

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA UTILIZANDO TRIÂNGULOS DE BÉZIER

Elias Saraiva Barroso

Joaquim Bento Cavalcante Neto

Creto Augusto Vidal

elias.barroso@gmail.com

joaquimb@dc.ufc.br

cvidal@lia.ufc.br

Computer Graphics, Virtual Reality and Animation Group. Universidade Federal do Ceará.

Evandro Parente Junior

evandro@ufc.br

Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização, Universidade Federal do Ceará.

Campos do Pici, 60440-900, Fortaleza, Ceará, Brasil.

Abstract. *A Análise Isogeométrica é um método de análise numérica que utiliza as representações presentes nos sistemas CAD (e.g. superfícies de Bézier e NURBS) como funções de aproximação do campo de deslocamentos. Assim, a geometria do modelo é representada de forma exata para qualquer discretização adotada, o que não ocorre no Método dos Elementos Finitos. As formulações tradicionais da AIG que utilizam NURBS apresentam dificuldades na obtenção de modelos para análise numérica através dos modelos de fronteira concebidos nos sistemas CAD. Por outro lado, o uso de triângulos de Bézier racionais são atrativos pela possibilidade de geração de malhas não estruturadas, permitindo a obtenção eficaz de modelos de análise. Deste modo, este trabalho discute a formulação de elementos de triângulos de Bézier racionais para análise numérica. O elemento é implementado em um software acadêmico de elementos finitos. Exemplos numéricos são realizados para verificação da implementação. Foram obtidos excelentes resultados, mostrando que uma correta implementação foi realizada.*

Keywords: *Análise Isogeométrica, Triângulos de Bézier Racionais, Modelagem Geométrica*

1 INTRODUÇÃO

A Análise Isogeométrica (AIG) é um recente método de análise numérica (Hughes et al., 2005) que propõe aproximar as ferramentas de modelagem geométrica (sistemas CAD) e as ferramentas de análise estrutural. O grande diferencial desta formulação está na utilização, como funções de aproximação do campo de deslocamentos, das mesmas funções utilizadas pelos sistemas CAD para representação da geometria, como superfícies de Bézier e NURBS. O uso destas representações é atrativo por permitir representar exatamente formas complexas, como arcos de círculo, cônicas e quádricas. Desta forma, a AIG permite que o modelo de análise represente exatamente a geometria do problema, independente da discretização adotada para aproximar o campo de deslocamentos. Outra vantagem da AIG consiste na facilidade de refinamento do modelo, através da utilização de algoritmos clássicos de refinamento da geometria tratados no campo da Modelagem Geométrica.

Alguns trabalhos abordaram a definição de um melhor *workflow* em relação ao procedimento de projeto e análise numérica. Os termos *analysis-through-design* e *analysis-aware-design* (Cohen et al., 2010; Schillinger et al., 2012; Breitenberger et al., 2015) são paradigmas de projeto que buscam unir as etapas de modelagem da geometria do problema e análise numérica.

Apesar da IGA ter proporcionado grande esforço para pesquisa de tais paradigmas, na prática não se mostravam realizáveis. As ferramentas CAD utilizadas para modelagem dos problemas não forneciam a geometria na forma como os programas de análise numérica necessitavam. Um exemplo disto é o caso da análise de modelos sólidos. Tais modelos são analisados utilizando representações tridimensionais como NURBS trivariadas. Entretanto, as ferramentas CAD comumente representam sólidos através de representações de superfícies, como a *Boundary representation* (B-rep), onde apenas as fronteiras do modelo são representadas. Os sistemas CAD também podem representar sólidos utilizando o *Constructive Solid Modeling* (CSG), que representa sólidos complexos através de operações Booleanas de primitivas simples. Em ambos os casos, o sistema CAD não fornece diretamente a descrição geométrica utilizada pelos analisadores numéricos.

Neste sentido, existe um problema de parametrização de superfície-para-volume que vem sendo abordado em diversos trabalhos. É importante notar que o mesmo problema também existe no caso de análise por elementos finitos, onde são aplicadas técnicas de geração de malhas a fim de gerar um modelo sólido aproximado. O diferencial com relação à análise isogeométrica é que neste caso se busca manter a geometria exata em todo o processo. Segundo Engvall & Evans (2016) o problema é posto da seguinte forma: Dada uma superfície NURBS ou T-Spline pelo sistema CAD, deseja-se gerar automaticamente um volume correspondente de forma que:

- A parametrização represente a geometria de forma exata;
- A parametrização seja adequada para análise numérica;
- A parametrização seja definida por polinômios definidos por trechos ou bases racionais que satisfaçam independência linear, partição da unidade, positividade e continuidade de alta ordem.

Em geral, existem trabalhos abordando este problema de duas formas: Geração de uma T-Spline volumétrica (Liu et al., 2013); ou geração de volumes compostos por triângulos e tetraedros Bernstein-Bézier (Jaxon & Qian, 2014; Engvall & Evans, 2016).

Outro problema existente é na consideração de modelos com furos (*trimmed surfaces*). Uma forma de tratar modelos de superfícies com furos é considerar curvas *trimmed*, tais curvas são definidas no espaço paramétrico da superfície, de modo que a região paramétrica contida na curva é desconsiderada na avaliação da superfície. Como os programas de análise isogeométrica convencionais não são capazes de considerar este tipo de abordagem, modelos equivalentes considerando múltiplos *patches* podem ser utilizados para representar o mesmo modelo. Entretanto esta abordagem não permite uma fácil conversão do modelo representado pelo sistema CAD para um utilizado pelo analisador numérico. Existem alguns trabalhos abordando modelos com furos (Kim et al., 2009; Nagy & Benson, 2015).

Assim, existe grande interesse em desenvolver técnicas de geração de malhas adequadas para modelos isogeométricos. As abordagens utilizando triângulos e tetraedros de Bézier racionais permitem tratar os problemas citados através da geração de malhas não estruturadas. Contudo, está fora do escopo deste trabalho abordar diretamente os aspectos referentes a geração de malhas isogeométricas. O foco maior se dá na formulação e verificação de um analisador isogeométrico.

Portanto, neste trabalho são discutidas as formulações necessárias para utilização de triângulos de Bézier racionais na análise de problemas planos. A formulação isogeométrica foi implementada em um software acadêmico de Elementos Finitos, de modo a aproveitar toda a estrutura do programa. A implementação da AIG possui muitos aspectos semelhantes à do Método dos Elementos Finitos. Por outro lado a maior diferença entre ambos os métodos reside na avaliação das funções de forma e suas derivadas. Dois exemplos são utilizados para verificação da implementação realizada, sendo que um destes possui geometria complexa com furos.

