade está com fluido ocupando todo o seu espaço.

6.1 Caso 1

Inicialmente é estudado o caso de uma cavidade acoplada a uma viga biapoiada. Esta possui 10 m de comprimento e 1 m de espessura. A cavidade é quadrada com dimensões de 10 m x 10 m. A estrutura possui densidade de 7800 kg/m³ e módulo de elasticidade de 2,1 x

10^{11} N/m². O coeficiente de Poisson tem valor de 0,3. O fluido tem densidade de 1000 kg/m³ (água) e a velocidade do som no fluido vale 1500 m/s. A cavidade possui a viga em seu contorno esquerdo e pressão nula nos demais. Este sistema é modelado de 3 formas diferentes, em que a estrutura é discretizada em MDF, MEF por elementos de viga e MEF por CST, enquanto para a cavidade utiliza-se apenas MDF para todos os casos. A validação é feita a partir do exemplo resolvido por Ribeiro (2010), o qual obteve resultados numéricos (software ANSYS v.11) e analíticos. Para estes exemplos, o próprio código gera a malha.

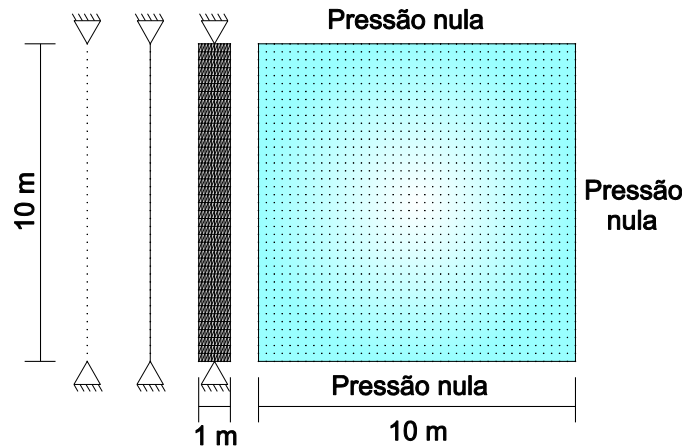


Figura 8. Geometria e malhas da estrutura (MDF, Elem. Viga e CST) e cavidade (MDF) do caso 1

Tabela 2. Resultados do estudo de caso 1

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)						
	ANSYS (referência)	MDF-MDF	Erro (%)	MDF-MEF (elem. viga)	Erro (%)	MDF-MEF (CST)	Erro (%)
1	123.68	123.96	0.23	124.02	0.27	127.8	3.33
2	523.34	528.6	1.01	529.64	1.20	522.87	0.09
3	570.11	570.19	0.01	570.19	0.01	569.86	0.04
4	882.36	881.78	0.07	881.78	0.07	881.22	0.13
5	1002.54	1001.77	0.08	1001.81	0.07	1000.47	0.21
6	1162.82	1184.29	1.85	1188.71	2.23	1114.69	4.14
7	1207.65	1206.78	0.07	1206.82	0.07	1205.1	0.21
Discretização da malha	Pontos na viga	41		41		451	
	Elementos na viga	-		40		800	
	Pontos na cavidade	1681		1681		1681	

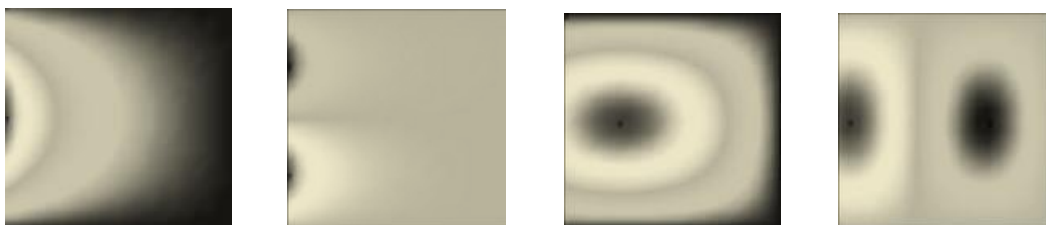


Figura 9. Modos de vibração 1, 2, 3 e 4 da cavidade, respectivamente. Fonte: Ribeiro (2010)

Analisando a Tabela 2, percebe-se que o código desenvolvido foi bastante eficaz, pois obteve resultados muito próximos dos de referência, com erros em sua maioria desprezíveis.

