



ESTUDO DO ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM PROCESSO DE DANIFICAÇÃO

Guilherme Oliveira Ferraz de Paiva

José Fabiano Araújo Moreira

Gelson de Sousa Alves

Francisco Evangelista Junior

guilherme_07@hotmail.com

Jf_moreira1991@hotmail.com

gelsondsalves@gmail.com

fejr.unb@gmail.com

Universidade de Brasília

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, primeiro andar
Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal,
Brasil.

Resumo. *Este trabalho teve como objetivo implementar funções de enriquecimento polinomiais, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), para aplicação em simulações de problemas de falhas em estruturas utilizando um modelo de dano bilinear. Os resultados foram verificados através da comparação com curvas experimentais retirados do ensaio de flexão em três pontos em viga com entalhe central. Comprovou-se, então, a eficiência e acurácia do MEFG polinomial em melhorar a previsão do comportamento de ruptura em detrimento de uma análise de Elementos Finitos. Esta qualidade tornou-se mais evidente nas simulações com malhas muito grosseiras, visto que apresentaram resultados com precisão equivalente a outros encontrados na literatura, porém, com uma quantidade muito inferior de elementos.*

Palavras Chave: *MEFG, Enriquecimento Polinomial, Mecânica do Dano Contínuo, Materiais quasi-frágeis.*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos convencional não consegue descrever satisfatoriamente alguns problemas de valor de contorno (PVC's) tais como os problemas que tratam de propagação de trincas, cuja descrição é naturalmente mais complexa por envolver o fenômeno da singularidade no campo de tensões, elevadas deformações e descontinuidade nos campos incógnitos. Ainda que seja possível obter aproximações satisfatórias via MEF convencional, deve-se levar em consideração qual (ais) o(s) custo(s) para tanto. Casos mais complicados exigem alterações na discretização do modelo (elevado refinamento de malha) tornando quase que inviável a análise dado o enorme custo computacional (Babuška et al., 1994).

Neste contexto, os Métodos sem Malha passaram a ganhar espaço. São métodos numéricos utilizados na solução de PVC de forma a reduzir, ou mesmo eliminar, a dependência existente entre as equações que governam o problema e a respectiva discretização. E, ainda que não seja um método sem malha propriamente dito, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) segue o mesmo princípio de buscar minimizar a importância da malha frente à qualidade do resultado (Babuška et al., 1994; Belytschko et al., 1999; Duarte, 1995; Duarte et al., 2006).

Este trabalho implementou formulações do MEFG aplicadas na análise de estruturas em processo de danificação. Foram empregadas funções de enriquecimento polinomiais, conforme a estratégia do método, para simulações de problemas de falhas em estruturas a partir de um modelo de dano bilinear. O enriquecimento foi empregado com o intuito de habilitar simulações utilizando malhas grosseiras e, ainda assim, obter boa aproximação nos resultados.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O MEFG baseia-se no MEF convencional. Foi inicialmente proposto por Babuška et al. (1994) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Recebeu esta denominação porque, apesar de se tratar de Elementos Finitos, foram empregadas funções de forma não convencionais (“especiais”) escolhidas para conferir maior acurácia ao método. A escolha destas funções deve pautar-se na garantia da manutenção das condições iniciais de estabilidade do problema bem como na dificuldade de implementação (Babuška et al., 1994).

A estratégia do MEFG consiste na combinação entre as funções advindas da Partição da Unidade (PU) ($N_j(x)$) – função de forma padrão do MEF - e funções linearmente independentes, definidas na Eq. 1, em que $L_{ji}(x)$ são as funções de enriquecimento definidas em cada nó x_j do domínio e, q o número total de funções de enriquecimento relativas ao nó x_j (Evangelista Jr et al, 2013a).

$$J_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} \text{ com } \{L_{j1}(x) = 1\} \quad (1)$$

Estas funções podem ser polinomiais ou obtidas a partir do conhecimento, a priori, do comportamento da solução do PVC que se quer analisar. O produto entre as funções de forma oriundas da PU pelas funções da Eq. 1 resulta na função produto ou função de forma ϕ_{ji} do MEFG (Eq. 2).

$$\{\phi_{ji}(x)\}_{i=1}^q = \mathcal{N}_j(x) \cdot \{L_{ji}(x)\}_{i=1}^q \quad (2)$$

Como resultado deste processo, tem-se que as funções de forma $\phi_{ji}(x)$ do MEFG atrelam-se ao nó x_j . Isto se deve ao fato de as mesmas herdarem da PU a propriedade do suporte compacto, em outras palavras, valem zero fora do elemento que contém o nó a que estão associadas (Alves, 2014). A manutenção de tais características é vital para que a continuidade entre os elementos da malha inicial seja garantida (Strouboulis et al, 2000). A aproximação do MEFG é obtida, portanto, a partir da seguinte combinação linear:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(x) \cdot \left\{ u_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(x) \cdot b_{ji} \right\} \quad (3)$$

onde $\mathcal{N}_j(x)$ refere-se ao MEF, e, $\mathcal{N}_j(x) \cdot L_{ji}(x)$, refere-se ao MEFG.

