



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

MODELO BIDIMENSIONAL CONTÍNUO-DESCONTÍNUO DE FALHA PARA MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS

José Fabiano Araújo Moreira

Francisco Evangelista Junior

Jf_moreira1991@hotmail.com

fejr.unb@gmail.com

Universidade de Brasília

Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil, Prédio SG 12, primeiro andar
Campus Darcy Ribeiro, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, Distrito Federal, Brasil.

Resumo. *Esta pesquisa teve como objetivo formular e implementar um modelo de dano contínuo-descontínuo (com transição para fratura), por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados, capaz de prever falhas em estruturas de materiais quase-frágeis. A mais importante contribuição é a criação de um modelo capaz de simular numericamente a resistência de membros estruturais sob falhas de maneira eficiente, baseado em uma lei de evolução de dano que utiliza apenas parâmetros físicos, que podem ser obtidos por meio de ensaios de resistência e fratura, sem a necessidade de calibração adicional do modelo. A validação do mesmo se deu por intermédio da comparação com resultados experimentais retirados do ensaio de flexão em três pontos em viga com entalhe central. Os resultados obtidos comprovaram a eficiência e acurácia do modelo na previsão do comportamento de ruptura. O modelo consegue fornecer resultados com uma precisão equivalente à de outros modelos encontrados na literatura, porém utilizando um número bem reduzido de elementos na malha.*

Palavras Chave: *Mecânica do Dano Contínuo, Modelo de Zona Coesiva, Materiais quase-frágeis, Propagação de trincas, MEFG.*

1 INTRODUÇÃO

Em materiais quase-frágeis há uma zona de processo de fratura, *Fracture Process Zone* (FPZ), à frente da macrotrinca, cujo tamanho é grande em comparação com o tamanho da trinca e com o tamanho característico da estrutura. Esta FPZ é amplamente estudada na literatura pela Mecânica da Fratura e pela Mecânica do Contínuo. A Mecânica da Fratura lida com descontinuidades causadas pela formação e crescimento de uma macrotrinca. Uma idealização muito comum são os modelos de zona coesiva, *Cohesive Zone Models* (CZM), inicialmente introduzido por Barenblatt (1959) e Dugdale (1960), para abordar as singularidades de ponta de trinca. O CZM tem sido amplamente utilizado em análises de materiais e estruturas (Xu e Needleman, 1994; Bazant e Planas, 1998; Hanson e Ingraffea, 2002; Roesler *et al.*, 2007a; Evangelista Jr. *et al.*, 2013; Kim e Duarte, 2015). A Mecânica do Contínuo também tem sido usada para descrever o comportamento de dissipação de materiais induzido pela iniciação e desenvolvimento de microtrincas em torno de uma macrotrinca. Uma abordagem é a Mecânica do Dano Contínuo, *Continuum Damage Mechanics* (CDM), que considera estados variáveis relacionados com a direção do carregamento para descrever os processos irreversíveis, tais como o estado de danificação, endurecimento e amolecimento (Lemaitre e Chaboche, 1990).

Surge assim, uma ideia de uma descrição contínua-descontínua integrada de falha em que a degradação ocorra inicialmente na FPZ descrita pela CDM e, em seguida, se tenha o crescimento da descontinuidade descrito pela Mecânica da Fratura, quando o estado de dano atinge um valor limite a ser relatado para a localização da trinca discreta. Rots e Blaauwendraad (1989), Wells *et al.* (2002), Simone *et al.* (2003), de Borst *et al.* (2004) e Tejchman e Bobinski (2013) combinaram com sucesso abordagens contínuo-descontínua para modelar dano e propagação de trinca em domínios bidimensionais. Esses trabalhos fazem uso das vantagens de métodos desenvolvidos para a propagação de trinca que utilizam o Método da Partição da Unidade, como o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Esse método numérico têm a capacidade de simular arbitrariamente a propagação de trinca sem que a mesma ocorra em regiões pré-definidas ou ao longo das fronteiras dos elementos (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2001; Mariani e Perego, 2003; Kim e Duarte, 2015).

