



## **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM ENRIQUECIMENTO DE INTERFACE PARA MATERIAIS COMPÓSITOS**

**Gelson de Sousa Alves**

**Francisco Evangelista Junior**

gelsondsalves|@gmail.com

fejr.unb@gmail.com

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental

Edifício SG-12, 1º Andar, Campus Darcy Ribeiro, 70.910-900, Brasília, DF, Brasil

**Resumo.** *Este artigo tem como objetivo apresentar uma formulação não convencional do método dos elementos finitos (MEF). O método dos elementos finitos generalizados (MEFG) foi formulado a fim de melhorar a aproximação dos problemas de valor de contorno com soluções descontínuas devido a diferentes interfaces de materiais. Foi apresentado uma técnica levando em consideração a interface do material em compósitos sem a correspondência da malha de elementos finitos com o contorno dos diferentes materiais nos membros estruturais: chapas com dois materiais e compósitos heterogêneos (matriz e inclusões). Os resultados foram comparados com soluções simuladas pelo MEF, mostrando a eficiência do método e modelo proposto. A estratégia demonstrou potencial para resolver problemas com gradiente descontínuo causado pela interface material.*

**Keywords:** *MEF, MEFG, Interface, Materiais Compósitos*

## 1 INTRODUÇÃO

Métodos não convencionais vêm sendo cada vez mais difundidos para resolução de problemas específicos e complexos da mecânica computacional. Dentre esses métodos destaca-se o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG foi proposto inicialmente sob as denominações Método dos Elementos Finitos Especiais; e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (Babuška *et al.*, 1994; Melenk e Babuška, 1996; Babuška e Melenk, 1997). Uma estratégia similar foi também proposta sob as denominações Nuvens *hp* e Método dos Elementos Finitos baseado nas Nuvens *hp* (Duarte e Oden, 1995; Duarte e Oden, 1996; Oden *et al.*, 1998). Outra abordagem foi proposta por Belytschko e Black (1999) e Möes *et al.* (1999) com a denominação de Método dos Elementos Finitos Estendido. O MEFG combina os conceitos dos métodos sem malha, quanto à utilização de funções enriquecedoras, com as funções de aproximação tradicionais do MEF definidas nos nós (Babuška *et al.*, 1994). O método trabalha com diversas famílias de funções de enriquecimento, citando-se: os enriquecimentos polinomiais, singulares, descontínuos e de interface que visam melhorar a qualidade da aproximação e também flexibilizar os aspectos de modelagem.

Para problemas envolvendo materiais compósitos, a modelagem pelo MEFG possibilita que a malha gerada não esteja em conformidade com a interface física entre materiais, como acontece na modelagem pelo MEF, aumentando os custos computacionais de modelagem. No trabalho de Möes *et al.* (2003) foram implementadas funções de enriquecimento denominada *level – set* que caracterizam a interface material. Para simular policristais com contorno de grãos Simone *et al.* (2006) formularam o MEFG implementando funções descontínuas no campo dos deslocamentos. Problemas envolvendo interface, porém em problemas de transferência de calor foram formulados por Soghrati *et al.* (2012), Soghrati e Geubelle (2012) em domínios 2D e 3D, respectivamente denominado MEFG com enriquecimento de Interface (MEFGI). Uma estratégia global local para resolver problemas de gradientes de temperatura foi desenvolvido por Plews *et al.* (2012), onde as funções de enriquecimento são construídas numericamente em um domínio local para aplicar no domínio global. Plews e Duarte (2015) aplicaram a estratégia global local em um problema com múltiplas escalas locais para um único problema global em problemas de transferência de calor. Uma estratégia de refinamento adaptativa para modelar interfaces curvas para problemas termomecânicos foi desenvolvido por Soghrati *et al.* (2015) baseado no princípio do MEFGI.

No presente trabalho se formulou e implementou funções de enriquecimento de interface para a análise de estruturas compósitas em regime elástico linear utilizando a metodologia do MEFG. Validou-se uma técnica eficiente para a simulação de interface entre materiais, de modo a flexibilizar a geração de malhas para análises de materiais compósitos.

## 2 FORMULAÇÃO DO MEFG

O MEFG utiliza a estrutura do MEF e os conceitos dos métodos sem malha. Esta seção faz-se uma abordagem geral do MEFG. Na sequência é descrita uma formulação do MEFG que se aplica para o estudo da interface entre materiais com as respectivas funções de enriquecimento mais conhecido como MEFGI.