Os monômios utilizados para enriquecer os pontos nodais do domínio são mostrados a seguir nas Equações (4) e (5):

$$\xi = \left(\frac{x - x_j}{h_j} \right)^n \quad (4)$$

$$\eta = \left(\frac{y - y_j}{h_j} \right)^n \quad (5)$$

Onde x e y são as coordenadas dos pontos de Gauss em cada elemento; x_j e y_j , são as coordenadas dos pontos nodais a enriquecer; n é a potência que determina o grau do enriquecimento. O termo h_j funciona como uma normalização de modo que não sejam introduzidas no enriquecimento informações associadas aos elementos (Duarte et al., 2000).

Matematicamente u_j e b_{ji} representam, respectivamente, os graus de liberdade da estrutura atrelados ao nó x_j da nuvem w_j ; sendo que este último representa os graus de liberdade adicionais em correspondência a cada componente i das funções de forma enriquecidas. As nuvens de influência são formadas pelo conjunto de elementos finitos que compartilham um determinado ponto nodal x_j . Em cada nuvem, em se tratando do MEFG, a partição da unidade é determinada pelo conjunto de funções de forma dos elementos que compõem a nuvem associada ao nó base.

3 MODELO DE DANO

O modelo de Dano empregado é aplicado à materiais *quase*-frágeis sob condições de carregamento que produzem o modo I de propagação de trinca. A capacidade e as limitações deste modelo são definidas pelas seguintes hipóteses: o material é considerado um meio elástico quando em processo evolutivo de dano e, desta forma, não são consideradas deformações plásticas; o dano no material é fruto de extensões ao longo das direções principais de tensão, ou seja, rupturas locais começam e se desenvolvem em modo I; o dano é representado por uma variável escalar D ($0 \leq D \leq 1$), o que significa assumir uma condição de dano isotrópico para o material. (Moreira, 2016). Para que o modelo de dano seja

termodinamicamente compatível é necessário que sejam descritas uma variável de controle, uma superfície para iniciação de dano e uma lei de evolução do dano (Lemaitre e Chaboche, 1990).

A variável de controle adotada foi a deformação equivalente (ε_{eq}^{MA}) apresentada por Mazars (1984) visto que esta é sugerida pela literatura como uma medida simples e eficiente (Mazars, 1984; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Schlangen, 1993; Geers, 1997; Simone, 2003; Proença e Torres, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011). Percebe-se na Eq.6 a relação entre a variável de controle e o tensor de deformações.

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\langle \varepsilon_i \rangle_+)^2} \quad (6)$$

sendo $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)/2$ e ε_i a deformação principal na direção i .

A Fig. 1 exhibe o modelo estrínseco de idealização do processo de fratura, onde é eliminada a necessidade da rigidez inicial na lei ($\sigma - \varepsilon$). Os elementos de interface, bem como a lei de amolecimento são inseridas a medida que o material atinge sua resistência mecânica a tração (Camacho e Ortiz, 1996; Ortiz e Pandolfi, 1999). A zona de processo de fratura é descrita por uma relação tensão-deformação ($\sigma - \varepsilon$). As micro trincas crescem e coalescem após ser atingida a resistência a tração do concreto (f_t). G_F e f_t , em conjunto, definem a carga máxima da estrutura. Quando o deslocamento da abertura da trinca atinge uma certa magnitude (ε_f) surge uma superfície, livre de forças, que corresponde à uma macro trinca (Planas e Elices, 1992; Bazant, 2002; Elices et al., 2002).

O critério de início e evolução do dano tem relação direta com a deformação equivalente. O início do dano ocorre quando a deformação equivalente atinge uma deformação crítica (ε_{d0}) correspondente à tensão máxima de um corpo de prova em tração uniaxial. A lei de evolução do dano esta relacionada com a energia de fratura G_F através de um comprimento característico (Oliver, 1989).