O conteúdo deste trabalho está dividido da seguinte forma: no Item 2, realiza-se uma revisão bibliográfica de superfícies de Bézier triangular, abordando os aspectos relevantes que são utilizados na formulação da AIG; no Item 3, é discutido a formulação isogeométrica considerada neste trabalho; no Item 4, aborda-se dois exemplos numéricos de estado plano de tensão, que são solucionados através da AIG e verificados com soluções analíticas e resultados numéricos de Elementos Finitos. Finalmente, as conclusões são tratadas no Item 5.

2 Triângulos de Bézier

Os triângulos de Bézier são superfícies bivariadas diferente das superfícies de Bézier construídas por produto tensorial. Nos triângulos de Bézier, a malha de controle é definida por uma estrutura triangular, como ilustrado na Figura 1.

Os pontos da superfície são avaliados em função de coordenadas baricêntricas $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Por exemplo, considerando o Triângulo de Bézier dado pela Figura 1, os pontos $T(1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0)$, $T(0, 0, 1)$ são pontos de controle extremos em cor preta. É importante notar que as arestas curvas do triângulo de Bézier definem curvas de Bézier, logo seus pontos de controle extremo são interpoladores. Cada ponto de controle possui três índices não negativos no qual sua soma é igual ao grau da superfície considerada. Logo para um ponto \mathbf{b}_{ijk} , os índices i, j, k são tais que $i + j + k = p$, onde p é o grau da superfície. Uma notação utilizada por Farin (2002) abrevia o termo i, j, k para \mathbf{i} , e a condição $i + j + k = p$ para $|\mathbf{i}| = p$. Também são utilizadas as abreviações $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$. Assim, o número de

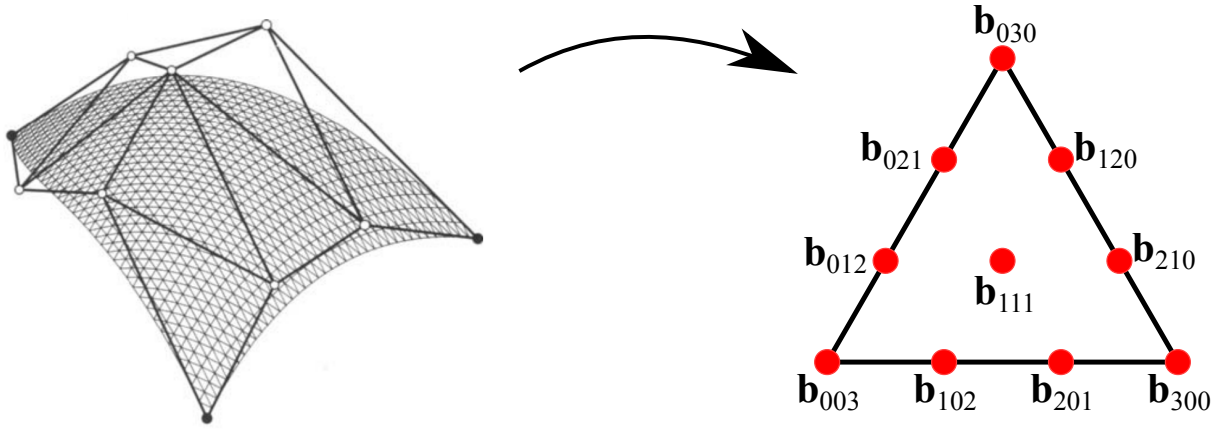


Figura 1: Triângulo de Bézier Cúbico. (fonte: Modificado de Farin (2002))

pontos de controle N_{cp} para uma dada superfície de grau p é dada por:

$$N_{cp} = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (1)$$

Uma maneira eficiente de avaliar um triângulo de Bézier é utilizar o algoritmo de de Casteljau. O algoritmo funciona pela aplicação repetida da fórmula recursiva dada por:

$$b_i^r(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 b_{i+e_1}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}) + \lambda_2 b_{i+e_2}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}) + \lambda_3 b_{i+e_3}^{r-1}(\boldsymbol{\lambda}) \quad (2)$$

onde $b_i^0(\boldsymbol{\lambda}) = b_i$. Considerando uma superfície de grau p , o ponto de coordenada baricêntrica $\boldsymbol{\lambda}$ é calculado por $b_0^p(\boldsymbol{\lambda})$ na expressão recursiva.

Uma maneira alternativa de avaliação da superfície é utilizando os polinômios de Bernstein bivariados (B_i^p), por:

$$T(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{|\mathbf{i}|=p} b_i B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) \quad (3)$$

Neste equação, o somatório é definido ao longo de todos os índices \mathbf{i} possíveis para o grau p , o número total de índices é dado pela Eq. (1). Pode-se definir índices únicos para cada índice triplo i, j, k , como ilustrado na Figura 2. Tais índices são definidos priorizando as variações dos índices k, j e i , respectivamente, e atribuindo a primeiro posição ao ponto $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_{p,0,0}$ (o mais à direita). De fato, a numeração dos pontos de controle é arbitrária, entretanto ao utilizar a numeração proposta é possível converter o índice triplo (i, j, k) para o índice único l por:

$$l = p - i - j + 1 + (p - i + 1)(p - i)/2 \quad (4)$$

e seja l o índice único de i, j, k , os índices triplos $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ de $l + 1$ são obtidos por:

$$\begin{cases} \hat{i} = i - 1, & \hat{j} = p - i, & \hat{k} = 0, & \text{se } j \text{ for nulo,} \\ \hat{i} = i, & \hat{j} = j - i, & \hat{k} = k + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5)$$

Deste modo, pode-se alocar as bases em um vetor de tamanho N_{cp} e avaliar a superfície pela expressão:

$$T(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{l=1}^{N_{cp}} b_l B_l^p(\boldsymbol{\lambda}) \quad (6)$$

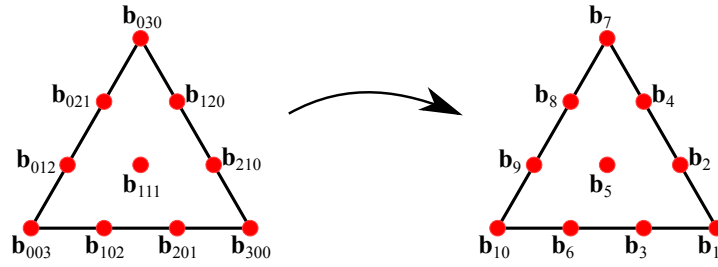


Figura 2: Índices com uma componente para os triângulos de Bézier.