## 2.1 Aproximação no MEFG

O MEFG abrange o conceito de nuvens de influência (suporte) entre os elementos, no qual se utiliza uma malha de elementos finitos para o posicionamento dos nós e as nuvens de influência  $\omega_j$  são formadas pelo conjunto de elementos finitos que compartilham o mesmo nó  $x_j$ , similarmente como ocorre no método das nuvens *hp* de Duarte e Oden (1996). Para cada nuvem, a PU fica determinada pelo conjunto das funções de forma dos elementos finitos que compartilham o nó base e devem respeitar as mesmas propriedades que são estabelecidas pelo MEF para se formar a PU. Maiores detalhes sobre as propriedades da PU podem ser encontrados em (Bathe, 1996; Reddy, 2006 e Zienkiewicz *et al.* 2005).

Para obtenção de uma melhor qualidade nas aproximações, amplia-se o espaço da aproximação multiplicando as funções PU já estabelecidas, por funções de aproximação local, conhecidas como funções de enriquecimento como apresentados na Eq. (1):

$$\mathfrak{S}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(x), L_{j2}(x), \dots, L_{jq}(x)\} \text{ com } L_{j1}(x) = 1. \quad (1)$$

em que  $L_{ji}$  são as funções de enriquecimento definidas em cada nó  $x_j$  da nuvem  $\omega_j$ . O produto entre a PU pelas funções da Eq. (1) resulta nas funções de forma do MEFG, representado na Eq. (2):

$$\{\phi_{ji}(x)\}_{i=1}^q = N_j(x) \cdot \{L_{ji}(x)\}. \quad (2)$$

em que  $N_j$  são as funções PU também conhecido como funções de interpolação ou funções de forma e  $\phi_{ji}$  são as funções de forma do MEFG.

Na Figura 1, pode ser visualizado uma representação para a construção da função de forma do MEFG mostrado pela Eq. (2). Na parte superior da Fig. 1 é representada a função PU ( $N_j$ ) de uma determinada nuvem de elementos. Essa função é a função de forma tradicional do MEF. Na parte central, encontra-se a função de enriquecimento ( $L_{ji}$ ) para caracterização do problema local sendo definida a partir de um conhecimento *a priori* do comportamento da solução. Na parte inferior, mostra-se a função de forma do MEFG ( $\phi_{ji}$ ) resultado do produto entre a PU e a função de enriquecimento, essa função possui características locais em decorrência das características da função de enriquecimento escolhida e herdam o suporte compacto da PU, ou seja, as funções de forma valem zero fora dos elementos que contêm o seu nó associado (Strouboulis *et al.*, 2000).

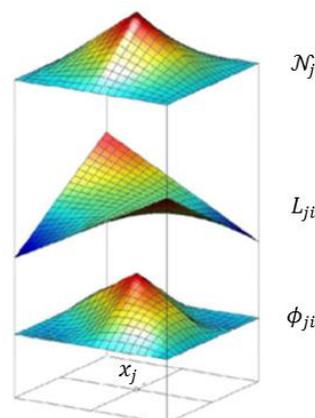


Figura 1. Construção das funções de forma do MEFG (Evangelista Jr *et al.* 2013).

Pela combinação entre as funções PU e de enriquecimento estabelecidas na Fig. (1), chega-se a uma aproximação  $\tilde{u}(x)$  do MEEG, apresentada na Eq. (3):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^q L_{ji}(x) b_{ji} \right\}. \quad (3)$$

em que  $u_j$  são os graus de liberdade da estrutura atrelada ao nó  $x_j$  da nuvem  $\omega_j$  e  $b_{ji}$  são os graus de liberdade adicionais, em correspondência a cada componente das funções enriquecidas.

## 2.2 Aproximação no MEEGI

O Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEEGI) utiliza uma estratégia similar ao MEEG convencional visto anteriormente, a diferença crucial entre ambos está na escolha das funções de enriquecimento. No MEEG convencional se escolhem as funções a partir de um conhecimento inicial do comportamento da solução e no MEEGI as funções de enriquecimentos são escolhidas a partir das funções de forma do próprio domínio. A Figura 2 melhor se compreende essa definição do MEEGI num domínio com dois materiais.

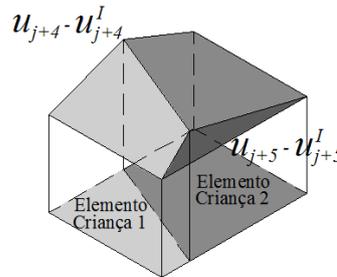


Figura 2. Aproximações em um domínio com 2 materiais em uma interpolação do MEEGI.