Vale notar que, para a modelagem MDF-MEF (CST), os modos de vibração 1 e 6 apresentam erros razoáveis, fato devido a estes resultados estarem relacionados a modos da estrutura. Além disso, observa-se também para esta mesma modelagem que a discretização da viga precisou ser consideravelmente mais refinada para se obter valores com erros equivalentes aos demais. Porém, apenas com o elemento CST foi possível estudar casos de estruturas com geometrias mais complexas, como os dois a seguir.

6.2 Caso 2

Agora é estudado um sistema que tem a forma semelhante a de uma eclusa, como por exemplo, a eclusa do Canal do Panamá. A estrutura possui geometria parecida a um “U” contornando a cavidade, a qual possui apenas o seu contorno superior com pressão nula, com os restantes em contato com o sólido. Toda a base da estrutura é considerada engastada e o topo e laterais (sem contato com o fluido) livres. A densidade do fluido e velocidade do som no fluido possuem os mesmo valores de 1000 kg/m^3 e 1500 m/s , respectivamente. A estrutura tem densidade de 7800 kg/m^3 e módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. As dimensões estão explicitadas na figura a seguir. Os resultados foram comparados com aqueles obtidos pelo software ANSYS v.14.5, em que a estrutura foi discretizada com elemento quadrilateral plano de 4 nós (Plane 42) e o fluido foi discretizado com elemento acústico Fluid 29 com pressão nula em sua superfície. Aqui, o código ainda é capaz de gerar sua própria malha.

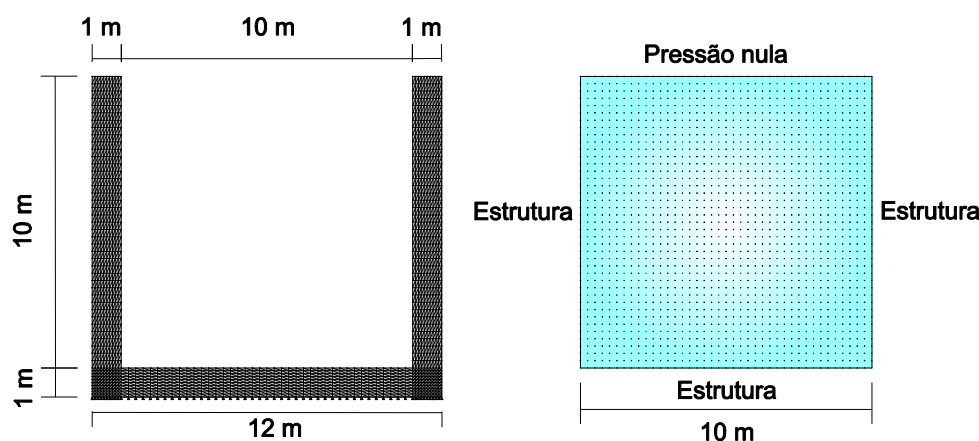


Figura 10. Geometria e malhas, geradas pelo código, da estrutura (CST) e cavidade (MDF) do caso 2

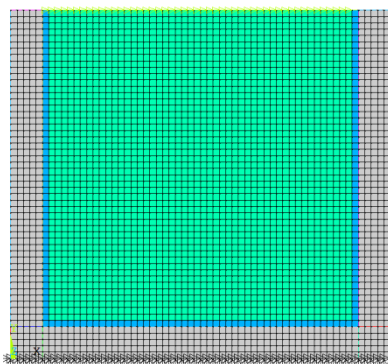


Figura 11. Malha do sistema gerada pelo ANSYS para o caso 2

Tabela 3. Resultados do estudo de caso 2

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		Erro (%)
	ANSYS	MDF-MEF (CST)	
1	39.78	42.04	5.68
2	42.31	44.68	5.60
3	197.98	205.7	3.90
4	248.2	264.13	6.42
5	341.74	349.79	2.36
6	565.13	571.97	1.21
7	654.21	673.27	2.91
Discretização da malha	Pontos na estrutura	1551	
	Elementos na estrutura	2800	
	Pontos na cavidade	1681	

