



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

Métodos da Partição da Unidade na Análise Não Linear de Estruturas

Débora Coelho Cordeiro Pinheiro

Felício Bruzzi Barros

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Samuel Silva Penna

deboracordeiro@ufmg.br

felicio@dees.ufmg.br

roque@dees.ufmg.br

spenna@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas - Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4o andar, sala 4215, Pampulha, CEP 31270-901, MG, Belo Horizonte, Brazil

Abstract. *A Partição da Unidade (PU) pode ser obtida de diferentes maneiras. Ela pode ser baseada em malha, construída a partir do Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) ou do Moving Least Squares (MLS). A PU pode também ser construída a partir de funções de Shepard, um caso particular das funções obtidas através do MLS. Nos métodos da Partição da Unidade, as funções de forma são construídas pelo produto da PU com funções de enriquecimento especialmente escolhidas. As funções de enriquecimento podem ser polinomiais, para aumentar a consistência da solução, não polinomiais, para modelar singularidades tais como fissuras, vazios, heterogeneidades, ou até mesmo numéricas. A propriedade da PU garante que combinações lineares das funções de forma pode representar qualquer uma das funções de enriquecimento empregadas. A performance dos métodos da PU é avaliada em um exemplo numérico de análise fisicamente não linear na plataforma INSANE (Interactive Structural Analysis Environment).*

Keywords: *Partição da Unidade, hp-Clouds, GFEM, EFG, Análise não linear*

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente empregado na mecânica computacional e diversos estudos tem sido feitos para melhorar seu desempenho. Neste contexto, a busca por novos métodos numéricos surge da necessidade de representar fenômenos que não são descritos satisfatoriamente pelo MEF convencional (Alves, 2012). Surge então um novo grupo de métodos numéricos categorizado como Métodos sem Malha (MM). Segundo a definição encontrada em Duarte (1995), classificam-se como Método Sem Malha aqueles onde as equações que governam o modelo discreto de um problema de valor de contorno não dependem da existência de uma malha bem definida. No MEF, a aproximação da solução é obtida a partir de interpolações locais em cada elemento. Desta forma, a continuidade da aproximação é garantida pela conectividade pré estabelecida entre os nós. Nos MM, a aproximação é construída em cada posição do domínio global e seu carácter local é mantido com a definição de domínios de influência (ou nuvens) de cada ponto (Barros, 2002).

Nos Métodos da Partição da Unidade (*Generalized/Extended Finite Element Method - G/XFEM, Partition of Unity Finite Element Method - PUFEM, Partition of Unity Method - PUM, hp-Clouds*) a aproximação é construída com base em funções de Partição da Unidade (PU) enriquecidas pela sua multiplicação por funções especialmente escolhidas para o tipo de solução a ser descrita. O emprego de uma base extrínseca adicional tem por objetivo o aumento da ordem de consistência da aproximação ou melhora da aproximação com base na inclusão de funções que contemplem aspectos da solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) conhecidos *a priori* (Fries and Matthias, 2004). O enriquecimento extrínseco é uma das principais vantagens dos métodos ditos da Partição da Unidade. A eficácia de métodos com PU está ligada a escolha apropriada das funções de enriquecimento (Duarte and Kim, 2008). Funções de enriquecimento adequadas podem ser usadas para modelar fissuras, singularidades, inclusões, vazios, entre outras particularidades.

O G/XFEM é considerado uma ponte entre os Métodos sem Malha e o MEF por estrategicamente utilizar as funções de forma do MEF como PU e enriquecê-las à maneira do *hp-Clouds*. Desta forma, contorna-se os principais problemas inerentes aos Métodos sem Malha, a imposição de condições de contorno e a integração numérica custosa, e ao mesmo tempo, aproveita-se avanços dos Métodos sem Malha como o enriquecimento. Ao substituir a PU polinomial do GFEM por uma PU de elevada regularidade, Duarte et al. (2006) conseguiu associar ao GFEM mais uma característica dos MM, sua alta regularidade. Por meio do método proposto, as funções de PU do GFEM são construídas com base na mesma estratégia do *hp-Clouds*.

Neste trabalho, a performance de métodos da PU é estudada por meio de um exemplo numérico de análise fisicamente não linear em Estado Plano de Tensões (EPT). Nos modelos estudados, varia-se a PU (polinomial ou racional de alta regularidade) e o grau do enriquecimento extrínseco empregado. Desta forma, é avaliada a influência de parâmetros como a regularidade e o grau do enriquecimento na descrição da trajetória de equilíbrio. A plataforma INSANE (*Interactive Structural Analysis Environment*) é empregada.

O INSANE é um projeto de *software* livre em desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais que torna disponível um ambiente computacional de código aberto, com características tais que facilitem sua expansão e manutenção. Este trabalho apoia-se sobre implementações já realizadas no INSANE em trabalhos anteriores. O *framework* de modelos constitutivos inicialmente proposto por Penna (2011)

será empregado. Salientam-se os trabalhos de Alves (2012) e Monteiro et al. (2014), no que diz respeito as implementações do GFEM para análise linear e fisicamente não linear, respectivamente. São também relevantes os seguintes trabalhos: Silva (2012), que incluiu a análise linear e fisicamente não linear via Método *Element Free Galerkin* (EFG); Pereira (2015), que implementou o *hp-Clouds* para análise linear; Pinheiro et al. (2015), que incluiu a Partição da Unidade de elevada regularidade; e Pinheiro (2016), que possibilitou a análise não linear via método *hp-Clouds*.