Os polinômios bivariados de Bernstein são definidos por:

$$B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{p!}{i!j!k!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k \quad (7)$$

Tais polinômios também podem ser avaliados pela equação recursiva:

$$B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = \lambda_1 B_{i-e_1}^{p-1}(\boldsymbol{\lambda}) + \lambda_2 B_{i-e_2}^{p-1}(\boldsymbol{\lambda}) + \lambda_3 B_{i-e_3}^{p-1}(\boldsymbol{\lambda}); \quad |\mathbf{i}| = p \quad (8)$$

para aplicação desta equação, $B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ se algum dos índices for negativo ($i, j, k < 0$) e $B_0^0(\boldsymbol{\lambda}) = 1$. Vale ressaltar que ao contrário da Equação (7), a Equação (8) permite avaliar as bases de forma numericamente estável. Também pode ser utilizada programação dinâmica para avaliação eficiente de todas as bases. O algoritmo consiste avaliar todos os polinômios de grau d , com $d = 0$ até $d = p$, de modo que as bases intermediárias não são avaliadas mais de uma vez. O algoritmo é apresentado na Figura 3, nele a rotina *Incrementar* é responsável por incrementar os índices triplos pela equação Equação (5).

Os polinômios de Bernstein bivariados possuem as seguintes propriedades:

- Independência linear;
- Não-negatividade: $B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) \geq 0$;
- Partição da unidade: $\sum_{|\mathbf{i}|=p} b_i B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = 1$
- Simetria;
- Controle pseudo-local: Se um ponto de controle for movido, então as mudanças da forma da representação ocorrem de forma dominante na vizinhança do ponto movido.

A primeira derivada parcial dos polinômios de Bernstein bivariados em relação a ξ é obtida por:

$$\frac{\partial B_i^p}{\partial \xi}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{p!}{i!j!k!} i \xi^{i-1} \eta^j (1 - \xi - \eta)^k - \frac{p!}{i!j!k!} \xi^i \eta^j k (1 - \xi - \eta)^{k-1}$$

Simplificando e colocando p em evidência, obtemos:

$$\frac{\partial B_i^p}{\partial \xi}(\boldsymbol{\lambda}) = p \left(\frac{(p-1)!}{(i-1)!j!k!} \xi^{i-1} \eta^j (1 - \xi - \eta)^k - \frac{(p-1)!}{i!j!(k-1)!} \xi^i \eta^j (1 - \xi - \eta)^{k-1} \right)$$

Pode-se verificar que o termo $\frac{(p-1)!}{(i-1)!j!k!} \xi^{i-1} \eta^j (1 - \xi - \eta)^k = B_{i-e_1}^{p-1}$, e $\frac{(p-1)!}{i!j!(k-1)!} \xi^i \eta^j (1 - \xi - \eta)^{k-1} = B_{i-e_3}^{p-1}$. Substituindo, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = p (B_{i-e_1}^{p-1} - B_{i-e_3}^{p-1}) \quad (9)$$

```

Entrada: Coordenadas barycentricas ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ); Grau do triângulo de Bézier  $p$ .
Saída : Polinômios de Bernstein bivariados  $B^p$  armazenados no vetor  $b$ .

b(1) = aux(1) = 1.0; // Caso  $p = 0$ .
para  $d = 1$  até  $p$  faça
   $N_{cp} = (d + 1)(d + 2)/2;$ 
   $i = d, j = k = 0;$ 

  // Avalia as bases em  $d$  em função das bases  $d - 1$ .
  para  $l = 1$  até  $N_{cp}$  faça
    Incrementar( $i, j, k$ ); // Eq. (5)
     $id = p - i - j + 1 + (d - i + 1)(d - i)/2;$  // Eq. (4)
     $b(l) = 0;$ 
    se  $i \neq 0$  então
      |  $b(l) = b(l) + \lambda_1 \text{aux}(id);$ 
    fim
    se  $j \neq 0$  então
      |  $b(l) = b(l) + \lambda_2 \text{aux}(id);$ 
    fim
    se  $k \neq 0$  então
      |  $b(l) = b(l) + \lambda_3 \text{aux}(id);$ 
    fim
  fim
  // Atualiza o vetor auxiliar.
  para  $l = 1$  até  $N_{cp}$  faça
    |  $\text{aux}(l) = b(l);$ 
  fim
fim

```

Figura 3: Algoritmo para cálculo dos polinômios de Bernstein bivariados.

De modo análogo, a primeira derivada parcial em relação a η é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = p (B_{i-e_2}^{p-1} - B_{i-e_3}^{p-1}) \quad (10)$$

Logo, as derivadas parciais podem ser calculadas utilizando a Equação (8) para avaliar os polinômios B_i^{p-1} , e em seguida todas as derivadas parciais.

2.1 Bases racionais

A versão racional do triângulo de Bézier pode ser obtida considerando pesos em cada ponto de controle, de modo análogo ao que é feito em representações de Bézier racionais e NURBS. Assim, a base Bernstein bivariada racional é definida por:

$$R_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) w_i}{\sum_{|i|=p} B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) w_i} \quad (11)$$

e o triângulo de Bézier racional é obtido por:

$$T(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{|i|=p} b_i R_i^p(\boldsymbol{\lambda}) \quad (12)$$

Os triângulo de Bézier racionais são importantes pois permitem representar quádricas de exatamente, como por exemplo um octante de uma esfera ilustrado na Figura 4. Pode-se notar que as arestas curvas do octante são quartos de circunferência definidas por curvas de Bézier racionais quadráticas.