Para um domínio com dois materiais sendo discretizado por dois elementos quadrilaterais, cada um em conformidade com cada material é realizada uma interpolação pelo MEF, utilizando funções de forma Lagrangeanas como funções de interpolação. A aproximação genérica  $\tilde{u}(x)$  pelo MEF é mostrada na Eq. (4).

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) u_j. \quad (4)$$

No entanto, se os dois elementos forem agrupados e transformados em apenas um elemento em não conformidade, ter-se-á um domínio com dois materiais pertencente ao mesmo elemento. A aproximação pelo MEF calculado pela Eq. (4) desse elemento, não reconstrói o gradiente de descontinuidade na região da interface do material (Soghrati *et al.*, 2012).

A parte que falta na interpolação do campo de deslocamento pode ser recuperada, conforme observado na Fig. 2, por meio da utilização da estratégia do MEEGI. A estratégia consiste em utilizar em um domínio com dois materiais, apenas um elemento, no qual se extrai as funções de forma Lagrangeanas  $N_j^{(p)}$  desse elemento chamado de pai. Na intersecção da aresta do elemento com a interface, criam-se nós e, conseqüentemente, aumenta-se o número de graus de liberdade, porém esses nós não são pertencentes à malha original (Soghrati *et al.*, 2012).

Com os nós inseridos na intersecção da interface com a aresta do elemento, criam-se novos elementos, chamados elementos criança, como se observa na Fig. 2, em que cada elemento criança pertence a cada material, possuindo funções de forma Lagrangeanas associadas a cada ponto nodal dos mesmos e que são responsáveis pelo cálculo da integração em cada material separadamente.

Ao final, junta-se cada elemento criança ao elemento pai, para a montagem da matriz de rigidez do elemento. A aproximação  $\tilde{u}(x)$  pelo MEFGE é apresentada na Eq. (5):

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^n N_j^{(p)}(x) u_j + \sum_{i=1}^{nen} s \psi_i(x) \alpha_i. \quad (5)$$

em que  $N_j^{(p)}$  são as funções de forma Lagrangeanas do elemento pai em cada nó  $j$ ,  $u_j$  são os deslocamentos em cada ponto nodal  $j$  do elemento pai,  $\psi_i$  e  $\alpha_i$  são funções de enriquecimento de interface e graus de liberdade generalizados para cada nó  $i$  de interface, respectivamente e  $s$  é um fator de escala relacionado à relação de aspecto entre o elemento criança e o pai, maiores detalhes podem ser encontrados em Soghrati *et al.*, (2012).

As funções de enriquecimento do MEFGE são construídas, a partir da obtenção dos valores das funções de forma Lagrangeanas dos elementos criança relativos a cada nó que intercepta a interface e no final são somados os valores dessas funções de forma correspondentes a cada nó dessa interface (Soghrati e Geubelle, 2012). Na Figura 2, como foram inseridos dois nós na interface, duas funções de enriquecimento são adicionadas.

Segundo Soghrati e Geubelle (2012), os subelementos quadrilaterais são criados apenas para se avaliar as funções de enriquecimento de interface. As funções de forma são selecionadas do elemento como um todo, equivalente à primeira parte da Eq. (5), ou seja, do elemento pai.

### 3 MODELAGEM COMPUTACIONAL DE MATERIAIS COMPÓSITOS

São apresentados nesta seção os resultados das simulações numéricas relacionados ao MEFGE em um domínio de análise composto por dois materiais. Como modelos, apresenta-se uma chapa engastada e submetida a um esforço de tração, constituída de dois materiais distintos, em que foi discretizado para os dois materiais apenas um elemento quadrilateral para todo o domínio. Outro modelo é um material compósito também constituído por uma chapa engastada submetida a um esforço de tração, porém no interior da chapa possui alguns materiais em regiões localizadas com diferentes propriedades mecânicas.

#### 3.1 Aplicação em chapa de dois materiais

Neste modelo, é analisada uma chapa tracionada em uma das extremidades e engastada na outra extremidade, como apresentado na Figura (3).