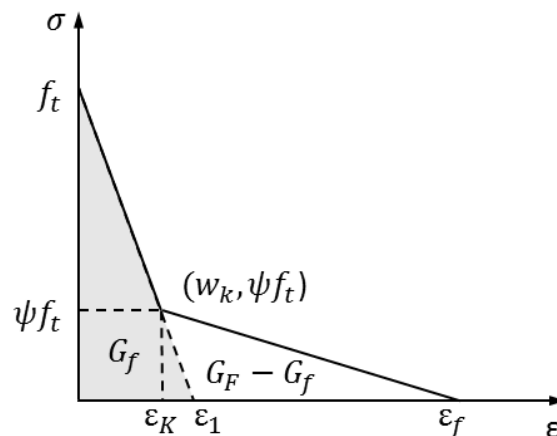


Figura 1: Curva de amolecimento bilinear.

4 MEEG E DANO

A Mecânica do Dano Contínuo pode ser eficiente para descrever o comportamento do material quando são feitas análises de estruturas em regime de comportamento não-linear

físico. A utilização de técnicas de enriquecimento para refinamento da aproximação, em especial o MEF_G, permitem simular com melhor eficiência a propagação dos micro defeitos no meio, tornando possível reproduzir adequadamente as respostas globais de estruturas obtidas experimentalmente ainda que, nas simulações, se utilize malhas com poucos elementos. Outra grande qualidade do MEF_G deve-se à sua enorme flexibilidade de aplicação, de modo que é possível refinar a aproximação apenas nas regiões em que há real necessidade. As funções de forma de caráter polinomial são capazes de reproduzir com boa qualidade o campo de deslocamentos para diversos níveis de dano (Barros et al., 2004).

Segundo Proença e Torres (2008), a característica do MEF_G de permitir o enriquecimento local da aproximação o torna uma ferramenta poderosa e competitiva na simulação de problemas de localização. Isto se deve à eficiência do método na captura dos elevados gradientes de deformação que ocorrem de forma localizada sem, contudo, aumento substancial do custo computacional. Os autores destacam ainda a possibilidade da utilização simultânea de funções enriquecedoras de diferentes graus polinomiais, conforme regiões do domínio convenientemente escolhidas.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Roesler *et al.* (2007a) realizaram ensaios de flexão em três pontos, *Three Point Bending* (TPB), em vigas de concreto em pequena escala. A Figura 2 mostra a geometria do ensaio realizado. Os dados geométricos da viga ensaiada são: $H=150\text{mm}$, $S=600\text{mm}$, $L=700\text{mm}$, $a_0=50\text{mm}$. Os resultados das simulações numéricas foram comparados com os resultados experimentais de Roesler *et al.* (2007a).

Os parâmetros de fratura adotados foram os mesmos utilizados por Gaedicke e Roesler (2010) e Moreira (2016) em suas simulações, cujos valores são: $G_F=164,0\text{N/m}$, $G_F=56,7\text{N/m}$ e $\Psi=0,25$. Os parâmetros relativos ao material são: $E=32\text{GPa}$, $\nu=0,20$, $f_c=58,3\text{MPa}$ e $f_t=4,15\text{MPa}$. As simulações foram realizadas considerando o estado plano de tensões. O controle do ensaio foi realizado por meio de incrementos de deslocamentos no ponto de aplicação da carga (P).

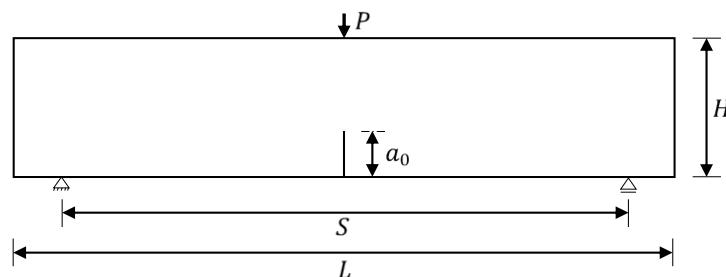


Figura 2: Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos (espessura = 80mm).

Foram utilizadas três malhas de elementos finitos, duas com entalhe retangular de dois milímetros (Figs. 3a e b) e uma com entalhe pontiagudo, em formato “V”, com abertura da boca de dois milímetros (Fig. 3c). Os elementos em destaque identificam onde houve incremento do grau do enriquecimento, mantendo-se os demais nós com enriquecimento P1 (onde P1 designa enriquecimento polinomial de primeiro grau e assim por diante analogamente).