2 MÉTODOS SEM MALHA E MÉTODOS DOS ELEMENTOS FINITOS NÃO CONVENCIONAIS

Esta seção será dedicada aos Métodos sem malha e aos Métodos dos Elementos Finitos Não Convencionais. Optou-se, neste trabalho, por interpretar estes métodos a partir do conceito da Partição da Unidade, PU, particularizando-os quanto à maneira que esta é construída e quanto às características das aproximação geradas em cada estratégia. A Fig. 1, adaptada de Fries and Matthias (2004), apresenta esta interpretação. O enriquecimento unicamente intrínseco pode ser observado em métodos como *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), *Difuse Element Method* (DEM), *Element Free Galerkin* (EFG), *Finite Point Method* (FPM), *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM). Os métodos *hp-Clouds*, X/GFEM, PUFEM e PUM, por sua vez, têm a aproximação enriquecida de forma intrínseca e extrínseca.

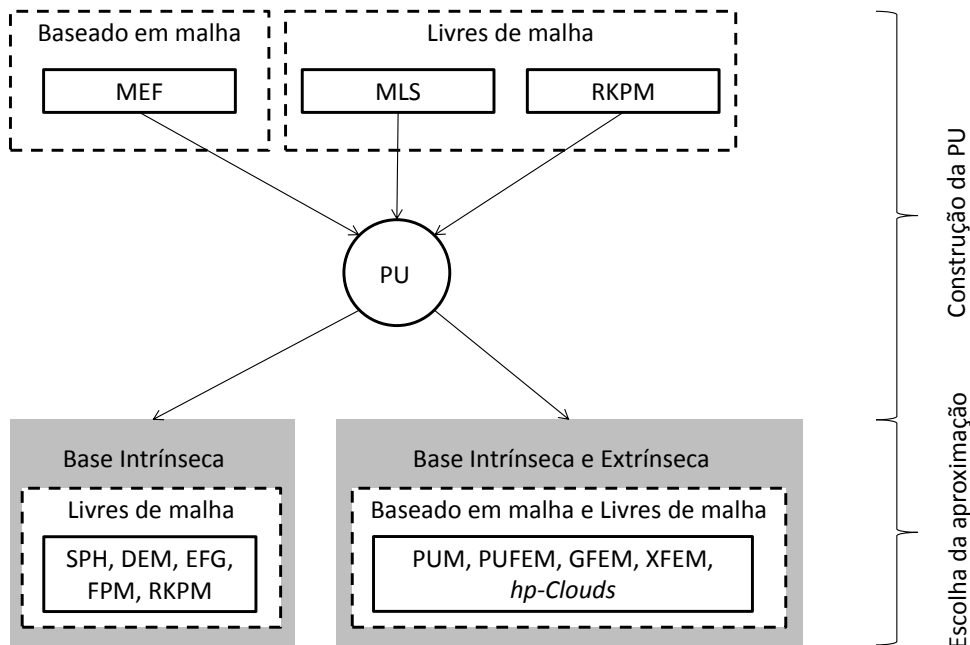


Figura 1: Classificação dos Métodos (Adaptado de Fries and Matthias (2004))

2.1 Definição da Partição da Unidade

De acordo com Oden and Reddy (1976), uma classe de funções $\phi_j(\mathbf{x})$ em um domínio Ω em \mathbb{R}^n , cuja envoltória é formada pela união dos conjuntos abertos $\{G_j\}_{j=1}^N$, forma uma partição da unidade se apresentar as seguintes propriedades:

1. $\phi_j(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(G_j)$
2. $\sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) = 1$
3. $\phi_j(\mathbf{x}) \geq 0$ em Ω ;
4. Todo sub-conjunto compacto de Ω intercepta um número finito de suportes de $\phi_j(\mathbf{x})$.

2.2 Construção da Partição da Unidade

Diversas possíveis maneiras de construir-se a Partição da Unidade são apresentadas em Fries and Matthias (2004). Algumas destas formas de construção da PU são a obtenção a partir das funções Lagrangianas definidas em uma malha de elementos finitos, ou de forma independente da malha como no caso das aproximações pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares* (MLS)) como no EFG, DEM e *hp-Clouds*. Nesta seção, devido ao interesse para este trabalho, são apresentadas as construções baseadas em malhas e aquelas oriundas do MLS. As funções de Shepard são apresentadas como uma particularização do MLS. No PUFEM a PU é construída pelo MLS ou com base na malha de elementos. Já no *hp-Clouds*, a PU pode ser obtida pelo MLS ou, de forma mais expedita, pela utilização das funções de Shepard. No G/XFEM é empregada uma construção baseada na malha de elementos onde são utilizadas as funções lagrangianas do MEF.

Construção da PU baseada em malhas

Conforme Fries and Matthias (2004), a construção de uma PU baseada em malha de elementos, com base nas funções interpoladoras de Lagrange, leva as conhecidas funções de forma utilizadas no MEF convencional. Neste tipo de construção, as funções da PU são geralmente polinomiais e possuem a propriedade do delta de Kronecker.

Construção da PU pelo Método dos Mínimos Quadrados Móveis (*Moving Least Squares* - MLS)

O Método dos Mínimos Quadrados Móveis ou *Moving Least Squares* (MLS) é um método de aproximação numérica introduzido por Lancaster and Salkauskas (1981). Trata-se de uma variação do Método dos Mínimos Quadrados. A diferença básica entre os dois métodos é o emprego, no MLS, de uma função de ponderação que acompanha o ponto onde se deseja definir a aproximação. Uma importante característica das funções obtidas por essa técnica é o fato de constituírem uma Partição da Unidade (Barros, 2002). Além disso, a função aproximadora é contínua e suave no domínio do problema e pode-se produzir uma aproximação com a ordem desejada (Silva, 2012).