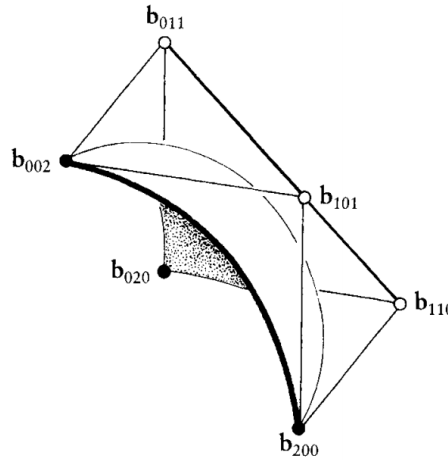


Figura 4: Octante de uma esfera representado por um triângulo de Bézier racional quadrático. (fonte: (Farin, 2002))

As derivadas parciais das bases racionais são avaliadas utilizando a regra de derivação do quociente:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} R_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = w_i \frac{W(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \xi} B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial \xi} W(\boldsymbol{\lambda}) B_i^p(\boldsymbol{\lambda})}{W^2(\boldsymbol{\lambda})} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} R_i^p(\boldsymbol{\lambda}) = w_i \frac{W(\boldsymbol{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \eta} B_i^p(\boldsymbol{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial \eta} W(\boldsymbol{\lambda}) B_i^p(\boldsymbol{\lambda})}{W^2(\boldsymbol{\lambda})}$$

onde W é a função peso, dada por:

$$W(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{|\mathbf{i}|=p} B_{\mathbf{i}}^p(\boldsymbol{\lambda}) w_i \quad (14)$$

as derivadas parciais da função peso podem ser avaliadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} W(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{|\mathbf{i}|=p} \frac{\partial}{\partial \xi} B_{\mathbf{i}}^p(\boldsymbol{\lambda}) w_i \\ \frac{\partial}{\partial \eta} W(\boldsymbol{\lambda}) &= \sum_{|\mathbf{i}|=p} \frac{\partial}{\partial \eta} B_{\mathbf{i}}^p(\boldsymbol{\lambda}) w_i \end{aligned} \quad (15)$$

É importante notar que as derivadas parciais são necessárias para avaliação da matriz de rigidez dos elementos isogeométricos que são utilizados neste trabalho.

3 FORMULAÇÃO ISOGOMÉTRICA

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método mais utilizado atualmente para análise de sólidos e estruturas. No MEF, a estrutura é dividida em um conjunto de elementos conectados através de nós. Os deslocamentos no interior de cada elemento são interpolados a partir dos deslocamentos de seus nós utilizando polinômios. As equações de equilíbrio da estrutura são obtidas utilizando princípios variacionais (trabalho virtual ou energia potencial) ou Métodos de Resíduos Ponderados (e.g. Galerkin). Na formulação isoparamétrica do MEF, a geometria dos elementos é descrita pelas mesmas funções utilizadas para aproximar os deslocamentos. Esta formulação é largamente utilizada, pois garante que as condições necessárias para a convergência do MEF para a solução exata do problema sejam automaticamente satisfeitas (Cook et al., 2002).

A Análise Isogeométrica (AIG) utiliza a mesma ideia da formulação isoparamétrica do MEF, mas neste caso a sequência é invertida: os deslocamentos no interior do sólido são aproximados utilizando as mesmas funções utilizadas para definir a geometria do sólido (e.g. B-Splines e NURBS). Desta forma, consegue-se representar de forma exata a geometria do modelo e manter a garantia de convergência para a solução do problema.

Utilizando os conceitos de modelagem geométrica discutidos no Item 2 e considerando modelos planos, a geometria da estrutura é escrita como:

$$x = \sum_{a=1}^{np} R_a x_a, \quad y = \sum_{a=1}^{np} R_a y_a \quad (16)$$

onde np é o número de pontos de controle que definem a geometria do sólido, R_a são as funções base utilizadas e x_a, y_a são as coordenadas dos pontos de controle. Neste trabalho, as funções base utilizadas são as bases racionais dos triângulos de Bézier, discutidas no Item 2.1.

Na Análise Isogeométrica, os deslocamentos no interior do sólido (u, v) são aproximados com as mesmas funções base utilizadas para descrever a geometria do sólido:

$$u = \sum_{a=1}^{np} R_a u_a, \quad v = \sum_{a=1}^{np} R_a v_a \quad (17)$$

onde u_a, v_a são os deslocamentos dos pontos de controle do sólido. Estas equações podem ser escritas de forma matricial como

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \mathbf{N}_a \mathbf{u}_a = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (18)$$

onde \mathbf{u} é o vetor dos graus de liberdade do problema (i.e. deslocamentos dos pontos de controle) e a matriz \mathbf{N} é dada por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \dots & \mathbf{N}_{np} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Desta forma, a matriz de aproximação dos deslocamentos \mathbf{N} é formada por uma série de sub-matrizes correspondentes a cada ponto de controle.

É importante notar que diferente do MEF, nem todos os pontos de controle pertencem ao sólido. Assim, seus deslocamentos não possuem um sentido físico claro, como ocorrem com os deslocamentos nodais, que correspondem aos deslocamentos de pontos do sólido. Desta forma, a AIG tem características similares às do Método de Rayleigh-Ritz.

3.1 Deformações

Considerando que os deslocamentos são pequenos, as deformações podem ser calculadas como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \sum_{a=1}^{np} \begin{bmatrix} R_{a,x} & 0 \\ 0 & R_{a,y} \\ R_{a,y} & R_{a,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (20)$$

É importante notar que a matriz deformação-deslocamento (\mathbf{B}) tem o mesmo padrão da matriz \mathbf{N} mostrada na Eq. (19).

As funções base R_a são definidas em função das coordenadas paramétricas (ξ, η) , mas para calcular a matriz deformação-deslocamento é necessário calcular as derivadas destas funções em relação às coordenadas cartesianas (x, y) . Assim, como na formulação isoparamétrica do MEF (Cook et al., 2002), na AIG estas derivadas podem ser calculadas utilizando a matriz Jacobiana (\mathbf{J}):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum R_{a,\xi} x_a & \sum R_{a,\xi} y_a \\ \sum R_{a,\eta} x_a & \sum R_{a,\eta} y_a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} R_{a,x} \\ R_{a,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} R_{a,\xi} \\ R_{a,\eta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

As derivadas $R_{a,\xi}$ e $R_{a,\eta}$ são calculadas utilizando as Equações (13) e (15).

3.2 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio do sólido na AIG podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). De acordo com o PTV, o equilíbrio ocorre quando o trabalho virtual

interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW_{ext}), qualquer que seja o campo de deslocamentos virtuais $\delta \hat{\mathbf{u}}$, desde que este seja pequeno e obedeça às condições de contorno essenciais do problema (Cook et al., 2002). Matematicamente:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} dS + \sum \delta \hat{\mathbf{u}}_j^T \mathbf{F}_j \quad (22)$$

onde $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ é o vetor de deformações virtuais, $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões, \mathbf{b} são as forças de corpo, \mathbf{q} são as forças de superfície e \mathbf{F}_j são as cargas concentradas atuantes no corpo.