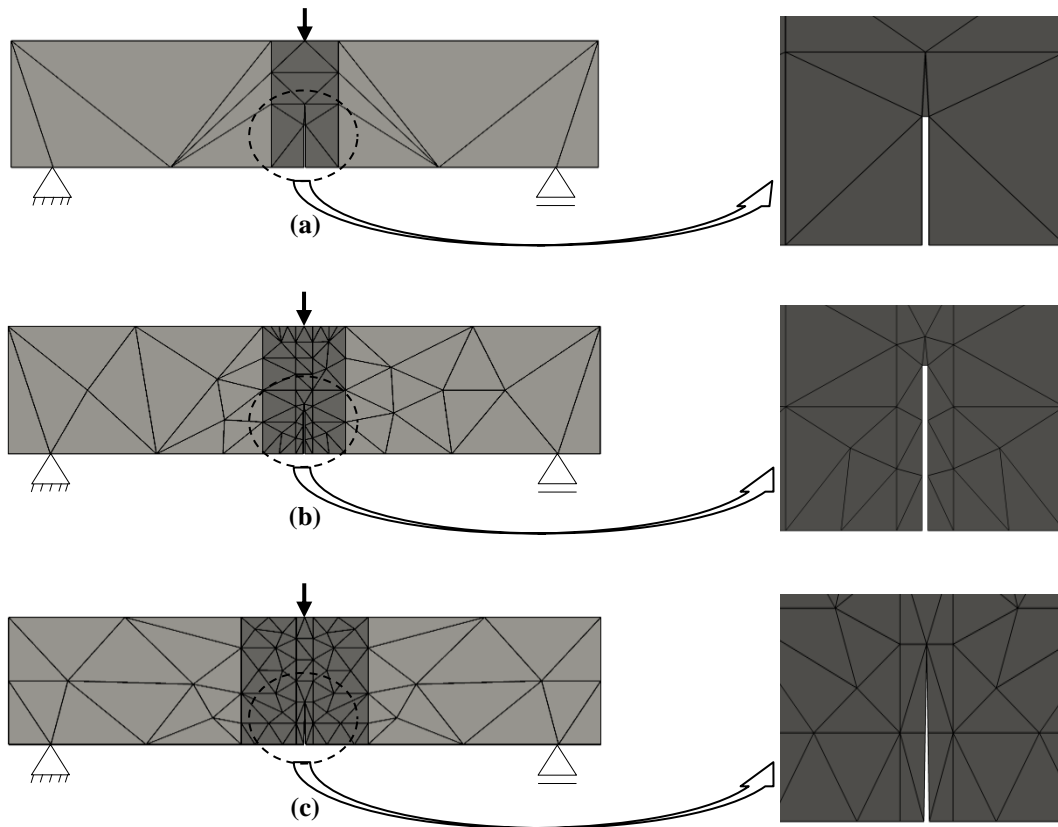
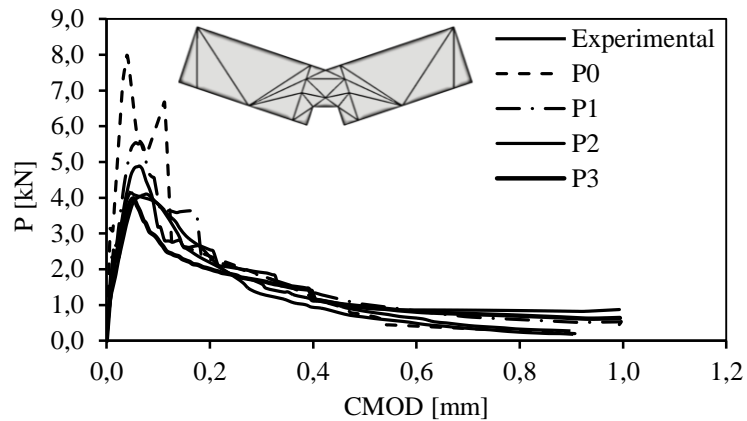