Em cada posição \mathbf{x} do domínio, uma aproximação local $\tilde{u}(\mathbf{x})$ deve ser definida empregando-se um sub-conjunto de $n(\mathbf{x}) \leq N$ pontos vizinhos. O sub-conjunto $n(\mathbf{x})$ corresponde aos nós pertencentes ao domínio de suporte de \mathbf{x} . A aproximação local $\tilde{u}(\mathbf{x})$, para cada posição \mathbf{x} do domínio, pode ser expressa na forma de uma combinação linear de uma base de funções

$$\mathbf{P} = \{p_i\}_{i=1}^m, (m \leq n(\mathbf{x})), \quad (1)$$

segundo os parâmetros α_i :

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Emprega-se geralmente uma base de monômios P_k capaz de gerar um espaço de polinômios completos até o grau k .

Seja W_j uma função peso de suporte compacto, ou seja, $W_j \in C_0^l(\omega_j)$, onde l representa a continuidade de W_j , ω_j a nuvem do nó \mathbf{x}_j que coincide com a região em que a função peso é definida e o zero indica que a função e suas derivadas até a ordem l têm valor não-nulo apenas no interior de ω_j . A função W_j limita a região sobre a qual o nó \mathbf{x}_j contribui para a construção da aproximação e permite que os nós mais próximos de \mathbf{x}_j influenciem mais do que os distantes do ponto de interesse.

A nuvem do ponto \mathbf{x}_j é limitada por uma medida de referência R_j , no caso de domínios circulares ou esféricos, responsável pelo caráter local da aproximação e representada por $\omega_j = \{\mathbf{x} \in \Omega; \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\| \leq R_j\}$. Quanto maior R_j , maior o número de pontos nodais cujos valores de u_j contribuem para se construir a aproximação (Fig. 2).

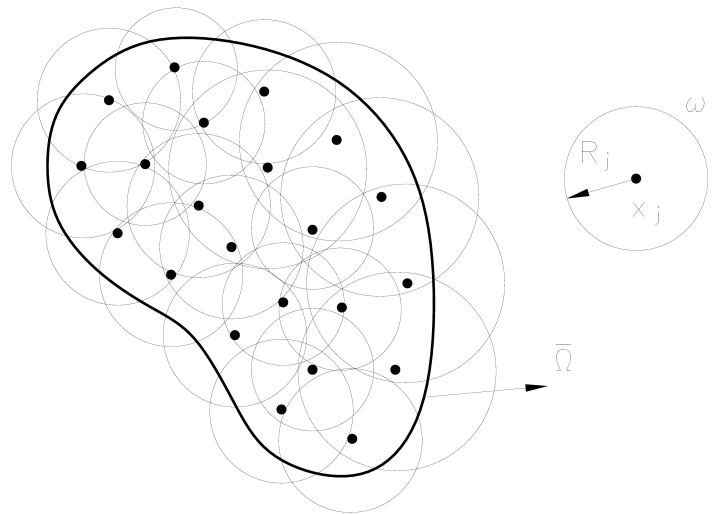


Figura 2: Representação das nuvens em \mathbb{R}^2 (Barros, 2002)

A função $J(\mathbf{x})$, definida a seguir, é composta pelas distâncias entre $\tilde{u}(\mathbf{x})$ e $u(\mathbf{x})$, ponderadas pelas funções W_j . No MLS, minimiza-se a função $J(\mathbf{x})$ para encontrar os coeficientes $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$.

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \{u_j - \tilde{u}(\mathbf{x}_j)\}^2 \quad (3)$$

Participam da soma acima somente os $n(\mathbf{x})$ pontos nodais \mathbf{x}_j cuja região de influência ω_j contenha \mathbf{x} . Os coeficientes $\alpha(\mathbf{x})$ são determinados por:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) u_j \quad (4)$$

onde:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \mathbf{p}(\mathbf{x}_r) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_r) \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \mathbf{p}(\mathbf{x}_j) \quad (6)$$

Sendo assim, reescreve-se a aproximação da Eq. (2):

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \phi_j(\mathbf{x}) u_j = \Phi^T \mathbf{U} \quad (7)$$

sendo ϕ_j um elemento genérico da base de funções de aproximação, com o mesmo suporte ω_j das funções peso e definido por:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) \quad (8)$$

Definem-se os seguintes vetores de parâmetros nodais e de funções de forma:

$$\mathbf{U}^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Phi^T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_N \end{bmatrix} \quad (10)$$

A existência da inversa de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ depende da conveniente definição dos R_j de modo que respeite a condição $n(\mathbf{x}) \geq m$, ou seja, o número de pontos cujo domínio de influência contém a posição \mathbf{x} deve ser maior do que o número de funções contidas na base \mathbf{P} . Tal condição é necessária mas não suficiente (Duarte, 1996), já que mesmo que esta condição seja respeitada, a distribuição de pontos pode ser tal que produza uma matriz \mathbf{A} singular.

A forma e o tipo das funções de ponderação W_j têm grande influência na construção da aproximação, sendo diretamente responsáveis, em combinação com a base \mathbf{P} , pela sua continuidade.

Funções de Shepard

Para uma base de funções $P = \{1\}$, é possível obter-se uma classe de funções denominadas de funções de Shepard. Tais funções foram desenvolvidas por Shepard (1968) e são anteriores ao advento do MLS. A PU construída a partir dessas funções é definida por:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) / \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \quad (11)$$

onde W_j é a função peso. A função W_j possui suporte compacto, isto é, apresenta valores diferentes de zero somente para pontos da nuvem ω_j .

É possível verificar que:

$$\sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \left\{ \frac{W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{\sum_{r=1}^{n(\mathbf{x})} W_r(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)} \right\} = 1 \quad (12)$$

o que garante que ϕ_j constitui uma PU. Os demais critérios que caracterizam uma PU também são atendidos pelas funções obtidas com o MLS e, em particular, com as funções de Shepard, a depender da continuidade das funções W_j , como discutido a seguir.