Este trabalho formulou e implementou um modelo de dano contínuo-descontínuo (com transição para fratura), utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados, para a predição de falhas em estruturas quase-frágeis. Sua principal contribuição é o desenvolvimento de um modelo capaz de simular a resistência de membros estruturais, baseado em uma lei de evolução de dano com parâmetros físicos obtidos em ensaios de resistência e fratura sem a necessidade de calibração adicional do modelo.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) surgiu a partir dos trabalhos de Babuška *et al.* (1994), Duarte e Oden (1995), Melenk e Babuška (1996), Duarte e Oden (1996), Babuška e Melenk (1997) e Oden *et al.* (1998). O mesmo se baseia no princípio da partição da unidade e consiste, basicamente, no enriquecimento das funções de forma tradicionais dos elementos finitos com outras funções ditas especiais que representam o comportamento local da solução. Esse enriquecimento gera graus de liberdade extras nos nós do domínio sujeitos ao enriquecimento.

Para o caso de descontinuidade, o campo de deslocamento para um elemento com graus de liberdade extras pode ser interpolado pela Eq. (1), com (\mathcal{H}_{S_d}) sendo a função Heaveside

centrada na descontinuidade, e o salto de deslocamento na descontinuidade S_d é dado pela Eq. (2).

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} + \mathcal{H}_{S_d}\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (1)$$

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{N}\mathbf{b}|_{S_d} \quad (2)$$

Para as relações constitutivas, as tensões para o domínio contínuo são expressas em termos dos deslocamentos nodais, Eq. (3); e as tensões na descontinuidade são expressas em termos dos deslocamentos nodais adicionais, Eq. (4):

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = (1 - D)\mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{a} + \mathcal{H}\mathbf{B}\mathbf{b}) \quad (3)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}[[\mathbf{u}]] = \mathbf{T}\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (4)$$

em que D representa o dano no ponto de Gauss do elemento, \mathbf{C} é a relação entre as tensões e as deformações e \mathbf{T} é a relação entre as tensões e os deslocamentos na descontinuidade.

Em modelos de zona coesiva, a relação $\mathbf{T}[[\mathbf{u}]]$ é descrita por um modelo constitutivo expresso em uma curva de tensão-abertura de trinca que permite a simulação da zona de processo aplicando tensões normal ao plano de abertura dependentes do valor de abertura da trinca. No modelo proposto, esta relação é considerada nula, o que permitiria a descontinuidade ao elemento finito sem a necessidade de uma relação constitutiva que relacione tensões e abertura de fissura. Neste caso a zona de processo é modelada pela evolução da não linearidade devido à danificação do material pelo modelo de dano, de modo que, quando este atinge um valor crítico (D_{crit}), a descontinuidade é inserida no elemento por meio das funções de enriquecimento pertinentes.

3 FORMULAÇÃO DO MODELO

O modelo de dano proposto é aplicado aos materiais quase-frágeis. As hipóteses fundamentais, que definem a capacidade e as limitações do modelo, consideram que o material em processo evolutivo de dano é considerado um meio elástico e não são consideradas deformações plásticas nem deformações inelásticas; o dano no material é causado por extensões ao longo das direções principais de tensão; e o dano é representado por uma variável escalar $D(0 \leq D \leq 1)$, portanto, uma condição de dano isotrópico é assumido para o material.

3.1 Variável de controle e critério de início

O dano é controlado por uma variável de estado que está relacionada com o tensor de deformações por meio de uma deformação equivalente (ε_{eq}). A ε_{eq} apresentada por Mazars (1984) é sugerida pela literatura como uma medida simples e eficiente (Mazars, 1984; Mazars e Pijaudier-Cabot, 1989; Schlangen, 1993; Geers, 1997; Simone, 2003; Proença e Torres, 2008; Hofstetter e Meschke, 2011):

$$\varepsilon_{eq}^{MA} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 ((\varepsilon_i)_+)^2} \quad (5)$$

com $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = (\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)/2$ e ε_i a deformação principal na direção i .