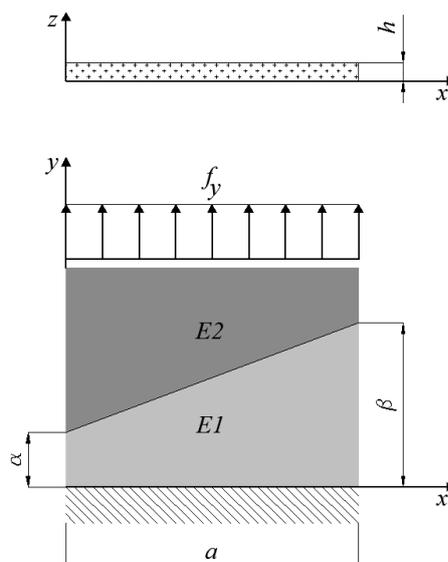
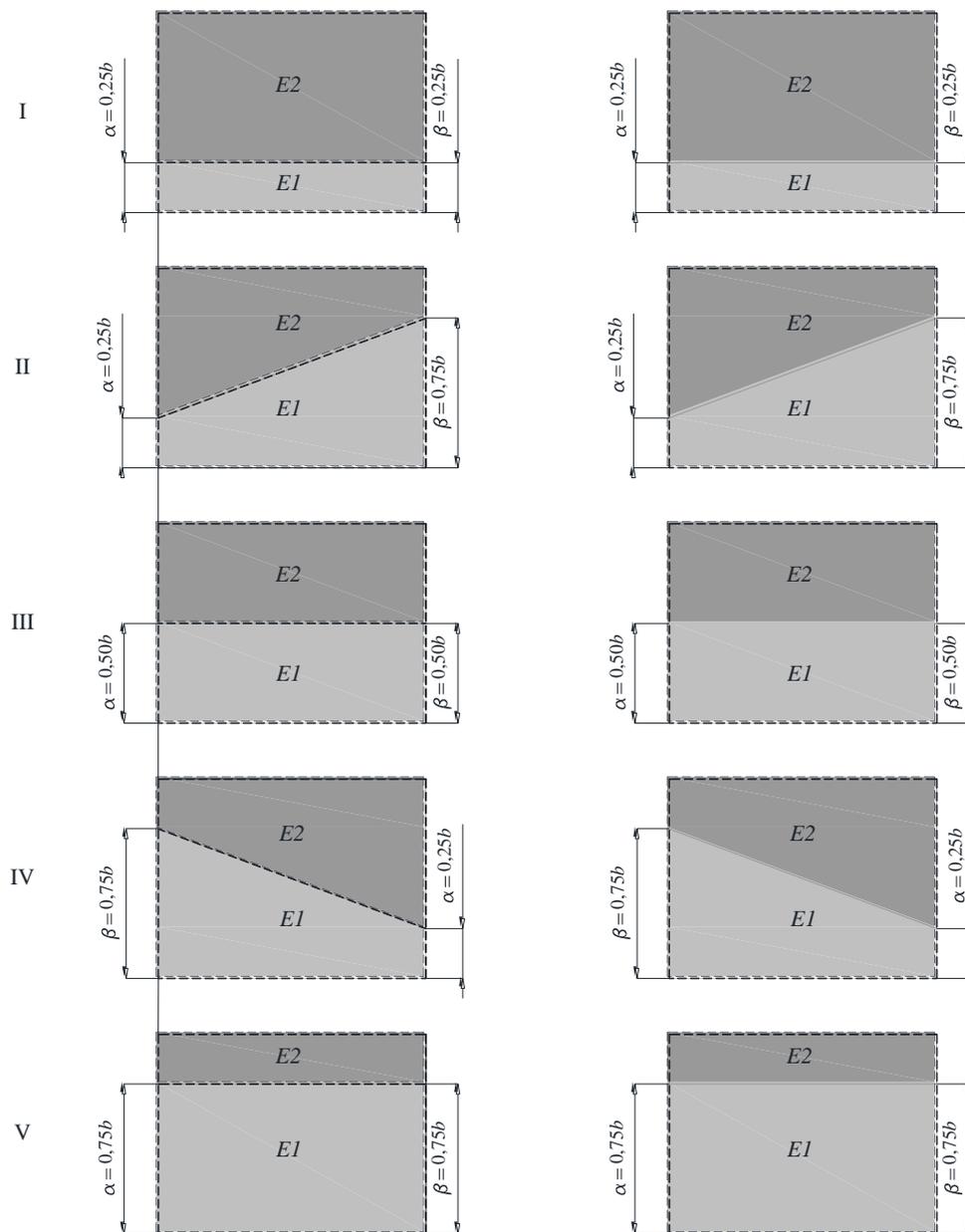


Figura 3. Geometria e carregamento da chapa uniaxial submetido a esforço de tração.