Os deslocamentos da estrutura ($\hat{\mathbf{u}}$) são calculados pelos deslocamentos dos pontos de controle (\mathbf{u}) por:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (23)$$

Utilizando a Eq. (20) e considerando apenas pequenos deslocamentos, as deformações virtuais são dadas por:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (24)$$

Assim, o trabalho virtual interno pode ser escrito como:

$$\delta U = \int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} \quad (25)$$

onde o vetor das forças internas da estrutura (\mathbf{g}) é dado por

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (26)$$

Utilizando a Eq. (19), o trabalho virtual externo pode ser escrito como:

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \delta \mathbf{u}^T \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \delta \mathbf{u}^T \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (27)$$

Portanto, o vetor das cargas externas (\mathbf{f}) é dado por

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \sum \mathbf{N}_j^T \mathbf{F}_j \quad (28)$$

Nesta expressão, a matriz \mathbf{N}_j corresponde à matriz \mathbf{N} da Eq. (19) avaliada no ponto de aplicação da força j .

As equações de equilíbrio do modelo discreto são obtidas substituindo as Eq. (25) e (27) na expressão do trabalho virtual:

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} \quad (29)$$

Como os deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ são arbitrários, as equações de equilíbrio da AIG são dadas por

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (30)$$

Neste trabalho, considera-se que o material tem um comportamento elástico linear:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (31)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva elástica. No caso de materiais lineares, esta matriz é constante e depende apenas das propriedades do material. Substituindo a relação tensão-deformação a expressão do vetor de forças internas e utilizando a Eq. (20), pode-se escrever:

$$\mathbf{g} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (32)$$

onde a matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (33)$$

Vale ressaltar que a integração utilizada para avaliar tanto a matriz de rigidez do elemento, bem como os vetores de forças internas e externas, é a quadratura de gauss tradicional utilizada em domínio triangular.

Finalmente, substituindo a relação $\mathbf{g} = \mathbf{K} \mathbf{u}$ na Eq. (30), podemos escrever as equações de equilíbrio como:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (34)$$

A solução da Eq. (34) permite a determinação dos graus de liberdade do problema (\mathbf{u}), que correspondem aos deslocamentos dos pontos de controle do modelo. Após o cálculo do vetor de deslocamentos \mathbf{u} , as deformações são calculadas utilizando a Eq. (20) e as tensões são calculadas utilizando a Eq. (31), completando a solução do problema de análise de tensões em sólidos.

3.3 Elemento Isogeométrico

O elemento isogeométrico de Bézier triangular racional utiliza uma representação de triângulo de Bézier racional como forma aproximada do modelo. A incidência dos pontos de controle é a mesma utilizada para avaliar os índices únicos da representação, como mostra a Figura 5.

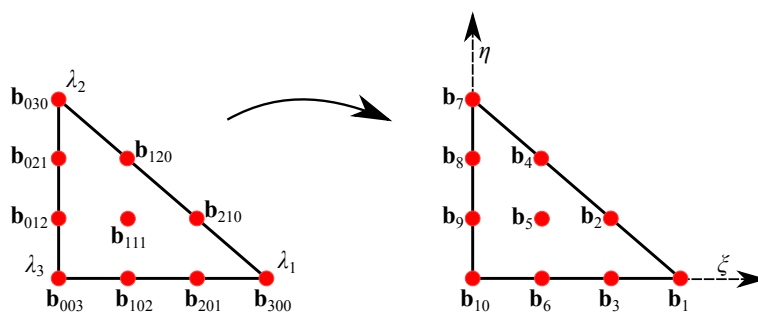


Figura 5: Sistema local do elemento triangular de Bézier.

Nas formulações isogeométricas tradicionais descritas por NURBS, cada *patch* possui um conjunto de elementos definidos pelo número de *knot spans*. Elementos de mesmo *patch* podem

possuir continuidades maiores que C^0 . Os refinamentos no modelo são obtidos através dos algoritmos clássicos de *Knot Insertion* e *Degree Elevation* (Piegl & Tiller, 1997). Além dos refinamentos p e h presentes em elementos finitos, tal abordagem também possui o refinamento k . Neste refinamento, além de aumentar o grau do elemento e número de elementos, ocorre também o aumento da continuidade entre elementos (Hughes et al., 2005).

Por outro lado, os elementos de Bézier triangular desenvolvidos neste trabalho possuem apenas um *knot span*, assim cada *patch* de Bézier define um único elemento isogeométrico com continuidade C^0 nas fronteiras. Refinamentos p e h também podem ser realizados através de algoritmos de subdivisão e elevação de grau (Farin, 2002).

Apesar da abordagem utilizada neste trabalho não garantir continuidades elevadas entre os elementos isogeométricos, a descrição exata da geometria é mantida. Além disto, tal abordagem permite aplicar de forma facilitada a geração de malha isogeométrica aproveitando os algoritmos de geração de malha tradicionais desenvolvidos para o MEF (Engvall & Evans, 2016). Assim, os elementos isogeométricos de Bézier têm maior semelhança com os elementos finitos tradicionais.

A formulação isogeométrica apresentada foi implementada no software acadêmico de Elementos Finitos FAST (Barroso, 2015), desenvolvido em linguagem de programação C++ e utilizando o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO).

3.4 Pós-processamento

O pós-processamento da análise isogeométrica requer que um pós-processador adaptado à análise isogeométrica seja utilizado. Entretanto, uma forma de aproveitar um programa de pós-processamento utilizado no MEF é gerar, para o modelo isogeométrico, uma malha fictícia de elementos finitos.

No presente trabalho, cada elemento triangular de Bézier racional gera um elemento finito equivalente T6. As coordenadas nodais dos elementos fictícios são os pontos avaliados pela superfície de Bézier nas coordenadas paramétrica correspondente de cada nó do elemento T6, como ilustrado na Figura 6. Por exemplo, o nó 3 é obtido pela avaliação da coordenada paramétrica $\xi = 1$ e $\eta = 0$.

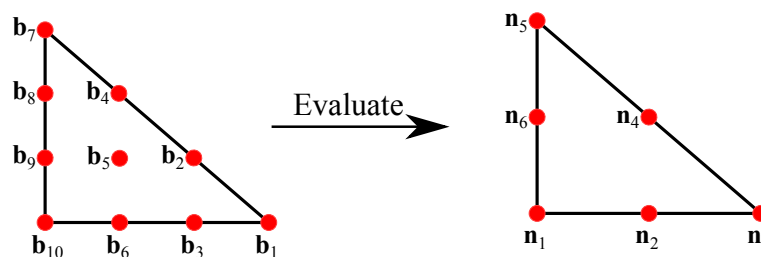


Figura 6: Pontos de controle e nós fictícios de um triângulo de Bézier cúbico e do elemento T6 equivalente para pós-processamento.