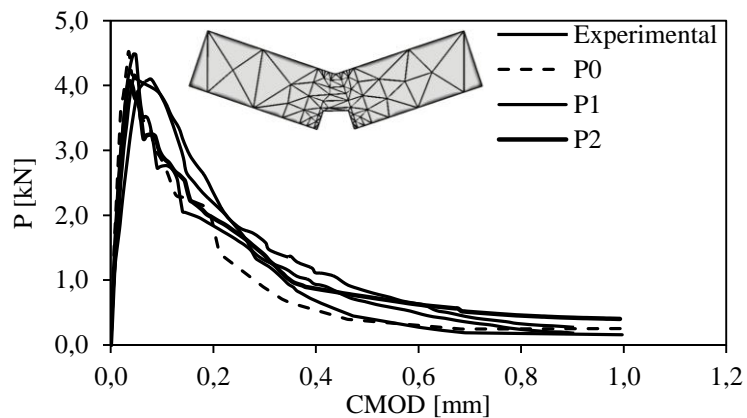
Figura 3: Malhas de elementos finitos – (a) 25 elemento; (b) 101 elementos; (c) 106 elementos.

Percebe-se que, em todos os casos, foram empregados somente elementos triangulares de três nós. Nas malhas 3(a) e 3(b) destaca-se a existência de um elemento (descrevendo a ponta do entalhe) quase acicular com uma das arestas medindo 2mm. Isto não ocorre na malha 3(c) devido à diferença de geometria do entalhe.

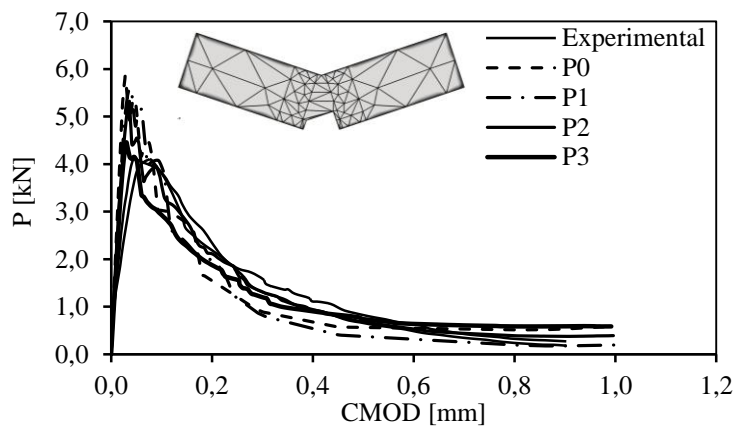
A Fig. 4 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força aplicada em função do deslocamento de abertura de boca de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement* (CMOD). Os resultados mostram a capacidade do enriquecimento polinomial para conferir maior qualidade aos resultados. O potencial do MEFG polinomial destaca-se sobremaneira nas simulações com malhas mais grosseiras, tendo em vista a boa estimativa da carga máxima (P_{max}) resistida pela viga. Nestas, destaca-se o quanto é ruim o resultado sem enriquecimento (P0) e como é eficiente a atuação do MEFG polinomial na melhora deste resultado. Observa-se que tanto o pico de carga quanto a região de *softening* da curva P-CMOD são melhor descritos (para uma mesma malha) à medida que o grau de enriquecimento aumenta.



(a)



(b)



(c)

Figura 4: Curvas P – CMOD experimentais e numéricas – (a) Malha com 25 elementos – entalhe retangular; (b) malha com 101 elementos – entalhe retangular; (c) malha com 106 elementos – entalhe em formato “V”.

Nota-se que para se obter um bom resultado para a malha 3a (25 elementos) foi necessário um grau de enriquecimento polinomial maior que na malha 3c (106 elementos) por exemplo. Enquanto naquela utilizou-se enriquecimento P3, nesta, com enriquecimento P1 o resultado já é muito próximo do experimental. Percebe-se, também, que quando é utilizado entalhe em “V” e, mesmo buscando manter certa correspondência quanto à quantidade de

elementos (quantidade total da malha bem como na região do ligamento – região entre a ponta do entalhe e o ponto de aplicação do deslocamento), os picos tendem a ser maiores que àqueles apresentados quando é utilizado entalhe retangular. Isto ocorre em função do modelo de dano que depende da deformação equivalente do elemento.

Outro aspecto que exige atenção é a análise do estado de tensão e a distribuição do dano ao longo da linha de fratura buscando verificar dois aspectos: se as tensões ultrapassam a resistência à tração do material e como se dá o comportamento na zona de fratura. Desta forma, foram plotadas a distribuição das tensões principais e a evolução do dano na seção central da viga em diferentes etapas da simulação pré-determinados em função do P_{max} , a saber (Figs 5 e 6): A (75% de P_{max} na zona ascendente – pré-pico), B (P_{max}) e C (50% de P_{max} na zona descendente – pós-pico).