2.3 Regularidade da Aproximação

As funções de forma dos MM podem ser construídas de tal maneira que se obtenha qualquer ordem de continuidade desejada (Fries and Matthias, 2004). No caso das Partições da Unidade definidas pelo MLS, Eq. (8), ou pelas funções de Shepard, Eq. (11), a PU herda das funções peso sua característica de suporte compacto. Além disso, a regularidade de ϕ_j depende da base de funções P e da regularidade das funções peso (Belytschko et al., 1994).

Segundo Silva (2012), nos Métodos sem Malha, o uso das funções peso permite que os nós dentro do domínio de suporte que estejam mais próximos do ponto de interesse contribuam mais do que os pontos mais distantes. Além disso, para funções peso suaves e contínuas, a função aproximadora resultante é compatível, uma vez que os nós entram e saem do domínio gradualmente. Vários tipos de função peso são comumente empregadas na construção da PU dos métodos que utilizam o MLS ou as funções de Shepard. Exemplos dessas funções são as *spline* de segunda, terceira e quarta ordens, diversos tipos de funções exponenciais, a função gaussiana, entre outras.

Com o objetivo de aproveitar características vantajosas dos Métodos sem Malha e ao mesmo tempo contornar alguns inconvenientes como a falta da propriedade do delta de Kronecker, surge em Duarte et al. (2006), uma abordagem para gerar funções aproximadoras de elevada regularidade para o GFEM. Em Duarte et al. (2006) e em Barros et al. (2007) as funções de PU do GFEM são construídas com base na mesma estratégia do Método *hp-Clouds*, porém sobre uma malha de elementos finitos, possibilitando a obtenção de funções aproximadoras de continuidade do tipo C^k , onde k pode ser arbitrariamente definido. O domínio de influência, ou nuvem ω_j , fica associado a uma forma poligonal ou poliédrica, se em 2D ou 3D, correspondente ao conjunto de elementos que compartilham o nó \mathbf{x}_j . Para se construir uma aproximação

arbitrariamente regular, torna-se necessário empregar uma função peso diferente daquelas utilizadas no EFG e *hp-Clouds*. Utiliza-se, então, o procedimento de Edwards (Edwards, 1996), onde a PU é obtida através de Funções de Shepard (Shepard, 1968) e funções de distância especiais. Entretanto, o procedimento de Edwards demanda nuvens convexas. Para transpor essa limitação, Duarte et al. (2006) propõem a obtenção das funções peso de continuidade C^k , com k arbitrariamente grande, construídas a partir de funções booleanas do tipo R, descritas a seguir, sobre a nuvem ω_j , convexa ou não. A seguir, descreve-se o procedimento de obtenção das funções C^∞ e C^k , para nuvens convexas e não-convexas, respectivamente.

Funções de continuidade C^∞ para nuvens convexas

Para o caso de uma malha em duas dimensões, com nuvens convexas e funções de aresta exponenciais, a continuidade C^∞ das funções W_j é garantida pelo uso do procedimento de Edwards original (Edwards, 1996). A partição de unidade é obtida da forma descrita a seguir.

Inicialmente, são definidas as funções de aresta, $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x})$, associadas com a nuvem ω_j . Tais funções tendem a zero suavemente a medida que se aproximam da aresta i e são maiores que zero em pontos do interior da nuvem.

$$\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\xi_i(\mathbf{x})^{-\gamma}} & , \quad \xi_i > 0 \\ 0 & , \quad \xi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

onde γ é uma constante positiva e $\xi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)$ é a distância entre a posição \mathbf{x} e a aresta i , conforme Fig. 3.

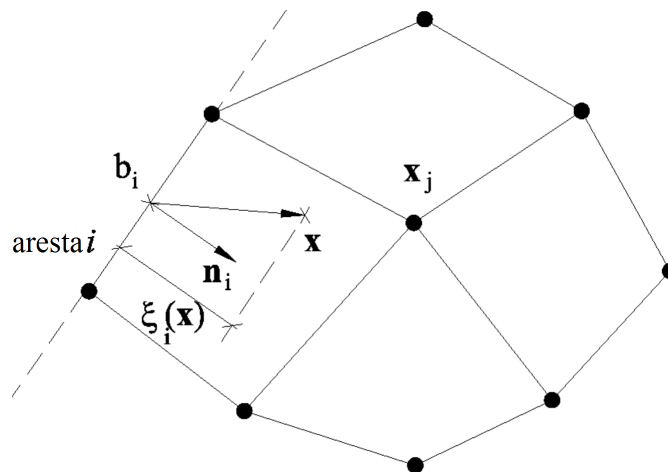


Figura 3: Nuvem convexa (Barros et al., 2007)

Com o objetivo de garantir que todas as funções de aresta possuam o mesmo valor em um mesmo ponto \mathbf{x}_j da nuvem, ou seja, $\varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}_j) = \varepsilon_{j,k}(\mathbf{x}_j)$ para todas as arestas i e k de ω_j , é definido o vetor \mathbf{n}_i :

$$\mathbf{n}_i = \left(\frac{1 - 2^\gamma}{\ln \beta} \right)^{1/\gamma} \cdot |\hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{b}_i)|^{-1} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (14)$$

onde \hat{n}_i é um vetor unitário na aresta i que aponta para o interior da nuvem e β é uma constante positiva. A função peso $W_j(\mathbf{x})$ é definida pelo produto das funções de aresta da nuvem:

$$W_j(\mathbf{x}) = e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

onde M_j é o número de arestas da nuvem ω_j e $c_j = M_j (1 - 2^\gamma / \ln \beta)^{-1}$ é um fator de escala (Duarte et al., 2006).