Os resultados de deslocamentos dos nós fictícios são avaliados considerando os deslocamentos obtidos nos pontos de controle, por:

$$\delta = EvalSurfPnt(\xi, \eta, \mathbf{x} + \mathbf{u}) - EvalSurfPnt(\xi, \eta, \mathbf{x}) \quad (35)$$

onde δ é o deslocamento nodal calculado, *EvalSurfPnt* é uma rotina que avalia as coordenadas cartesianas de um ponto de uma superfície de Bézier triangular, ξ e η são as coordenadas paramétricas correspondentes ao nó fictício, \mathbf{x} é o vetor de coordenadas dos pontos de controle da superfície e \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos dos pontos de controle obtidos na análise numérica. As tensões nodais são avaliadas nas coordenadas paramétricas correspondentes aos nós fictícios. Vale lembrar que este processo independe do grau ou número de pontos de controle do elemento isogeométrico.

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Esta seção mostra exemplos de aplicação do elemento isogeométrico formulado neste trabalho. As aplicações consistem em problemas de análise estática e linear. As malhas isogeométricas triangulares foram obtidas através do programa TriGA (Engvall, 2015), que consiste em um gerador de malhas não estruturadas isogeométricas triangulares. O gerador recebe como entrada as fronteiras do modelo descritas através de curvas NURBS, gerando elementos de Bézier triangulares cúbicos. Uma descrição mais detalhada do processo de geração de malha utilizado pode ser encontrado em Engvall & Evans (2016).

4.1 Cilindro espesso submetido à pressão interna

O primeiro exemplo trata da análise linear de um cilindro espesso submetido à pressão interna, considerando modelo 2D de estado plano de tensões. A Figura 7 mostra os dados utilizados no exemplo.

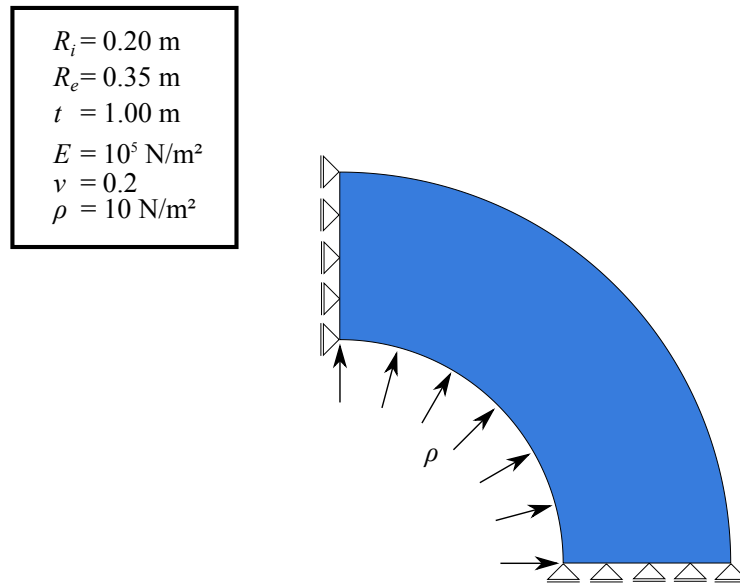


Figura 7: Descrição do Exemplo 4.1.

A solução analítica deste problema (Solução de Lamé) é dada em coordenadas polares por:

$$u(r) = \left(\frac{1-\nu}{E} \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R_i^2 R_e^2}{(R_e^2 - R_i^2)r} \right) \rho \quad r \in [R_i, R_e] \quad (36)$$

$$\sigma_r(r) = -\rho \frac{(R_e^2 - r^2) R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2) r^2} \quad (37)$$

$$\sigma_\theta(r) = -\rho \frac{(R_e^2 + r^2) R_i^2}{(R_e^2 - R_i^2) r^2} \quad (38)$$

onde $u(r)$ é o deslocamento radial, R_i é o raio interno do cilindro, R_e é o raio externo do cilindro, σ_r é a tensão radial e σ_θ é a tensão circunferencial.

O problema é solucionado através da Análise Isogeométrica utilizando elementos triangulares de Bézier racional cúbicos. Duas malhas foram obtidas utilizando o gerador de malhas TriGA, que são ilustradas na Figura 8.

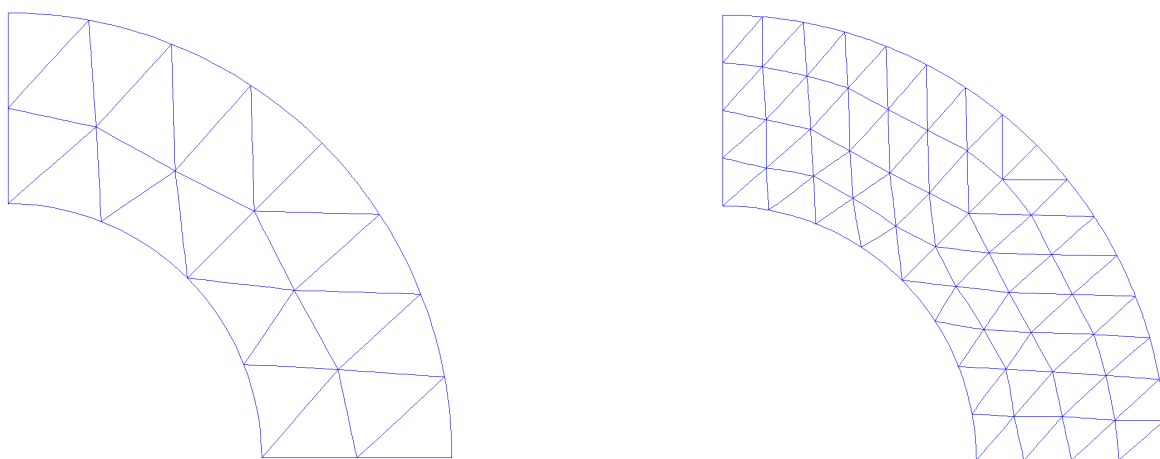


Figura 8: Malhas isogeométricas consideradas no Exemplo 1.

A integração numérica foi realizada considerando 7 pontos de integração de quadratura triangular completa. Neste trabalho, a quadratura completa é aquela capaz de integrar exatamente o polinômio de maior grau que aparece na matriz de rigidez de um elemento não distorcido (Jacobiano constante). Os elementos triangulares cúbicos utilizados requerem uma integração quártica, e os 7 pontos são suficientes para integrar polinômios quárticos (Zienkiewicz et al., 2005). Vale lembrar que pelo fato dos elementos tratados neste trabalho serem racionais não é garantido que uma quadratura completa seja suficiente para uma integração exata. Apesar disto, foram obtidos bons resultados utilizando tal quadratura de integração.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos considerando o ponto de raio igual a 0.275 (na metade do cilindro). Os resultados apresentam excelente semelhança com a solução analítica do problema.