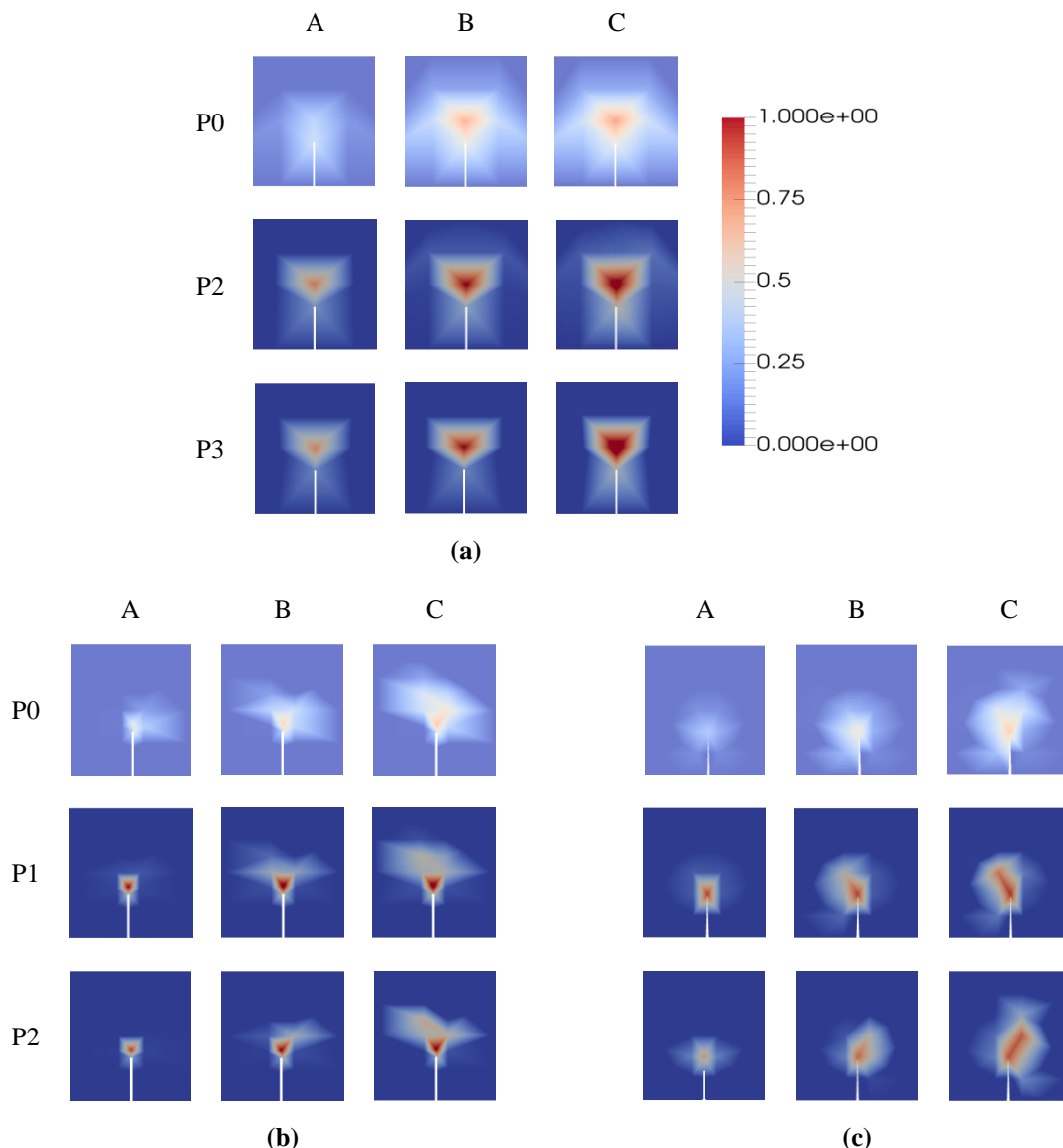


Figura 5: Distribuição do Dano em função do grau de enriquecimento polinomial – (a) Malha 1a; (b) Malha 1b; (c) Malha 1c.

É possível observar que quanto mais grosseira a malha maior é a dificuldade em descrever o campo de tensões bem como o dano na região. Nota-se que as simulações sem

enriquecimento não conseguem capturar a danificação, enquanto com P1, P2 e P3 percebe-se uma grande melhora deste resultado. A concentração de tensões na ponta do entalhe também é deficiente nas simulações sem enriquecimento devido as malhas serem grosseiras e análises envolvendo trincas e pontos de singularidade exigirem um grau elevado de refinamento de malha naquela região. O enriquecimento polinomial busca corrigir essa deficiência do MEF convencional.