Funções de continuidade C^k para nuvens não convexas

Para nuvens não convexas as funções de aresta definidas anteriormente apresentarão valores nulos no interior da nuvem, o que conduzirá a valores nulos das funções peso no interior da nuvem, Fig. 4. Para contornar esse problema, as funções R (Shapiro, 1991) foram empregadas em Duarte et al. (2006) na criação de funções peso adequadas para nuvens não convexas. As funções R são funções booleanas, reais e com propriedade de terem seu sinal definido completamente pelos sinais de seus argumentos. A função definida a seguir é a função conjunção R com dois argumentos:

$$(x \vee_\alpha^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \alpha} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (16)$$

onde $-1 < \alpha(x, y) < 1$ é uma função simétrica arbitrária, \vee é o operador lógico da conjunção “ou” e k é um inteiro positivo.

Em Duarte et al. (2006) é empregada a seguinte função R (R_0^k):

$$(x \vee_0^k y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) (x^2 + y^2)^{k/2} \quad (17)$$

Esta função é analítica em todo domínio, com exceção da origem $x = y = 0$. Na origem, ela é k vezes diferenciável. Além disso, a propriedade

$$(x \vee_0^k y) \begin{cases} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ and } y = 0 \\ > 0 \forall x > 0 \text{ or } y > 0 \end{cases} \quad (18)$$

possibilita a utilização desta função na construção de uma nova função de aresta associada a duas arestas adjacentes da nuvem não convexa correspondente ao nó reentrante.

Por exemplo, para os lados m e n da nuvem da Fig. 4, a função de aresta será:

$$\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}))}{(\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x}_j) \vee_0^k \varepsilon_{j,n}(\mathbf{x}_j))} \quad (19)$$

O termo no denominador é o fator de escala e k é uma constante inteira escolhida de acordo com o grau de suavidade desejado para a função. Ao utilizar-se a função $\varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x})$ no lugar de $\varepsilon_{j,m}(\mathbf{x})$ e $\varepsilon_{j,n}(\mathbf{x})$, uma nova expressão é obtida para a função peso $W_j(\mathbf{x})$:

$$W_j(\mathbf{x}) = \left(e^{c_j} \prod_{i=1}^{M_j} \varepsilon_{j,i}(\mathbf{x}) \right) \varepsilon_{j,mn}(\mathbf{x}) \quad (20)$$

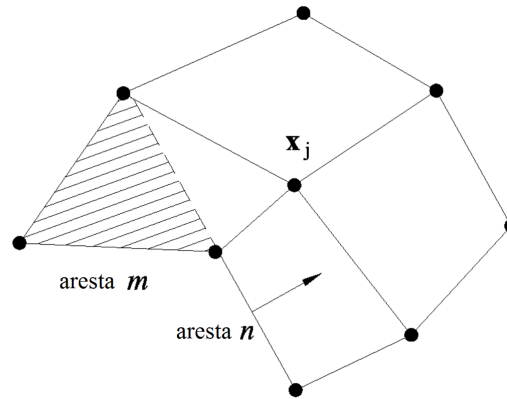


Figura 4: Nuvem não convexa (Barros et al., 2007)

A função acima definida não apresenta valores nulos no interior da nuvem e será no mínimo diferenciável k vezes.

2.4 Tipo de base da Aproximação

A aproximação construída com base na PU pode ser aprimorada por meio de estratégias reunidas sob a denominação de enriquecimento intrínseco ou extrínseco. Na Fig. 1 é possível distinguir facilmente os métodos de acordo com essa classificação. Tanto os métodos que possuem enriquecimento intrínseco quanto os que possuem enriquecimento extrínseco podem ser enriquecidos globalmente (em todo o domínio) ou localmente (somente nas zonas de interesse).

A aproximação em métodos enriquecidos unicamente de forma intrínseca corresponde à Eq. (7), repetida a seguir:

$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n(\mathbf{x})} \phi_j(\mathbf{x})u_j = \Phi^T \mathbf{U} \quad (21)$$

A estratégia de enriquecimento intrínseco se dá a partir da inclusão de novas funções na base \mathbf{P} , como em Fleming et al. (1997), Rao and Rahman (2004) e Sevilla and Barbieri (2014). Nestes trabalhos, funções capazes de representar fissuras são incluídas na base intrínseca. Em casos com enriquecimento intrínseco, o número de funções de forma e graus de liberdade do problema não precisam ser alterados com a inclusão de novas funções na base (Fries and Belytschko, 2010). Entretanto, a matriz \mathbf{A} , Eq.(5), pode tornar-se complexa e sua inversão no MLS tornar-se cara computacionalmente.

O emprego de uma base extrínseca adicional tem por objetivo o aumento da consistência da aproximação ou melhora da aproximação com base na inclusão de funções que contemplem aspectos da solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) conhecidos *a priori* (Fries and Matthias, 2004). Nesta estratégia, famílias de funções podem ser incluídas na aproximação multiplicando-as pelas funções de PU. O resultado deste produto é uma função que herda a continuidade da função original e as características aproximatórias das funções produto. Este resultado, conforme será mostrado a seguir, somente é possível graças as propriedades da função original caso seja uma PU. Sendo assim, a função de forma associada ao nó \mathbf{x}_j é construída pela multiplicação da PU $\phi_j(\mathbf{x})$ por uma função de enriquecimento $L_{ji}(\mathbf{x})$.