Tabela 1: Resultados obtidos do Exemplo 1 considerando $r=0.275$.

	Analítico	Malha 1	Erro(%)	Malha 2	Erro (%)
u	3,6584e-5	3,6587e-5	0,008	3,6584e-5	0,000
σ_r	-3,0053	-2,9710	-1,140	-2,9997	-0,183
σ_θ	-12,702	-12,678	-0,192	-12,701	-0,007

4.2 Parte Mecânica

O segundo exemplo deste trabalho trata de uma parte mecânica submetida a tração, considerando um modelo de estado plano de tensão. A Figura 9 ilustra a geometria, carregamentos e condições de contorno do problema. Este exemplo é baseado em um dos exemplos encontrados em Zienkiewicz et al. (2005), no capítulo *Adaptive finite element refinement*.

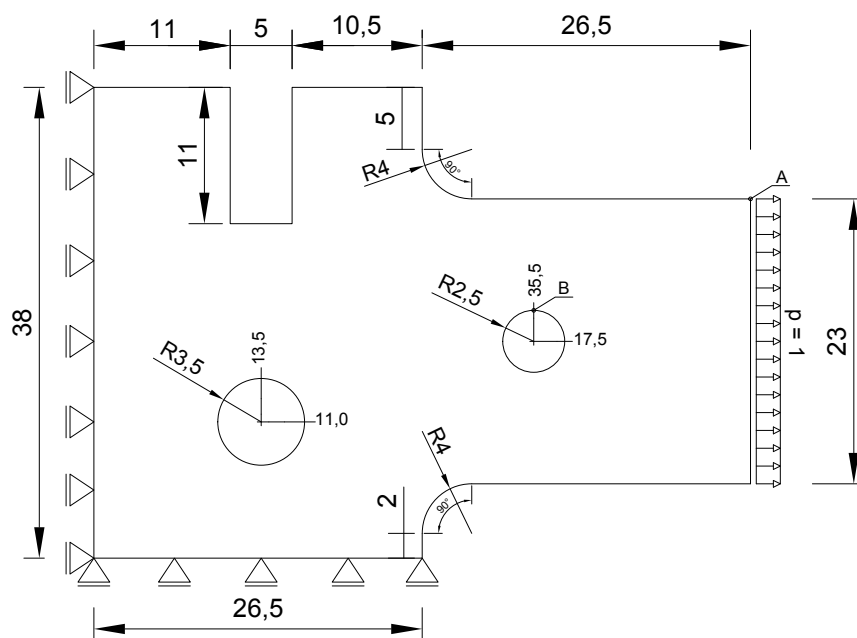


Figura 9: Geometria da parte mecânica.

O módulo de elasticidade E considerado é 1000, o coeficiente de Poisson é 0,3, e a espessura considerada na análise tem valor unitário. As malhas consideradas neste exemplo são ilustradas na Figura 10. A integração dos elementos é realizada com a mesma quadratura do exemplo anterior.

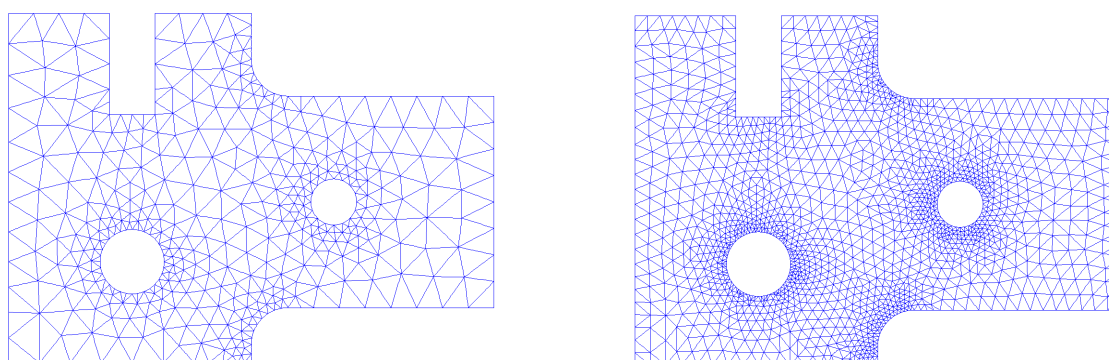


Figura 10: Malhas isogeométricas consideradas no Exemplo 2.

O problema também foi analisado utilizando o Método dos Elementos Finitos pelo programa comercial Abaqus/CAE 6.9, considerando elementos triangulares de 6 nós CPS6M. As

malhas de elementos finitos utilizadas foram geradas pelo programa e estão ilustradas na Figura 11.

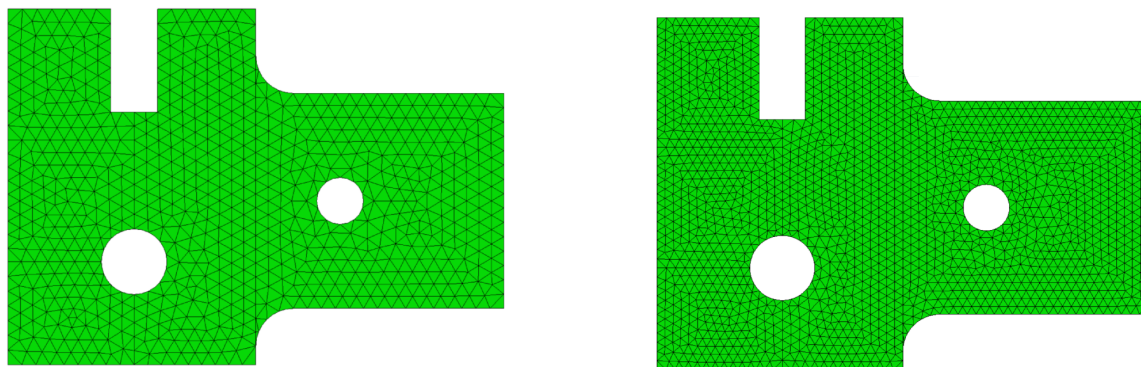


Figura 11: Malhas de elementos finitos geradas no software Abaqus.