3.2 Lei de evolução

O modelo proposto estabelece que a energia específica (Φ_F) pode ser relacionada com a energia de fratura (G_F) por meio de um comprimento característico (Oliver, 1989). Seguindo essa equivalência, a relação ($\sigma - \varepsilon$) para a curva de amolecimento para o modelo de dano proposto é relacionada com uma região de largura finita, isto é, com um comprimento característico (l_c). A variável de dano escalar para o material em tração é formulada baseada numa lei de fratura coesiva em modo I, ou seja, $D(\sigma - w) = D(\sigma - \varepsilon_{eq})$ com $w = \varepsilon_{eq} l_c$. Uma lei de dano para a região de amolecimento (*softening*) em tração pura pode ser descrita através de uma curva bilinear de amolecimento para materiais quase-frágeis cimentícios convencionais, aqui denominados como PCC (Roesler *et al.*, 2007a). A zona de processo de fratura é descrita por uma relação tensão-deslocamento de amolecimento ($\sigma-w$) e a lei de dano para o amolecimento é formulada por meio da equação bilinear mostrada na Eq. (6).

$$D_{PCC} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{d0}} \right] & \text{se } \varepsilon_{d0} \leq \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_{k1} \\ 1 - \frac{\Psi \varepsilon_{d0}}{\varepsilon_{eq}} \left[\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{eq}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_{k1}} \right] & \text{se } \varepsilon_{k1} < \varepsilon_{eq} \leq \varepsilon_2 \\ 1 & \text{se } \varepsilon_{eq} > \varepsilon_2 \end{cases} \quad (6)$$

Os parâmetros ε_1 , ε_2 , ε_{k1} , e Ψ que definem a lei de dano são baseados em propriedades do material advindas de ensaios de fratura e resistência medidos em laboratório, essas propriedades são G_f , G_F , $CTOD_c$ e f_t , conforme definidos em Bazant (2002), Roesler *et al.* (2007a,b), Park *et al.* (2009) e Evangelista Jr. *et al.* (2013).

3.3 Regularização

É importante notar a equivalência assumida para a dissipação da energia de fratura ao longo de um comprimento característico (l_c). Entretanto, em um contexto de análise em elementos finitos, a malha pode apresentar elementos menores ou maiores do que o comprimento característico. Portanto, o procedimento de regularização deve ser estabelecido a fim de adaptar a energia de fratura do comprimento característico para o tamanho dos elementos da malha. Isto pode ser feito considerando que o (l_c) seja igual ao tamanho típico do elemento da malha de elementos finitos (h_e), conforme a Eq. (7):

$$l_c = h_e = \sqrt[2]{A^e} \quad (7)$$

em que $\sqrt[2]{A^e}$ é a área e do elemento finito.

4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

No processo de propagação, quando um elemento da malha de elementos finitos é cortado por uma trinca, os nós desse elemento são enriquecidos. No entanto, como existe a condição de que o salto de deslocamento na ponta da trinca seja zero, os nós pertencentes ao elemento localizado a frente dessa ponta não são enriquecidos, mesmo que estes nós pertençam a outros

elementos que estejam atravessados pela descontinuidade. Essa estratégia foi adotada com sucesso no trabalho de Wells e Sluys (2001).

O critério de propagação é baseado no valor do dano nos pontos de integração do elemento que se encontra a frente da ponta da trinca, de modo que, ao final de um incremento de deslocamento, uma descontinuidade é inserida quando o valor do dano em qualquer ponto for maior que D_{crit} . A descontinuidade é introduzida como uma linha reta dentro do elemento. Além disso, ao final de um incremento convergido é possível que a descontinuidade se propague por mais de um elemento.

A direção de propagação (r_{S_d}) é calculada através da Eq. (8) a seguir:

$$r_{S_d} = \sum_{i \in S} D_i w_i \frac{r_i}{\|r_i\|} \quad (8)$$

em que S é o conjunto de pontos de integração i pertencentes ao elemento cuja face contenha a ponta da trinca ou aos elementos que compartilham ao menos uma conectividade com o elemento tocado pela ponta da trinca, D_i é o valor do dano no ponto de integração i , r_i é o vetor na direção do ponto de integração i e w_i é um peso associado ao ponto de integração i (Wells e Sluys, 2001; Simone *et al.*, 2003).