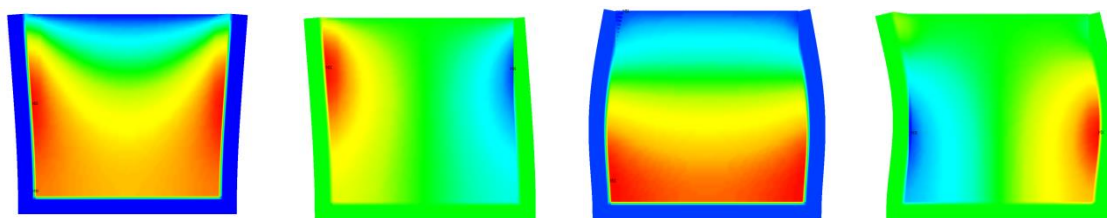


Figura 12. Modos de vibração 1, 2, 3 e 4 do sistema acoplado do caso 2, respectivamente

Observando os resultados da Tabela 3, nota-se que os erros obtidos, apesar de serem mais elevados que os do caso anterior, podem ser considerados aceitáveis, não superando 6,5%. Vale destacar que o sistema estudado aqui possui uma estrutura contínua englobando três lados da cavidade, sendo assim uma geometria mais complexa que a viga analisada anteriormente.

6.3 Caso 3

Por fim, é estudado um fenômeno mais complexo, em que se tem uma estrutura real, a eclusa 1 de Tucuruí. As dimensões e o perfil desta eclusa são mostrados na figura a seguir. O material da estrutura, desta vez, é concreto, com densidade de 2500 kg/m^3 e módulo de elasticidade de $2,5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. O coeficiente de Poisson tem valor de 0,2. Para cavidade, o fluido é a água (densidade de 1000 kg/m^3) e a velocidade do som no fluido é de 1500 m/s . Nas estruturas, a base é considerada engastada e, na cavidade, a parte inferior é considerada rígida, a parte superior possui pressão nula e as laterais estão em contato com as estruturas. Pelo fato da geometria do sólido ser um pouco mais complexa, a sua malha é gerada pelo software GiD (2015) e seus dados são lidos pelo código. Para a cavidade, o próprio código faz a geração. Os resultados foram, mais uma vez, comparados com aqueles obtidos pelo software ANSYS v.14.5, em que a estrutura foi discretizada com elemento quadrilateral plano de 4 nós (Plane 42) e o fluido foi discretizado com elemento acústico Fluid 29 com pressão nula em sua superfície.

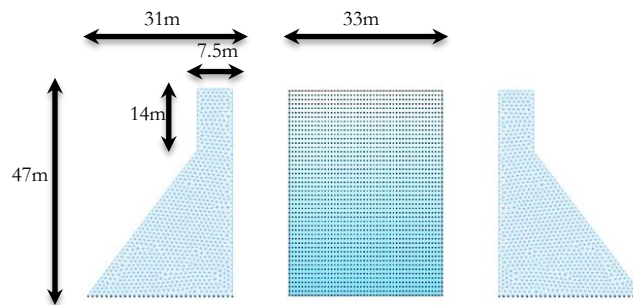


Figura 13. Geometria e malhas da estrutura (CST) e cavidade (MDF) do caso 3

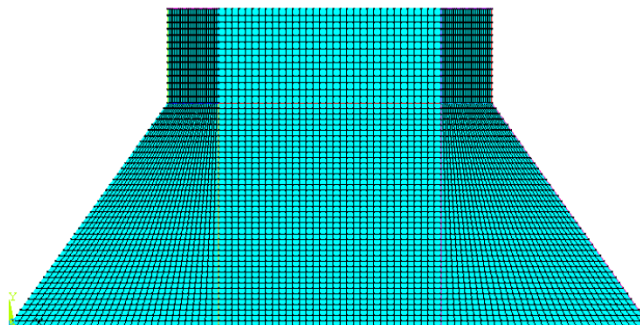


Figura 14. Malha do sistema gerada pelo ANSYS para o caso 3

Tabela 4. Resultados do estudo de caso 3

Modo de vibração	Frequências naturais (rad/s)		Erro (%)
	ANSYS	MDF-MEF (CST)	
1	28.85	28.51	1.19
2	33.49	33.02	1.42
3	52.58	52.35	0.44
4	86.60	86.03	0.66
5	99.56	98.81	0.76
6	136.35	133.64	1.98
7	138.97	136.30	1.92
Discretização da malha	Pontos na estrutura	904	
	Elementos na estrutura	1665	
	Pontos na cavidade	2304	