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \phi_j(\mathbf{x})L_{ji}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

As funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ podem pertencer a uma base de funções I_j definidas como

$$I_j = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (23)$$

onde $L_{ji}(\mathbf{x})$ corresponde à “i-ésima” função que multiplica a PU do nó \mathbf{x}_j , podendo ser polinomial ou não, e q_j representa o número de funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ utilizadas.

Conforme Duarte et al. (2007), o fato de ϕ_j constituir uma PU, implica, no caso uma única função de enriquecimento de $L_{ji}(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x})$, em

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x})L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \quad (24)$$

Sendo assim, garante-se que as funções de forma possam representar exatamente, por meio de combinações lineares, as funções de enriquecimento. Desta maneira, se a função $L(\mathbf{x})$ da base extrínseca é capaz de aproximar bem a solução do PVC, a função de forma construída com ela também o fará (Duarte et al., 2000).

A aproximação nos métodos que utilizam as estratégias de enriquecimento intrínseco e extrínseco apresenta a seguinte representação geral:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\} \quad (25)$$

Tipos de base para a estratégia de enriquecimento extrínseco

As funções L_{ji} , da Eq. (25), podem ser de diversos tipos. A seguir, descreve-se as bases polinomiais, não polinomiais e numéricas e suas aplicações.

Polinomiais As funções polinomiais são empregadas tendo como objetivo o aumento da ordem da aproximação. As funções da Partição da Unidade de Shepard são capazes de representar exatamente somente uma função constante. Por esta razão, são utilizadas funções de enriquecimento polinomiais em métodos numéricos, tal como o *hp-Clouds*, onde a PU de Shepard é utilizada. O uso de funções polinomiais em métodos que possuem PU polinomial, como o GFEM, pode gerar um sistema de equações linearmente dependente. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada em detalhe em Duarte et al. (2000), onde são igualmente indicados procedimentos para resolução deste tipo de sistema de equações.

Não Polinomiais Muitas vezes, aspectos da solução analítica de caráter não polinomial de um dado PVC são conhecidos. Nestes casos, as funções da base extrínseca podem ser escolhidas adequadamente a partir do conhecimento *a priori* da solução. Estão inseridas neste contexto as bases contendo funções harmônicas, funções singulares, funções trigonométricas ou outros tipos de funções analíticas não polinomiais.

Numéricas Para certos problemas, o caráter não polinomial da solução pode ser conhecido, mas funções analíticas capazes de descrever satisfatoriamente a solução não existem. As funções da base de enriquecimento extrínseco podem ser de qualquer tipo, até mesmo numéricas. Ao fazer uso desta alternativa, nasce o Método dos Elemento Finitos Generalizados Global-Local. No GFEM global-local, um PVC local com condições de contorno provenientes da análise de um problema global grosseiramente discretizado é resolvido (Etapa 1). Em seguida, a solução do problema local é utilizada para formar a base extrínseca da solução do problema global (Etapa 2). Finalmente, o problema global enriquecido é resolvido (Etapa 3).

3 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS COMPOSTAS DE MATERIAIS PARCIALMENTE FRÁGEIS

O concreto é conhecido por sua alta resistência a compressão quando comparada com sua baixa resistência a tração. Esta é uma das razões pela qual o concreto fissa mesmo quando submetido a pequenas cargas estáticas. A nucleação e propagação de fissuras é uma das fontes do comportamento altamente não linear do concreto. Além disso, em materiais semi-frágeis a Zona de Processo de Fratura (ZPF), onde ocorre a iniciação, crescimento e coalescência de micro-fissuras, é grande quando comparada ao tamanho de estruturas de pequeno e médio porte. Esta característica impossibilita a aplicação da mecânica da fratura elástica linear.

A degradação do concreto pode ser modelada por meio de uma abordagem tanto contínua quanto discreta. Na abordagem discreta, a fissura é introduzida geometricamente no modelo. Por outro lado, nas abordagens contínuas, o comportamento não-linear do concreto é levado em consideração por meio do modelo constitutivo.

O trabalho de Ngo and Scordelis (1967) é uma das primeiras aplicações da modelagem discreta de fissuras no concreto. A fissura descrita geometricamente propaga quando um dado alvo de tensão de tração é atingido. O trabalho de Nilson (1968) é semelhante ao de Ngo and Scordelis (1967), entretanto, em sua abordagem, o material é considerado não-linear. Desenvolvimentos recentes foram feitos no campo da fratura discreta para superar sua alta dependência da malha.

A abordagem da fissuração distribuída foi inicialmente proposta por Rashid (1968) e desenvolvida posteriormente por Suidan and Schnobrich (1973); Bažant and Oh (1983); Rots et al. (1985), entre outros. Nos modelos de fissuração distribuída as fissuras não são fisicamente representadas. As fissuras são levadas em consideração através de uma perda de rigidez da zona danificada, ou seja, a deterioração do meio é representada por meio de uma relação constitutiva. Estes modelos são formulados em um sistema de coordenadas locais definido pelos eixos de coordenadas locais. Os modelos de fissuração distribuída podem ser de direção fixa, onde a direção da fissura é definida na nucleação e permanece fixa durante toda a análise, ou de direção variável, onde a orientação da fissura varia de acordo com a rotação dos eixos principais.

Juntamente com os modelos de fissuração distribuída, a teoria do dano contínuo surgiu como uma alternativa para modelar o comportamento estrutural de materiais semi-frágeis. Um dos primeiros modelos de dano aplicados a esses materiais foram os modelos de dano escalar de Mazars (1984) e Mazars and Pijaudier-Cabot (1989). A degradação das propriedades do material é representada por um conjunto de variáveis de dano.