No sistema de equações discretizado do MEEG, a integração de alguns termos da matriz de rigidez e do vetor de forças ocorre apenas sobre uma parte do domínio do elemento. É necessário então um esquema especial de integração para garantir que as funções de forma permaneçam linearmente independente. Nos trabalhos de Moës *et al.* (1999) e Wells e Sluys (2001) propõe-se que os elementos que são atravessados pela descontinuidade tenham seus domínios divididos em subdomínios. Em cada subdomínio é aplicado a quadratura de Gauss pertencente ao elemento adotado.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Roesler *et al.* (2007a) realizaram ensaios de flexão em três pontos, *Three Point Bending* (TPB), em vigas de concreto em pequena escala. A Fig. 1 mostra a geometria do ensaio realizado. Os dados geométricos de uma das vigas ensaiadas são: $H = 150\text{mm}$, $S = 600\text{mm}$, $L = 700\text{mm}$ e $a_0 = 50\text{mm}$. Gaedicke e Roesler (2010), por sua vez, realizaram simulações numéricas 2D para as mesmas vigas de Roesler *et al.* (2007a). O resultado numérico de Gaedicke e Roesler (2010) e experimentais de Roesler *et al.* (2007a) são comparados com o resultado obtido com o modelo de dano proposto.

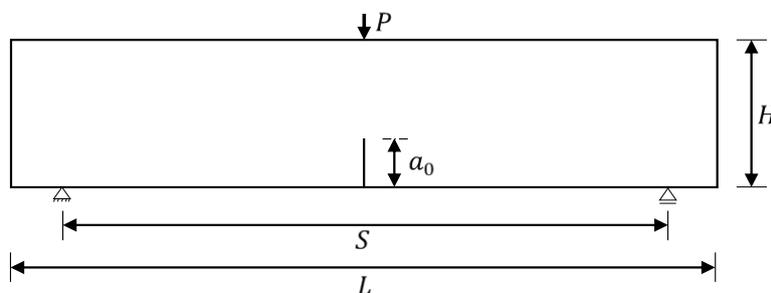


Figura 1: Geometria e condições de contorno do ensaio de flexão em três pontos (espessura = 80mm).

Os parâmetros de fratura adotados são os mesmos utilizados por Gaedicke e Roesler (2010) em suas simulações, seus valores são: $G_F = 164,0\text{N/m}$, $G_f = 56,7\text{N/m}$ e $\Psi = 0,25$. Os

parâmetros relativos ao material são: $E = 32\text{GPa}$, $\nu = 0,20$, $f_c = 58,3\text{MPa}$ e $f_t = 4,15\text{MPa}$. As simulação são feitas considerando o estado plano de tensões e o controle do ensaio é realizado por meio de incrementos de deslocamentos no ponto de aplicação da força (P). Como critério de propagação da trinca, considerou-se $D_{crit} = 0,999$. A malha de elementos finitos utilizada é mostrada na Fig. 2, a largura do entalhe adotado foi de dois milímetros.

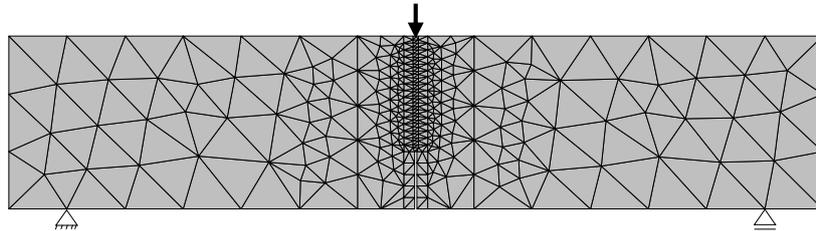


Figura 2: Malha de elementos finitos utilizada com 581 elementos.