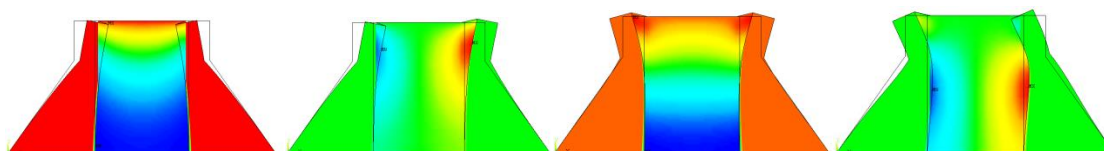


Figura 15. Modos de vibração 1, 2, 3 e 4 do sistema acoplado do caso 3, respectivamente

Os resultados da Tabela 4 apresentam erros baixos, não chegando a 2%, mostrando a eficácia do código desenvolvido para simular um problema em escala real. É possível observar, a partir da Fig. 15, que nos modos 1 e 3 as estruturas estão em oposição de fase, enquanto que nos modos 2 e 4 elas estão em fase.

7 CONCLUSÕES

O código computacional, desenvolvido com a ajuda do software MATLAB, é capaz de calcular as frequências naturais e obter os modos de vibração de um sistema acoplado fluido-estrutura. Esta é uma parte de um processo maior de análise de problemas vibroacústicos. Ele permite uma entrada fácil e rápida dos dados necessários e, para geometrias mais simples, permite resolver o problema com a geração da própria malha, seja para MDF (estrutura e cavidade) ou MEF (estrutura), o que representa uma vantagem pois há a independência de um software próprio para realizar esta etapa. É notável a importância de representar o modelo considerando o acoplamento do sólido com o fluido, e não estudar apenas cada um separadamente, pois a interação entre eles implica em mudanças consideráveis nos resultados, sendo assim possível simular com maior precisão o que ocorre na realidade com o fenômeno.

Em relação aos casos estudados, foram obtidos resultados satisfatórios, os quais foram validados a partir daqueles encontrados quando solucionados numericamente (com uso do software ANSYS) ou analiticamente (disponíveis na literatura), apresentando erros pequenos, e, quando comparados com diferentes métodos para acoplamento, os valores convergem entre si. Percebe-se que, com um maior refinamento da malha e utilização de métodos numéricos mais sofisticados, o tempo de processamento, apesar de aumentar, torna viável a utilização do programa desenvolvido. Este aumento se deve, principalmente, ao fato do código ser capaz de criar sua própria malha.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelos recursos financeiros disponibilizados.

REFERÊNCIAS

ANSYS Multiphysics v.14.5 Ansys Inc.

Geopolítica do Petróleo, 2010. (Fotografia). Julho 27, 2016. de:

<<https://geopoliticadopetroleo.wordpress.com/2010/10/13/pequenas-hidreletricas-ameacam-a-construcao-de-hidroviarias/>>

Horowitz, B., 2015. *Métodos Aproximados*, Notas de Aula, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFPE.

Kwon, Y. W.; Bang, H., 2000. *The Finite Element Method Using Matlab*, 2a ed., CRC Mechanical Engineering Series, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Lamb, H., 1945. *Hydrodynamics*. 6a ed., Dover, New York.

Logan, D. L., 2012. *A First Course in the Finite Element Method*, 1a ed., Cengage Learning, Boston, MA.

Rayleigh, J. W. S., 1945. *The Theory of Sound*, vol. 1, 2a ed. (1a ed. 1877), Dover, New York.

Ribeiro, P. M. V., 2010. *Soluções Analíticas para Cavidades Acústicas Bidimensionais com Aplicação ao Estudo de Problemas de Interação Dinâmica Barragem-Reservatório*. Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.TD-004A/10, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 306p.

Ribeiro, P. M. V., 2015. *Elementos Finitos 1*, Notas de Aula, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFPE.

Silva, S.F.; Pedroso, L.J., 2006. *Elementos de Acústica de Cavidades*. Relatório Técnico de Pesquisa. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF.

Soriano, H. L., 2009. *Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro. Ciência Moderna Ltda.

Sousa Jr., L. C., 2006. *Uma Aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos e Diferenças Finitas à Interação Fluido-Estrutura*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-008A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 197p.

Souza, S. M., 2007. *Contribuição para uma Metodologia de Análise Acoplada Fluido-Estrutura em Cavidades Acústicas com Paredes Flexíveis*. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-004A/07, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 177p.