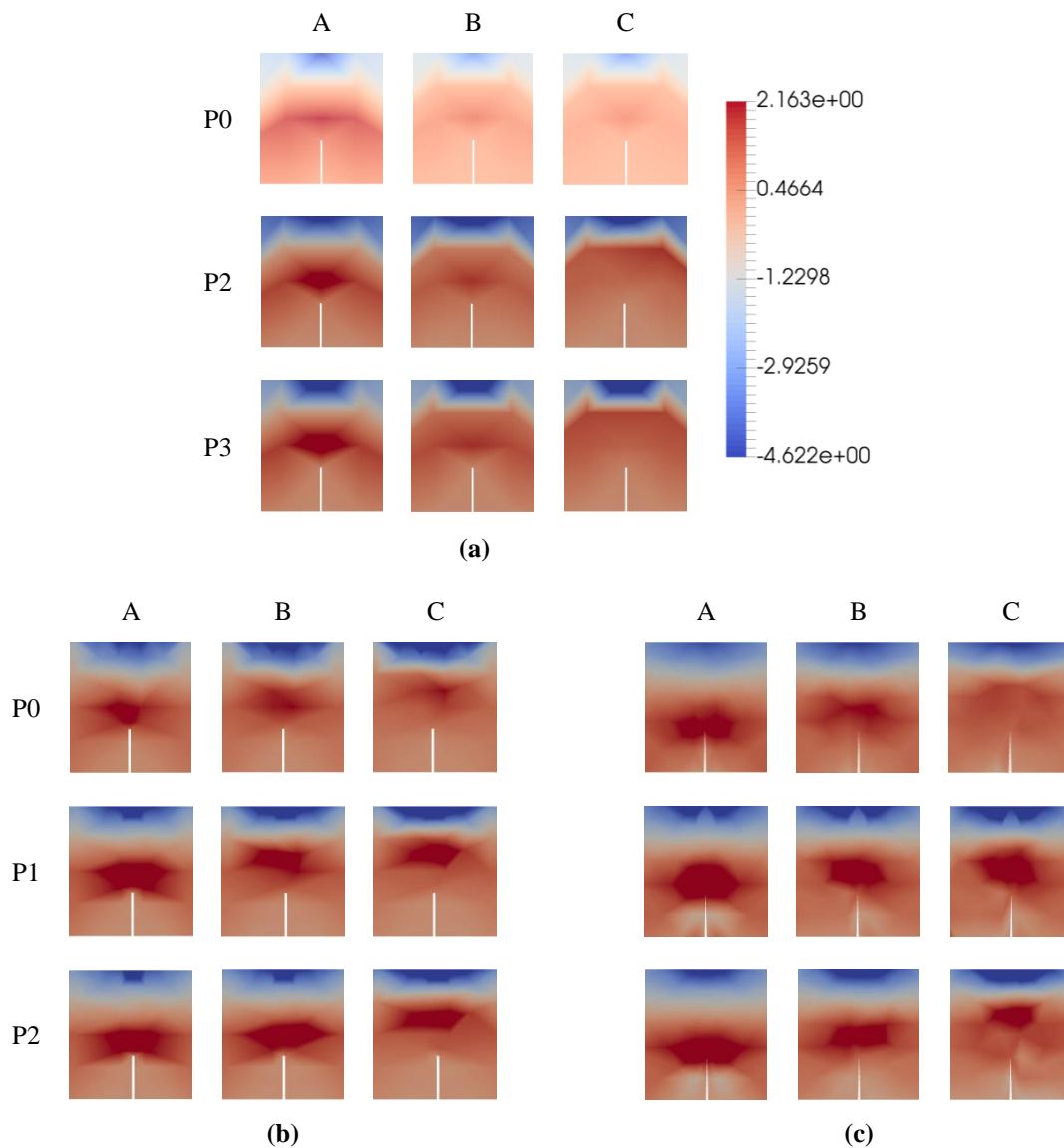


Figura 6: Distribuição das Tensões em função do grau de enriquecimento polinomial – (a) Malha 1a; (b) Malha 1b; (c) Malha 1c.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho implementou formulações do MEFG aplicadas à análise de estruturas em processo de danificação. Foram empregadas funções de enriquecimento polinomiais, conforme a estratégia do MEFG, para simulações de problemas de falhas em estruturas a partir de um modelo de dano. Os resultados foram verificados através da comparação com resultados experimentais retirados do ensaio de flexão em três pontos em vigas com entalhe

central. O enriquecimento foi empregado com o intuito de habilitar simulações utilizando malhas grosseiras.