Os trabalhos de de Borst and Abellan (2002) e Borst et al. (2004) empregam modelos de dano contínuo na ZPF. Um modelo de dano contínuo é usado para modelar a iniciação, crescimento e coalescência de micro fissuras na ZPF, dando origem a uma fissura modelada discretamente por meio de um modelo de zona coesiva, desenvolvido por Dugdale (1960), Barenblatt (1962), Hillerborg et al. (1976), Needleman (1987).

3.1 Formulação unificada para modelos constitutivos

Carol et al. (1994), a partir de em uma série de trabalho envolvendo o conceito de dano, propuseram uma unificação teórica de modelos de degradação elástica baseados em uma única função de carregamento. Nesta mesma linha, Penna (2011) propôs uma formulação unificada de modelos constitutivos baseados em múltiplas funções de carregamento.

A formulação baseada em deformação é empregada nos modelos de degradação elástica comumente empregados na modelagem do comportamento do concreto. A formulação baseada em deformação da abordagem unificada de Penna (2011) é detalhada a seguir.

Primeiramente, uma relação total entre tensão e deformação é definida como

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}, \quad (26)$$

onde E_{ijkl}^s é o operador constitutivo secante.

Da equação anterior, uma relação constitutiva tangente é obtida

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (27)$$

onde E_{ijkl}^t é o operador constitutivo tangente, dado por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^s + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl}. \quad (28)$$

O operador constitutivo tangente E_{ijkl}^t é composto pelos gradientes das funções de carregamento $F_n(\varepsilon, \bar{\mathbf{p}})$, onde $\bar{\mathbf{p}}$ é o conjunto de variáveis internas do modelo definidas em termos de deformações. Os gradientes de F_n , \bar{n}_{nkl} e \bar{H}_{nm} , são definidos nas Eq. (29) e (30), respectivamente.

$$\bar{n}_{nkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_p \quad (29)$$

$$\bar{H}_{nm} = - \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \bigg|_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{p}_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \bar{m}_{mkl} \quad (30)$$

O último componente de E_{ijkl}^t a ser definido é o tensor das direções de degradação \bar{m}_{mij} , definido como

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (31)$$

onde \bar{M}_{mijkl} , obtido pela regra da degradação generalizada, é

$$\bar{M}_{mijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^s}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m*}. \quad (32)$$

A Eq. (32), \mathcal{D}_* define um conjunto de variáveis de dano e \mathcal{M}_{m*} indica as direções de degradação. O símbolo * indica índices de acordo com a natureza do problema (Ex. \mathcal{D} para um escalar, \mathcal{D}_i para um vetor e \mathcal{D}_{ij} para um tensor de segunda ordem).

O *framework* de modelos constitutivos proposto por Penna (2011) foi inicialmente concebido para o MEF. Contudo, sua formulação foi geral o suficiente para que o *framework* fosse aplicado em outros métodos de análise. O *framework* de modelos constitutivos do INSANE já foi testado no contexto dos métodos G/XFEM (Monteiro et al., 2014; Wolenski et al., 2015), BEM (Peixoto et al., 2016) e Métodos sem Malha como o EFG (Silva, 2012).

3.2 Leis de tensão-deformação de Carreira-Ingraffea

Para o modelo de fissuração distribuída utilizado neste trabalho são adotadas as leis tensão-deformação de Bonne and Ingraffea (1987) para tração e de Carreira and Chu (1985) para compressão, uma vez que a lei proposta por Bonne and Ingraffea (1987) prediz unicamente o comportamento a tração.

A lei de Carreira and Chu (1985) para compressão é definida por:

$$\sigma_c = f_c \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^k} \quad (33)$$

onde k é definido por $k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{\varepsilon_c(E_0)} \right)}$, σ_c é a tensão de compressão correspondente à deformação ε , f_c é a tensão de compressão máxima e ε_c é a deformação correspondente à tensão f_c .

Por sua vez, a lei proposta por Bonne and Ingraffea (1987) para a tração é:

$$\sigma_t = f_t e^{-k(\varepsilon - \varepsilon_t)} \quad (34)$$

onde k é definido por $k = \frac{hf_t}{G_f}$ ou $k = \frac{f_t}{g_f}$, σ_t é a tensão de tração correspondente à deformação ε , f_t é o limite de resistência à tração, ε_t é a deformação relativa ao limite elástico na tração, h é o comprimento característico, G_f é a energia de fratura por comprimento de trinca e g_f é a energia de fratura específica.

4 EXEMPLO NUMÉRICO

Simulações numéricas de um painel em L composto de concreto analisado numericamente e experimentalmente por Winkler et al. (2004) é apresentado para avaliar a performance de métodos da Partição da Unidade na análise fisicamente não linear de meios parcialmente frágeis. São considerados dois tipos de PU: a PU polinomial oriunda do MEF, na versão original do GFEM, e a PU de elevada regularidade de Duarte et al. (2006), proposta inicialmente para o GFEM, mas implementada na plataforma INSANE no contexto do *hp-Clouds* em Pinheiro et al. (2015).

A Fig. 5 apresenta a geometria, o carregamento e as condições de contorno do problema analisado. Considera-se $l = 250\text{mm}$, $q = 28\text{N/mm}$ e espessura do painel de 100mm . O ponto A na Fig. 5 é o ponto cujo deslocamento vertical é considerado na composição das trajetórias de equilíbrio. As funções de forma dos modelos apresentados possuem propriedade do delta de Kronecker, sendo assim, as condições de contorno essenciais são impostas diretamente ao longo dos nós do seguimento BC da Fig. 5. Todos os graus de liberdade, inclusive os oriundos do enriquecimento extrínseco, são bloqueados ao longo deste seguimento. Ainda, nas simulações numéricas será considerado modelo de fissuração distribuída de direção fixa com as leis tensão-deformação de Carreira-Ingraffea, descritas na Seção 3.2, e estado plano de tensão.