A Fig. 3 apresenta os resultados experimentais e numéricos das curvas relativas à força aplicada em função do deslocamento de abertura de ponta de trinca, *Crack Mouth Opening Displacement* (CMOD). Os resultados mostram que o modelo foi capaz de estimar com muito boa precisão a carga máxima (P_{max}) resistida pela viga. É importante notar que o modelo proposto conseguiu praticamente a mesma acurácia que o modelo descontínuo usando zona coesiva em elementos de interface de Gaedicke e Roesler (2010), mas com um número bem reduzido de elementos (581 contra 6285). Analisando a região de *softening* da curva P -CMOD, observa-se uma diminuição da capacidade de carga em amolecimento da viga, isto ocorre porque, além de haver a penalização das propriedades mecânicas do material devido ao modelo de dano, o elemento tem deslocamentos descontínuos diretamente devido a presença da trinca pelo MEFG.

Um passo importante que vai além da simples comparação das curvas P -CMOD é a análise do estado de tensão e a distribuição do dano ao longo da linha de fratura com o intuito de verificar se as tensões ultrapassam o valor da resistência à tração do material e visualizar como se processa a zona de fratura. Assim, são realizadas análises onde são plotadas as tensões principais e o dano nos pontos de Gauss dos elementos localizados na seção central da viga, compreendida entre a ponta do entalhe e o ponto de aplicação da carga. Os pontos de interesse escolhidos em função de P_{max} nas simulações são localizados em A (75% de P_{max} na zona ascendente), B (100% de P_{max}), C (Início da propagação da trinca na zona descendente), D (50% de P_{max} na zona descendente) e E (25% de P_{max} na zona descendente). A localização dos desses pontos de interesse pode ser vista na Fig. 3.

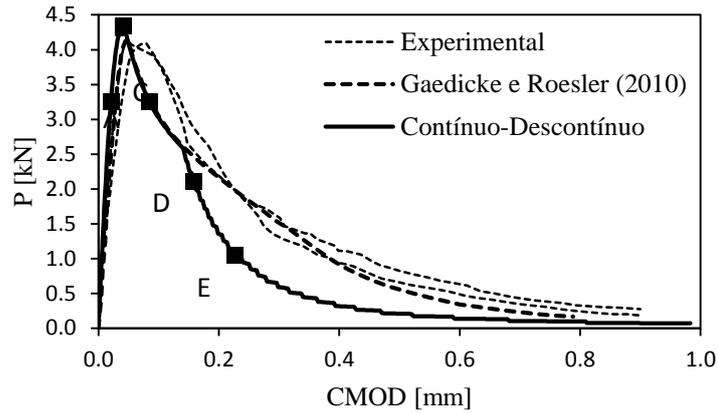


Figura 3: Comparação das curvas P - $CMOD$ experimentais e numérica de Gaedicke e Roesler (2010) com o resultado obtido.

O estado de tensão é mostrado na Figura 4. Os valores positivos e negativos no eixo x representam, respectivamente, tensões de tração e compressão enquanto que o eixo y representa a posição começando da ponta do entalhe (50 mm) até o topo da viga (150 mm). Conforme o esperado, o gráfico mostra que as tensões nos pontos de Gauss em todos os elementos apresentam valores menores ou que ficam em torno da resistência à tração do material ($f_t = 4,15\text{MPa}$).

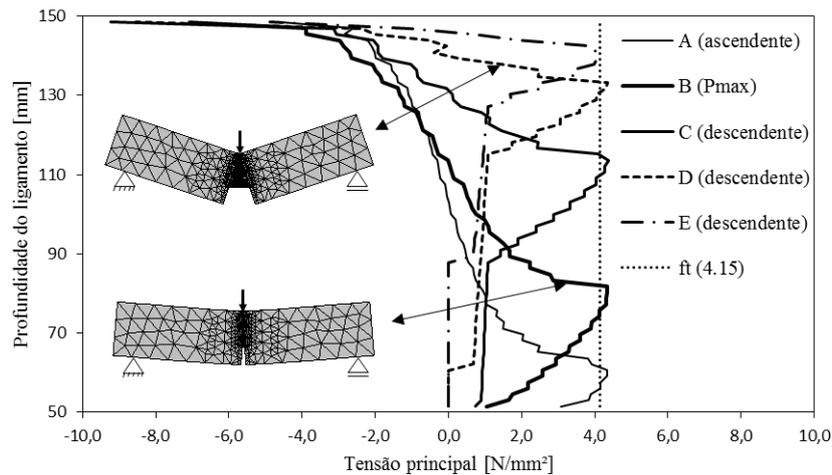


Figura 4: Distribuição de tensão no ligamento da viga.