A chapa possui dimensões de  $a = 160$ ,  $b = 120$  e  $h = 0.036$ , um carregamento uniformemente distribuído  $f_y = 10$ , um Módulo de Elasticidade de Referência  $E_R = 30E+06$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  (todas as grandezas são apresentadas em unidades consistentes). Os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são medidas das proporções para cada material em cada lado na direção longitudinal da chapa.

O Módulo de Elasticidade de Referência,  $E_R$ , é o valor de referência para análise, pois como são dois materiais diferentes na composição da peça, cada material possui valores diferentes para o módulo. Desse modo, foi utilizado para cada material um valor de módulo de elasticidade em função do valor de Referência. Nessa chapa, o objetivo foi analisar a convergência para os valores da energia de deformação para a construção de um Módulo de Elasticidade Longitudinal Equivalente ( $E_{eq}$ ) à medida que se muda a proporção de cada material na chapa.

A chapa da Figura 3 foi simulada para cinco configurações diferentes (Fig. 4), em que cada configuração possui diferentes proporções de materiais na composição da mesma. Essa mudança fez-se alterando os valores dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , anteriormente mencionados. Na Figura 4 são mostrados às malhas (em tracejado) para a simulação pelo MEF (Fig 4(a)) e pelo MEFGI (Fig 4(b)) de cada configuração.



**Figura 4. Configurações dos materiais e malhas para a chapa analisada; (a) MEF; (b) MEFGI.**

Para todas as simulações pelo MEF, utilizam-se dois elementos, discretizando um elemento para cada material, de forma a malha gerada estar em conformidade com cada material. Para todas as simulações pelo MEFGI, utilizam-se para cada configuração da chapa apenas um elemento, em que o mesmo agrupa os dois materiais. Para todas as simulações se utilizou valores de módulos de elasticidade iguais a  $E_1 = 10E_R$  para o material 1 e  $E_2 = E_R$  para o material 2.

Na Tabela 1, apresentam-se os resultados dos erros relativos das energias de deformação da chapa, realizado pelo MEFGI, comparando-se com a solução do MEF, para todos os casos da Fig. 4, para a relação entre materiais  $E_1/E_2=10$ .

**Tabela 1. Energia de deformação na chapa realizado pelo MEFGI e MEF para todos os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  para a relação  $E_1/E_2=10$ .**

CASO	$E_1/E_2 = 10$		
	MEF	MEFGI	$\epsilon_r$ (%)
I	0,6889	0,6889	0,00
II	0,4855	0,4787	1,40
III	0,4889	0,4889	0,00
IV	0,4855	0,4787	1,40
V	0,2889	0,2889	0,00

Na Tabela 1, pode ser observado, para valores de  $\alpha$  e  $\beta$  iguais nos casos I, III e V, a solução do MEFGI se iguala à solução do MEF. Isto confirma a capacidade do método MEFGI de se trabalhar com materiais com geometrias regulares, para qualquer relação entre seus módulos de elasticidade, atuantes sobre uma direção uniaxial de carregamento.

Porém, nos casos II e IV, quando os materiais possuem geometrias com distorções angulares, as soluções do MEFGI e do MEF apresentam um pequeno erro relativo ( $\epsilon_r > 0$ ). Isso se deve ao fato de se trabalhar com elementos distorcidos de acordo com as interfaces, em ambos os casos.

Os valores dos  $E_{eq}$  dependem dos valores dos deslocamentos axiais calculados na extremidade da chapa. Para cada composição de material na chapa, obtém-se valores de deslocamentos diferentes, em que se calcula a média dos mesmos para o cálculo dos módulos equivalentes. Na Tabela 2, são apresentados os valores obtidos para  $E_{eq}$  (em unidades consistentes), para as análises realizadas pelo MEFGI e MEF para a relação entre módulos  $E_1/E_2 = 10$ .

**Tabela 2. Valores dos  $E_{eq}$  analisado via MEF e MEFGI.**

CASO	$E_1/E_2 = 10$		
	MEF	MEFGI	$\epsilon_r$ (%)
I	38709677	38709677	0,00
II	54925423	55702739	1,40
III	54545455	54545455	0,00
IV	54925423	55702739	1,40
V	92307692	92307692	0,00

Da Tabela 2, visualiza-se os valores dos  $E_{eq}$  para o MEF e o MEFGI, e o  $\epsilon_r$  entre eles. Observa-se a igualdade dos valores quando os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são iguais e uma pequena diferença quando os coeficientes são diferentes por causa das distorções angulares dos materiais, vistas anteriormente para as energias de deformação. Os valores dos  $E_{eq}$  para o MEFGI apresentados na Tabela 2 é visualizado no gráfico da Fig. 5 para os diferentes valores dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ .

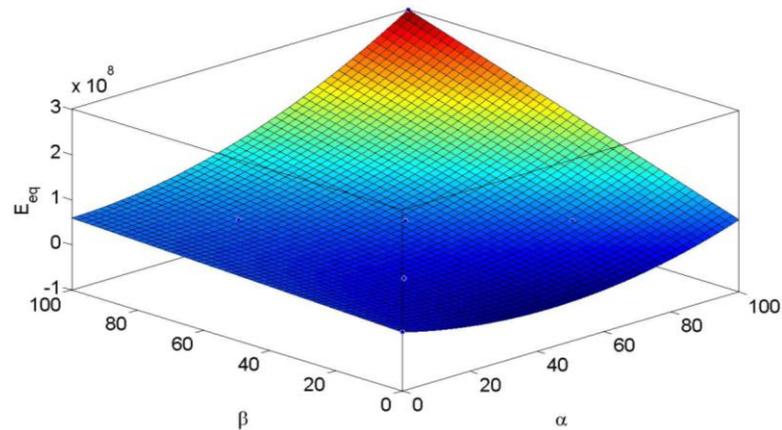


Figura 5. Valores do  $E_{eq}$  analisado via MEFGI para diferentes valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

Da Figura 5, comenta-se que os gráficos se iniciam com valores de  $\alpha$  e  $\beta$  nulos. Esses correspondem, nos gráficos, ao valor de  $E_{eq}$  igual a  $E_2$ , prosseguindo para pontos intermediários não nulos de  $\alpha$  e  $\beta$ , o que acarreta num  $E_{eq}$ . Finaliza-se com valores dos coeficientes iguais a 100 %, que correspondem nos gráficos ao valor de  $E_{eq}$  igual a  $E_1$ . Note que as superfícies dos gráficos são polinomiais com aproximações quadráticas. Para  $E_1/E_2 = 10$ , a superfície possui uma inclinação maior na parte final. Isto faz com que o material  $E_2$  possua rigidez menor do que o  $E_1$  e reduza o valor do deslocamento de forma acentuada na parte final do valor dos coeficientes. Assim o valor do deslocamento é regido quase todo pelo valor do deslocamento do material de rigidez maior  $E_1$ , acarretando na inclinação.

### 3.2 Aplicação em compósitos de matriz e inclusões

Neste modelo, é analisada uma chapa engastada em uma extremidade e submetida a um esforço de tração na outra extremidade. A chapa é um material compósito heterogêneo formado pelas inclusões com módulo de elasticidade  $E_1$  e a matriz com módulo de elasticidade  $E_2$ . A Figura 6 apresenta para a chapa uma configuração do compósito com relação ao seu volume.

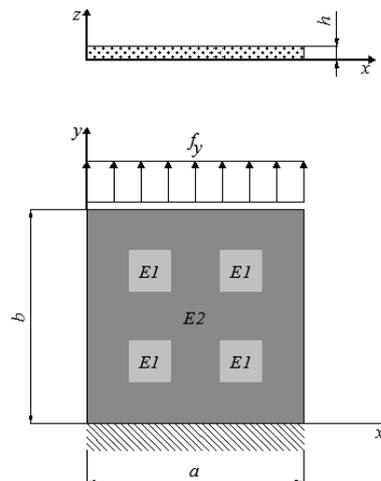


Figura 6. Geometria, carregamento da chapa submetido a esforço de tração para uma relação entre volumes  $V_1/V_2 = 0,16$ .

A chapa possui dimensões de  $a = 1$ ,  $b = 1$  e  $h = 0.036$ , um carregamento uniforme  $f_y = 1000$ , um Módulo de Elasticidade de Referência  $E_R = 30E+06$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  (todas as grandezas são apresentadas em unidades consistentes).

Nesta chapa, o objetivo é analisar as respostas para os deslocamentos para a construção de um  $E_{eq}$ , à medida que se muda o valor  $E_1$  das inclusões com relação à matriz dessa chapa para análise realizada pelo MEFGI. Na Figura 7, é simulado para a chapa com a relação entre volume estabelecida, duas diferentes configurações de malhas para análise.