Os resultados obtidos comprovaram a eficiência e acurácia do MEEG polinomial em melhorar a previsão do comportamento de ruptura ainda que realizando simulações com malhas grosseiras. Nas simulações numéricas realizadas, observou-se boa capacidade de reprodução da carga máxima (P_{max}) bem como do comportamento de amolecimento (*softening*) observado nos ensaios experimentais utilizando um número bem reduzido de elementos na malha. Destaca-se ainda que nas simulações com enriquecimento observou-se uma melhor distribuição do dano na região do ligamento, bem como do campo de tensões, representado sobretudo por uma melhor representação da concentração das tensões na ponta do entalhe.

AGREDECIMENTOS

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Alves, G. D. S. Implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizados com aplicação em materiais compósitos. Dissertação de Mestrado. Brasília: Universidade de Brasília, 2014
- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, 1994. p. 945 – 981.
- Barros, F. B.; Proença, S. B. P.; Barcellos, C. S. de. Generalized Finite Element Method in Structural Nonlinear Analysis. *Computational Mechanics*, Alemanha, v. 33, n.2, p. 95-107, 2004.
- Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 45, No. 5, pp. 601-602. 1999.
- Camacho, G. T.; Ortiz, M. Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, p. 2899–2938, 1996.
- Duarte, C. A. A Review of Some Meshless Methods to Solve Partial Differential Equations. Technical Report 06, 1995.
- Duarte, C. A.; Liszka, T. J.; Tworzydło, W. W. Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006.
- Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, J.; Planas, J. The cohesive zone model: advantage, limitations and challenges. *Engineering Fracture Mechanics*, 69 (2002), pp. 137–163. 2002.
- Evangelista JR, F.; Roesler, J. R.; Duarte, C. A. Two scale Approach Predict Multi-Site Cracking Potential in 3-D Structures using the Generalized Finite Element Method. *International Journal of Solids and Structures*, v. 50, p. 1991-2002, 2013a.

- Evangelista Jr., F.; Roesler, J. R.; Proença, S. P. B. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 97, p. 261-280, 2013b.
- Gaedicke, C.; Roesler, J. Fracture-Based Method to Determine Flexural Capacity of Concrete Beams on Soil. *Road Materials and Pavement Design*, v. 11, n. 2, p. 361 – 385, 2010
- Geers, M. G. D. Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 1997.
- Hofstetter G.; Meschke G. *Numerical modeling of concrete cracking*. International Centre for Mechanical Sciences. vol. 532. Springer Wien New York, 2011. ISBN:987-3-7091-0896-3 [chapter 1].
- Lemaitre, J.; Chaboche, J. L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1990.
- Mariani, S, Perego U. Extended finite element method for quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(1):103–26, 2003.
- Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G. Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:345.365, 1989.
- Moreira, J. F. A. Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais *quasi-frágeis* em modo I e modo misto. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-05A/16, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 92p. 2016
- Oliver, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.28, n. 2, p.461-474, 1989.
- Ortiz, M.; Pandolfi, A. Finite-deformation irreversible cohesive elements for threedimensional crack-propagation analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*, 44: 1267-1282, 1999.
- Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 6, p. 891-908, 2009.
- Planas, J.;Elices, M. Shrinkage eigenstresses and structural size-effect, in *Fracture Mechanics of Concrete Structures* (ed Z. P. Bazant) *Elsevier Applied Science*, 939 - 950. London, 1992
- Proença, S. P. B.; Torres, I. Generalized Finite Element method for Nonlinear Three dimensional Analysis of Solids. *International Journal of Computational Methods*, v. 5, p. 37-62, 2008.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Park, K.; Gaedicke, C. Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening. *Cement and Concrete Composites*, Vol. 29, No. 4, pp. 300-312, 2007a.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Gaedicke, C.; Bordelon, A.; Park, K. Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements. *Transp Res Rec*, 2037:40–50, 2007b.
- Schlangen E. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1993.

Simone, A. Continuous discontinuous modeling of failure. Ph.D. thesis. University of Delft, The Netherlands, 2003.

Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuska, I. The generalized finite element method. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2000