A zona de processo de dano/fratura pode ter seu valor estimado plotando a distribuição de dano em função da profundidade do ligamento localizado na linha de fratura, como mostra a Fig 5. Nessa figura, observa-se que na zona ascendente ($0,75P_{max}$) existe dano próximo ao entalhe que alcança uma altura de 11 mm medidos a partir de sua ponta. A zona de processo de fratura atinge seu valor máximo em P_{max} com um tamanho de 32 mm , em seguida diminui para 27 mm no momento que a trinca começa a propagar e depois diminui para 16 mm e 13 mm , respectivamente, em ($0,50P_{max}$) e ($0,25P_{max}$) na zona descendente.

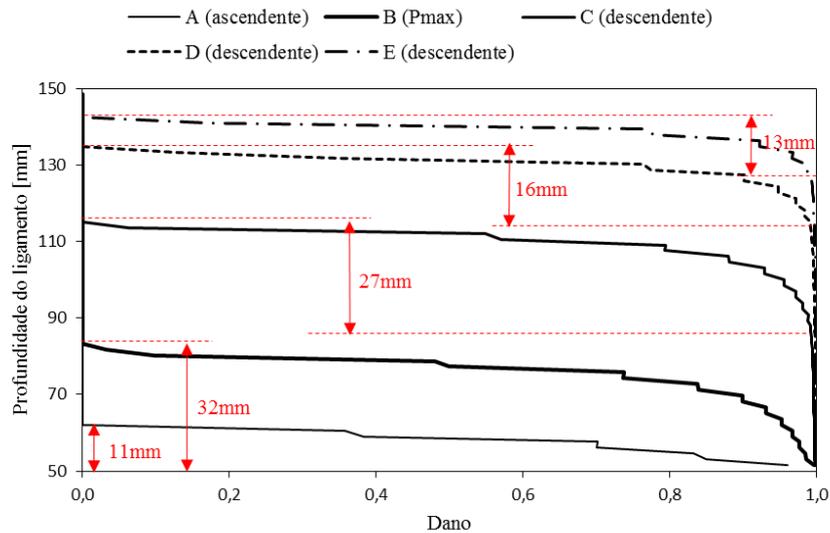


Figura 5: Distribuição de dano no ligamento da viga.

A Fig. 6 mostra a evolução do dano na malha de elementos finitos. Percebe-se que os elementos com maior valor de dano são aqueles localizados na zona central da viga e que os demais elementos praticamente não danificam. Essa característica está relacionada com a deformação equivalente que leva em conta apenas as deformações principais de tração, que serão maiores justamente nessa região.