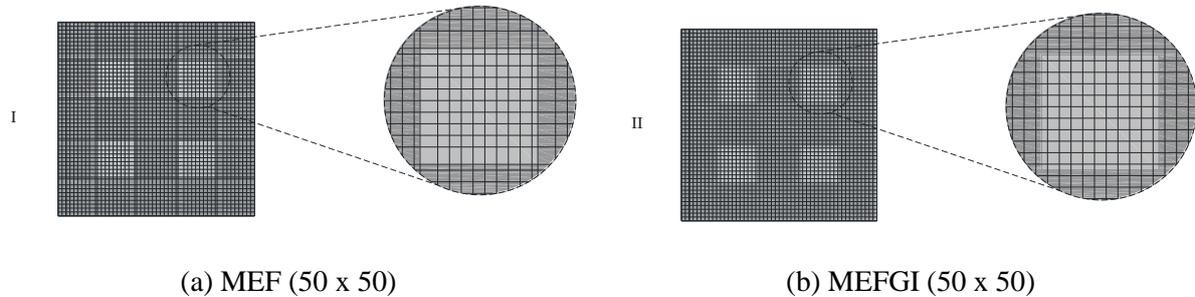


Figura 7. Configurações das malhas.

A Malha I foi simulada pelo MEF com os elementos em conformidade na interface existente entre a matriz e as inclusões. A malha II é simulada pelo MEFGI, com a interface das inclusões cortando alguns elementos na discretização. Os valores dos  $E_{eq}$  dependem dos valores dos deslocamentos axiais. Para cada composição de material na chapa, obtém-se valores de deslocamentos diferentes, em que se calcula a média dos mesmos para se calcular os módulos equivalentes.

No gráfico da Figura 8, são apresentados valores para o  $E_{eq}$  para as duas configurações de malhas, juntamente com os tipos de simulações realizadas para as diferentes relações entre os Módulos de Elasticidade  $E_1/E_2$ , com o valor  $E_2 = E_R$  para todas as simulações.

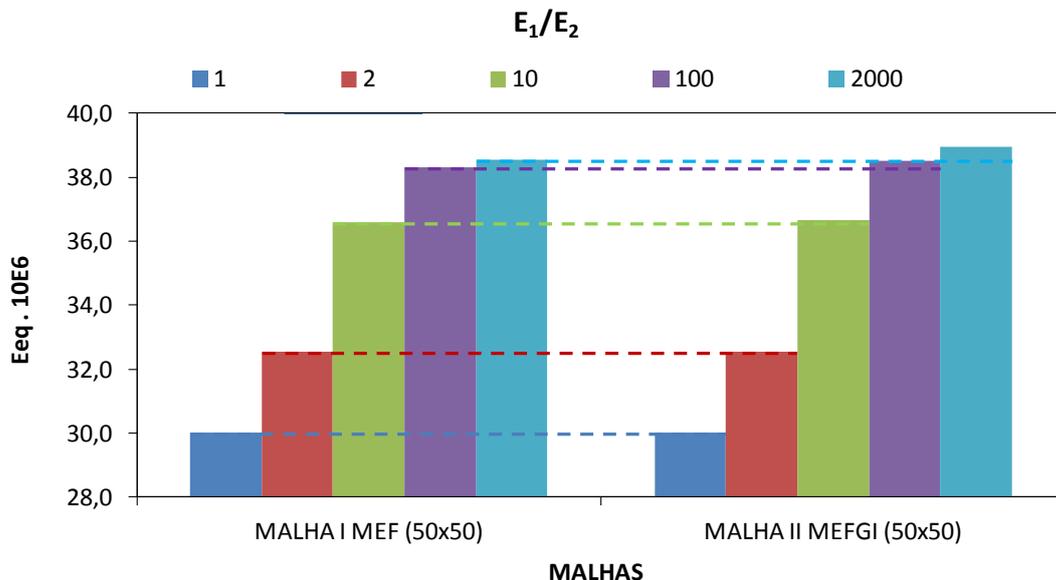


Figura 8. Valores de  $E_{eq}$  para diferentes malhas e tipos de simulações com diferentes relações  $E_1/E_2$ .