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos nas análises realizadas. Neles são mostrados os deslocamentos máximos u e v , que são verificados no ponto A mostrado na Figura 9. Também são mostrados as tensões σ_x no ponto B situado na parte de cima do segundo furo circular, mostrado na Figura 9. As Figuras 12 e 13 mostram, respectivamente, os campos de deslocamentos u e v obtidos na segunda malha isogeométrica considerada.

Tabela 2: Resultados obtidos no Exemplo 2.

Malha	Número PC/Nós	Número de Elem.	u	v	σ_x
AIG Malha 1	3608	755	6,1232e-2	-2,5114e-2	3,0539
AIG Malha 2	14013	3020	6,1281e-2	-2,5161e-2	3,0472
Abaqus M1	3150	1497	6,1080e-2	-2,5070e-2	2,9840
Abaqus M2	7163	3462	6,1200e-2	-2,5140e-2	3,0081

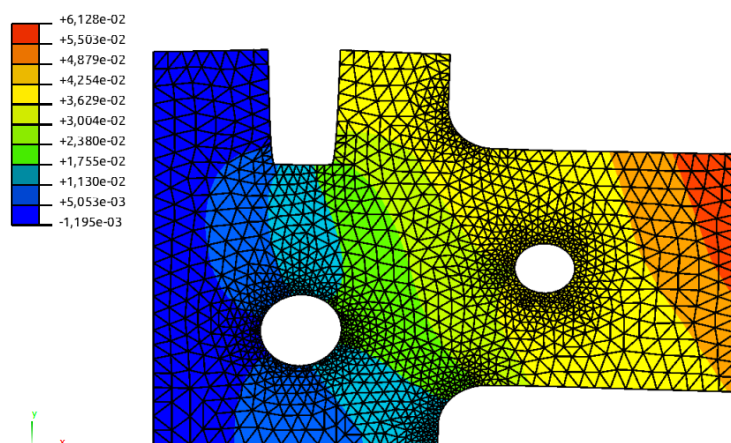


Figura 12: Resultados de deslocamento u para segunda malha (AIG), geometria deformada com escala de 1:50.

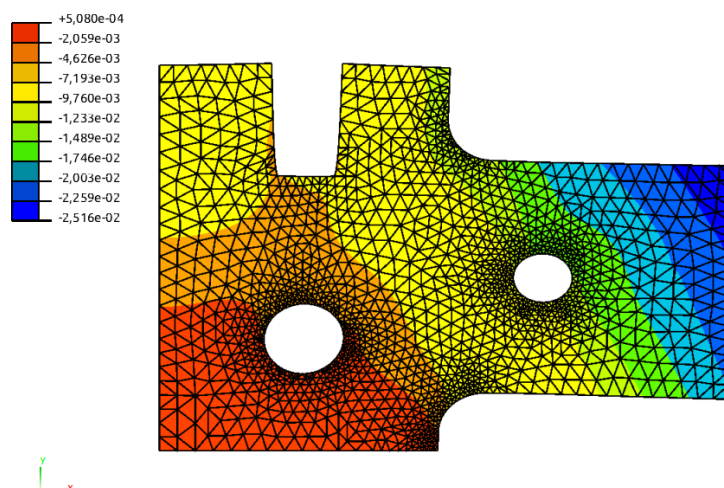


Figura 13: Resultados de deslocamento v para segunda malha (AIG), geometria deformada com escala de 1:50.

Os resultados obtidos mostraram grande concordância entre as respostas obtidas da análise isogeométrica formulada neste trabalho com as respostas obtidas via elementos finitos.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a formulação e aplicação da Análise Isogeométrica utilizando triângulos de Bézier racionais para problemas de estado plano de tensão. Os resultados mostraram que uma correta implementação foi realizada.

A utilização de triângulos de Bézier juntamente com um gerador de malhas isogeométricas não estruturadas permitiu analisar modelos complexos com furos, considerando geometria exata. É importante ressaltar que a formulação e implementação de elementos tetraédricos de Bézier é análoga a do elemento apresentado neste trabalho. Assim a mesma abordagem tratada aqui pode ser utilizada em modelos tridimensionais.

Também é importante citar que a formulação apresentada pode ser utilizada independente do grau considerando nos elementos triangulares, permitindo que uma adaptação do modelo por elevação de grau seja realizada de maneira mais fácil.

Outros aspectos deste tema podem ser explorados em trabalhos futuros, como a geração de malhas isogeométricas de superfícies para análise de cascas, considerando inclusive modelos com furos. Também pode ser abordado a utilização de análises isogeométricas adaptativas.

AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho agradecem o suporte financeiro dado pela CAPES e CNPq.

REFERENCES

Barroso, E. S. 2015. Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando formulação isogeométrica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Brasil, Ceará.

- Breitenberger, M., Apostolatos, A., Philipp, B., Wüchner, R., & Bletzinger, K. U. 2015. Analysis in computer aided design: Nonlinear isogeometric B-Rep analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284:401–457.
- Cohen, E., Martin, T., Kirby, R. M., Lyche, T., & Riesenfeld, R. F. 2010. Analysis-aware modeling: Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 199:334 – 356. Computational Geometry and Analysis.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. 2002. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, 4nd edition.
- Engvall, L. 2015. TriGA: Triangular IGA.
- Engvall, L. & Evans, J. A. 2016. Isogeometric triangular Bernstein–Bézier discretizations: Automatic mesh generation and geometrically exact finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 304:378–407.
- Farin, G. 2002. Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 5th edition.
- Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. 2005. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194:4135 – 4195.
- Jaxon, N. & Qian, X. 2014. Isogeometric analysis on triangulations. *Computer-Aided Design* 46:45–57.
- Kim, H.-J., Seo, Y.-D., & Youn, S.-K. 2009. Isogeometric analysis for trimmed CAD surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198:2982–2995.
- Liu, L., Zhang, Y., Hughes, T. J. R., Scott, M. A., & Sederberg, T. W. 2013. Volumetric T-spline construction using Boolean operations. *Engineering with Computers* 30:425–439.
- Nagy, A. P. & Benson, D. J. 2015. On the numerical integration of trimmed isogeometric elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 284:165–185.
- Piegl, L. & Tiller, W. 1997. The NURBS Book (Monographs in Visual Communication). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2 edition.
- Schillinger, D., Dedè, L., Scott, M. A., Evans, J. A., Borden, M. J., Rank, E., & Hughes, T. J. R. 2012. An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 249–252:116 – 150. Higher Order Finite Element and Isogeometric Methods.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. 2005. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Butterworth-Heinemann. Google-Books-ID: YocoaH8lnx8C.