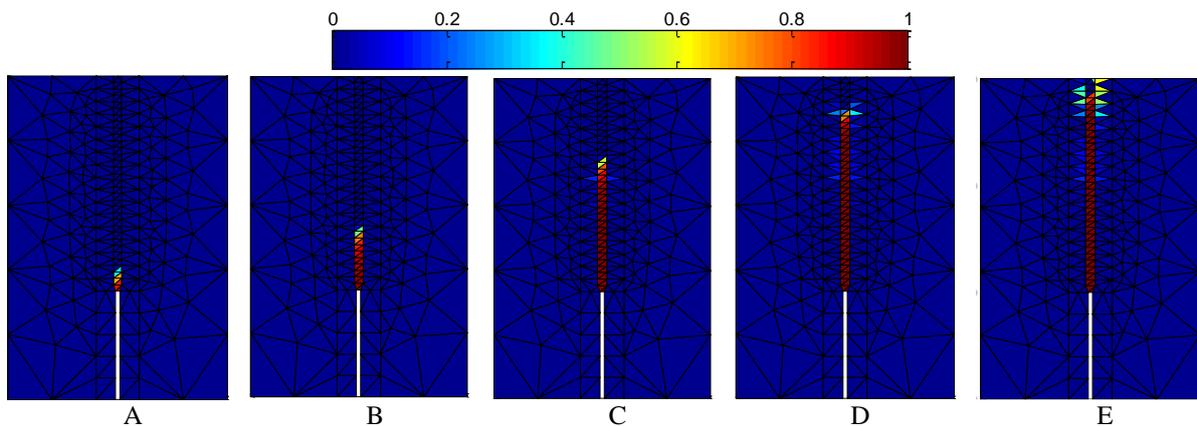


Figura 6 – Evolução de dano na malha de elementos finitos.

O caminho que a trinca percorre é mostrado na Fig 7 para os instantes C, D, E e ao final da simulação.

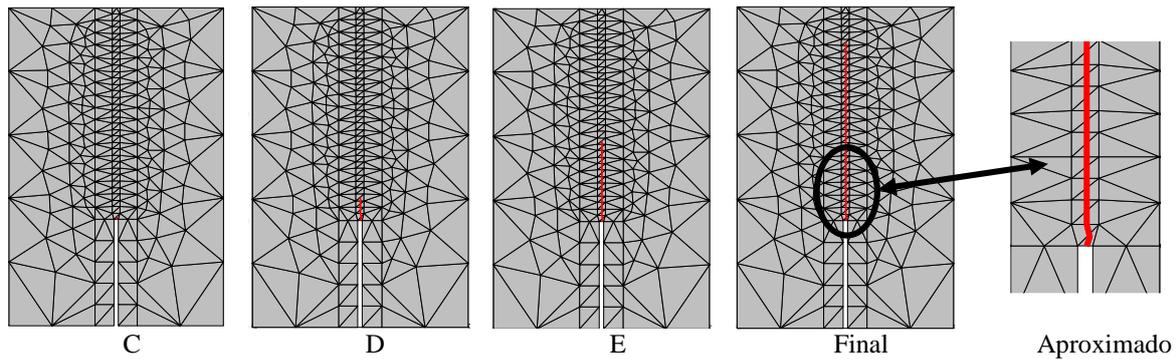


Figura 7: Propagação da trinca.

6 CONCLUSÕES

Esta pesquisa formulou e implementou um modelo de dano contínuo-descontínuo para a predição de falhas em estruturas de materiais quase-frágeis. O modelo foi validado através da comparação com resultados experimentais retirados do ensaio de flexão em três pontos em vigas com entalhe central. Os resultados obtidos comprovam a eficiência e acurácia do modelo em prever o comportamento de ruptura. Na simulação numérica realizada, o modelo de dano proposto foi capaz de reproduzir/predizer, com muito boa precisão, a carga máxima (P_{\max}) e o comportamento de amolecimento (*softening*) observado nos ensaios experimentais. O modelo consegue obter praticamente a mesma acurácia de resultados que outros modelos encontrados na literatura, mesmo com um número bem reduzido de elementos na malha. Além disso, o mesmo utiliza apenas propriedades de ensaios de pequena escala comumente realizados em laboratório, sem necessidade de nenhuma calibração de propriedades dos materiais e/ou de simulações computacionais.

A estratégia contínua-descontínua com o emprego do GFEM demonstrou eficiência e acurácia na estimativa do caminho da trinca, com a propagação independente da malha de elementos finitos. Esta estratégia também confirmou a observação da literatura em que a previsão do comportamento de amolecimento predito por estes modelos resulta em uma diminuição da capacidade de carga na região de amolecimento pela presença da descontinuidade nos elementos finitos.

AGREDECIMENTOS

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- Babuška, I.; Caloz, G.; Osborn, J. E. Special finite element method for a class second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 945 – 981, 1994.
- Babuška, I.; Melenk, J. M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727-758, 1997.
- Barenblatt, G. I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses, axially symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 23, pp. 622- 636, 1959.