Do gráfico da Figura 8, analisa-se uma significativa proximidade dos valores de  $E_{eq}$  entre a malha I simulada pelo MEF e a malha II, simulada pelo MEFGI, com a mesma quantidade de elementos para todas as relações  $E_1/E_2$  estabelecidas, garantindo boas aproximações para o

MEFGI em malhas refinadas. A diferença  $E_{eq}$  para a malha I aumenta à medida que se aumenta o valor da relação  $E_1/E_2$  entre a matriz e as inclusões, porém não significativo como pode ser visualizado na Fig. 8. No entanto, apesar do aumento da diferença, esses resultados são satisfatórios, pois a relação  $E_1/E_2$  é muito alta, o que não ocorre com frequência nos materiais empregados na prática. O MEFGI pode ser melhor utilizado com um refinamento da malha, porém somente se estabelece o tamanho dessa malha apenas uma vez, tendo como vantagem a possibilidade dos materiais mudarem de forma e não precisar gerar uma nova malha para contorná-los.

## 4 CONCLUSÕES

Esse artigo abordou a formulação do Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento de Interface (MEFGI) para aplicação em estruturas bidimensionais de materiais compósitos.

A estratégia de enriquecimento MEFGI demonstrou grande potencialidade para a resolução de problemas com gradiente descontínuo originado pela diferença de rigidez entre os diferentes materiais sem usar uma malha de conformidade nas bordas da interface.

O MEFGI captura de forma eficiente os valores dos módulos de elasticidade equivalentes. Os resultados mostraram a utilidade destas análises no desenvolvimento de materiais compósitos através da otimização da rigidez equivalente do compósito, por meio da otimização simultânea da rigidez.

Finalizando, conclui-se que a utilização do MEFG traz uma grande capacidade na qualidade da aproximação final com a utilização racional de funções de enriquecimento melhorando a eficiência computacional. A aplicação das funções de interface propostas flexibilizam significativamente a modelagem de problemas com campos de gradiente descontínuos, em que se geram malhas sem a preocupação de estar em conformidade com cada material.

## AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e a Universidade de Brasília pela estrutura fornecida para desenvolvimento deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Babuška, I., Caloz, G., & Osborn, J. E., 1994. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, p. 945 – 981.
- Babuška, I., & Melenk, J. M., 1997. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p. 727-758.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite element procedures*. [S.I.]: Prentice-Hall, Inc., ISBN 0-13-301458-4.
- Belytschko, T., & Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, No. 5, pp. 601-620.

- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional Structural mechanics problems. *Computers & Structures*, vol. 77, n. 2, p. 215-232.
- Duarte, C. A., & Kim, D. J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global- local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, p. 487-504.
- Duarte, C. A., & Oden, J. T., 1995. *Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem*. Technical Report 9505, TICAM, University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A. & Oden, J. T., 1996. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 237-262.
- Kim, D. J., Duarte, C. A., & Pereira, J.P., 2008. Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global local enrichment functions. *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 75, pp. 763-813.
- Kim, D. J., Pereira, J.P., & Duarte, C. A., 2010. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 81, pp. 335-365.
- Melenk, J. M. & Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1–4, p. 289-314.
- Moës, N., Dolbow, J., & Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, pp. 131-150.
- Oden, J. T., Duarte, C.A.; & Zienkiewicz, O. C., 1998. A new cloud-basedhp finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 153, pp. 117-126.
- Plews, J., Duarte, C. A., & Eason, T., 2012. An Improved Non-Intrusive Global-Local Approach for Sharp Thermal Gradients in a Standard FEA Platform, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, n. 4, pp. 426-449.
- Plews, J., & Duarte, C. A., 2015. Bridging Multiple Structural Scales with a Generalized Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n. 3-4, pp. 180-201.
- Reddy, J. N. , 2006. *An Introduction to the Finite Element Method* 3rd ed: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering. Inc., ISBN 0-07-246685-5.
- Soghrati, S., Aragón, A. M., Duarte, C.A., & Geubelle, P. H., 2012. An interface-enriched generalized FEM for problems with discontinuous gradient fields. *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 89, pp. 991-1008.
- Soghrati, S., Duarte, C. A., & Geubelle, P. H., 2015. An adaptive interface-enriched generalized FEM for the treatment of problems with curved interfaces. *International Journal for numerical method in engineering*, vol. 102, n. 6, pp. 1352-1370.
- Soghrati, S., & Geubelle, P. H., 2012. An 3D interface-enriched generalized finite element method for weakly discontinuous problems with complex internal geometries. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, n. 217-220, pp. 46-57.

Strouboulis, T., Babuška, I. & Copps, K., 2000. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 181, n. 1–3, p. 43-69.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Zhu, J. Z., 2005. *Finite Element Methods – Its Basic and Fundamentals* 6th ed. Elsevier, Inc., ISBN 0-7506-6320-0.