- Bazant, Z. P. Concrete fracture models: testing and practice. *Engineering Fracture Mechanics*, 29:165-205, 2002.
- Bazant, Z. P.; Planas, J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other *Quasi*-brittle Materials. *CRC Press*, 1998.
- Belytschko, T.; Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, No. 5, pp. 601–620, 1999.
- Duarte, C. A.; Hamzeh, O. N.; Liszka, T. J.; Tworzydło, W.W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 15-17, p. 2227–2262, 2001.
- Duarte, C. A.; Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1–4, p. 237-262, 1996.
- Duarte, C. A.; Oden, J. T. Hp clouds – a meshless method to solve boundary value problem. Technical Report 9505, TICAM, *University of Texas at Austin*, May 1995.
- Dugdale, D. S. Yield of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics and Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- de Borst R.; Remmers, J. J. C.; Needleman, A.; Abellan, M-A. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(7–8):583–607, 2004.
- Evangelista Jr., F.; Roesler, J. R.; Proença, S. P. B. Three-dimensional cohesive zone model for fracture of cementitious materials based on the thermodynamics of irreversible processes. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 97, p. 261-280, 2013.
- Geers, M. G. D. Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture. PhD thesis, *Eindhoven University of Technology*, 1997.
- Hanson, J. H.; Ingraffea, A. R. Using Numerical Simulations to Determine the Accuracy of the Size - Effect and Two-Parameter Data Reduction Methods for Fracture Toughness Tests of Concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 70, pp. 1015-1027, 2002.
- Hofstetter G.; Meschke G. Numerical modeling of concrete cracking. *International Centre for Mechanical Sciences*. vol. 532. Springer Wien New York, 2011. ISBN:987-3-7091-0896-3 [chapter 1].
- Kim, J.; Duarte, C. A. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 104, No. 13, pp. 1139-1172, 2015.
- Lemaitre, J.; Chaboche, J. L. Mechanics of solid materials. *Cambridge University Press*, 1990.
- Mariani, S, Perego U. Extended finite element method for *quasi*-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(1):103–26, 2003.
- Mazars, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire e à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, *Université de Paris VI*, 1984.
- Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G. Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:345.365, 1989.

- Melenk, J. M.; Babuska, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.
- Moës N.; Dolbow J.; Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131-150, 1999.
- Oden, J. T.; Duarte, C. A.; Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 153, n. 1-2, p. 117-126, 1998.
- Oliver, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol.28, n. 2, p.461-474, 1989.
- Park, K.; Paulino, G. H.; Roesler, J. R. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 57, n. 6, p. 891-908, 2009.
- Proença, S. P. B.; Torres, I. Generalized Finite Element method for Nonlinear Three dimensional Analysis of Solids. *International Journal of Computational Methods*, v. 5, p. 37-62, 2008.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Park, K.; Gaedicke, C. Concrete Fracture Prediction Using Bilinear Softening. *Cement and Concrete Composites*, Vol. 29, No. 4, pp. 300-312, 2007a.
- Roesler, J. R.; Paulino, G. H.; Gaedicke, C.; Bordelon, A.; Park, K. Fracture behavior of functionally graded concrete materials for rigid pavements. *Transp Res Rec*, 2037:40–50, 2007b.
- Rots, J. G.; Blaauwendraad, J. Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multidirectional or rotating? *HERON*, 34(1):3–59, 1989.
- Schlangen E. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, 1993.
- Simone, A. Continuous discontinuous modeling of failure. Ph.D. thesis. *University of Delft, The Netherlands*, 2003.
- Simone, A.; Wells, G. N.; Sluys, L. J. From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, p. 4581 –4607, 2003.
- Tejchman, J.; Bobinski, J. Continuous and discontinuous modelling of fracture in concrete using FEM. *Springer series in geomechanics and geoengineering*. Berlin: Springer; 2013, DOI 10.1007/978-3-642-28463-2.
- Wells, G. N.; Sluys, L. J. A new method for modeling cohesive cracks using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50: 2667-2682, 2001.
- Wells, G. N.; Sluys, L. J.; De Borst, R. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularised strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(5):1235–1256, 2002.
- Xu, X. P.; Needleman, A. Numerical Simulations of Fast Crack Growth in Brittle Solids. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 42, No. 9, pp. 1397–1434, 1994.