As propriedades do material seguindo as leis de Carreira-Ingraffea usado no modelo de fissuração distribuída, de acordo com Penna (2011), são $E_0 = 1.0 \cdot 10^7 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.18$, $f_t = 2.7 \text{ N/mm}^2$, $f_c = 31.0 \text{ N/mm}^2$, $\varepsilon_c = 0.0022$, $\beta_{th} = 0.0$, $g_f = 0.065$ e $h = 28 \text{ mm}$;

Os parâmetros dos modelos com funções C^k são $k = 1$, $\beta = 0.6$ e $\gamma = 0.3$. A análise não-linear de ambos os tipos de modelo (GFEM e *hp-Clouds-C^k*) foi realizada com controle de deslocamentos generalizados, aproximação secante do tensor constitutivo, 0.020 de incremento do fator de carga a cada passo e uma tolerância relativa para a convergência em termos de deslocamento generalizado de 0.0001.

Vale lembrar que para os modelos do GFEM, o grau da aproximação n corresponde a um enriquecimento até o grau $n - 1$, uma vez que a PU já é um polinômio de primeiro grau. Para os modelos do *hp-Clouds*, o grau da aproximação n corresponde a um enriquecimento até o grau n , pois a PU somente é capaz de reproduzir constantes. Três modelos são analisados com o GFEM. O primeiro deles não possui nenhum enriquecimento, sendo assim, é um modelo equivalente a um modelo do MEF com elementos Q4. O segundo modelo possui enriquecimento do primeiro grau somente nos nós marcados em vermelho na Fig. 5, o que significa uma aproximação do segundo grau para as funções de forma destes nós. O terceiro modelo do GFEM possui enriquecimento do primeiro grau em todos os nós, o que significa uma aproximação do segundo

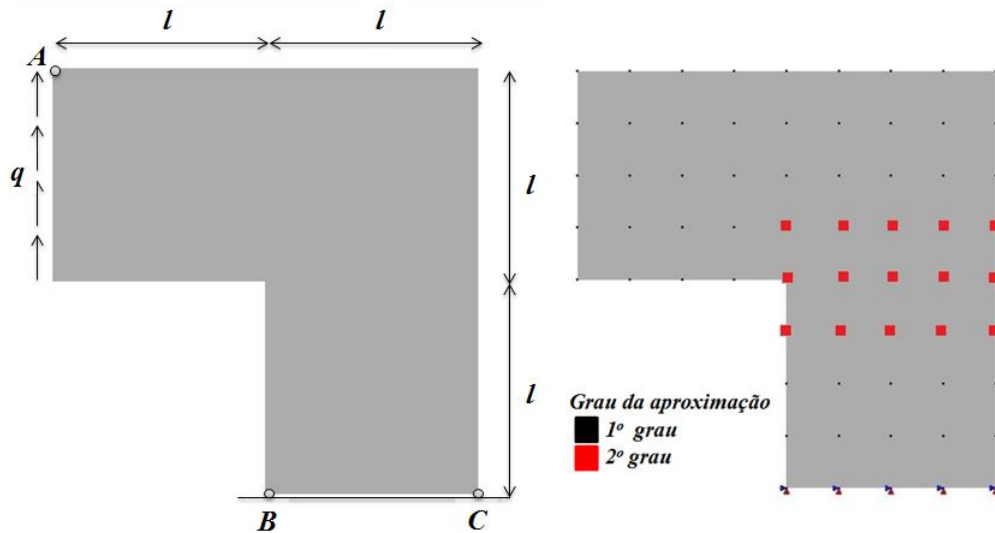


Figura 5: Painel em L

grau em todos estes nós. Nos modelos do GFEM foram utilizados 4×4 pontos de integração por elemento.

Uma série de simulações é feita com o método *hp-Clouds* com funções C^k . O *hp-Clouds- C^k* foi utilizado para compor três modelos com os três tipos de enriquecimento polinomial. O primeiro modelo possui todos os nós enriquecidos com polinômios completos até o primeiro grau. O segundo modelo apresenta parte dos nós enriquecidos com polinômios completos até o primeiro grau e outra parte dos nós enriquecida com polinômios completos até o segundo grau, conforme ilustrado na Fig. 5. O terceiro modelo, por sua vez, tem todos os nós enriquecidos com polinômios completos até o segundo grau. Nas análises com o *hp-Clouds- C^k* , devido ao fato das funções aproximadoras serem racionais e não polinomiais, foram utilizados 10×10 pontos de integração por célula (coincidente, neste trabalho, com a malha de elementos finitos utilizada nas análises pelo GFEM).

As trajetórias de equilíbrio resultantes das simulações realizadas são mostradas nas Figuras 6 e 7. Os resultados são comparados com os dados experimentais obtidos por Winkler et al. (2004). A análise destes resultados permite constatar que: ambos os tipos de PU foram capazes de descrever corretamente as trajetórias de equilíbrio; as aproximações do primeiro grau apresentaram comportamento ligeiramente distante dos resultados experimentais; os resultados do GFEM com PU polinomial apresentam uma maior tendência de localização do que os resultados com a PU racional; a presença da PU de alta regularidade melhora os efeitos do enriquecimento polinomial, o que tornou as trajetórias dos modelos enriquecidos com segundo grau e primeiro e segundo graus quase equivalentes.

5 CONCLUSÕES

Os métodos da Partição da Unidade foram classificados em relação a forma de obtenção da PU e características da aproximação gerada. O comportamento fisicamente não linear de um painel em L foi estudado em análises com PU de alta regularidade e também com PU baseada em malha obtida com funções lagrangianas do método dos elementos finitos. Foi observada a importância do enriquecimento extrínseco para melhora da qualidade da solução sem

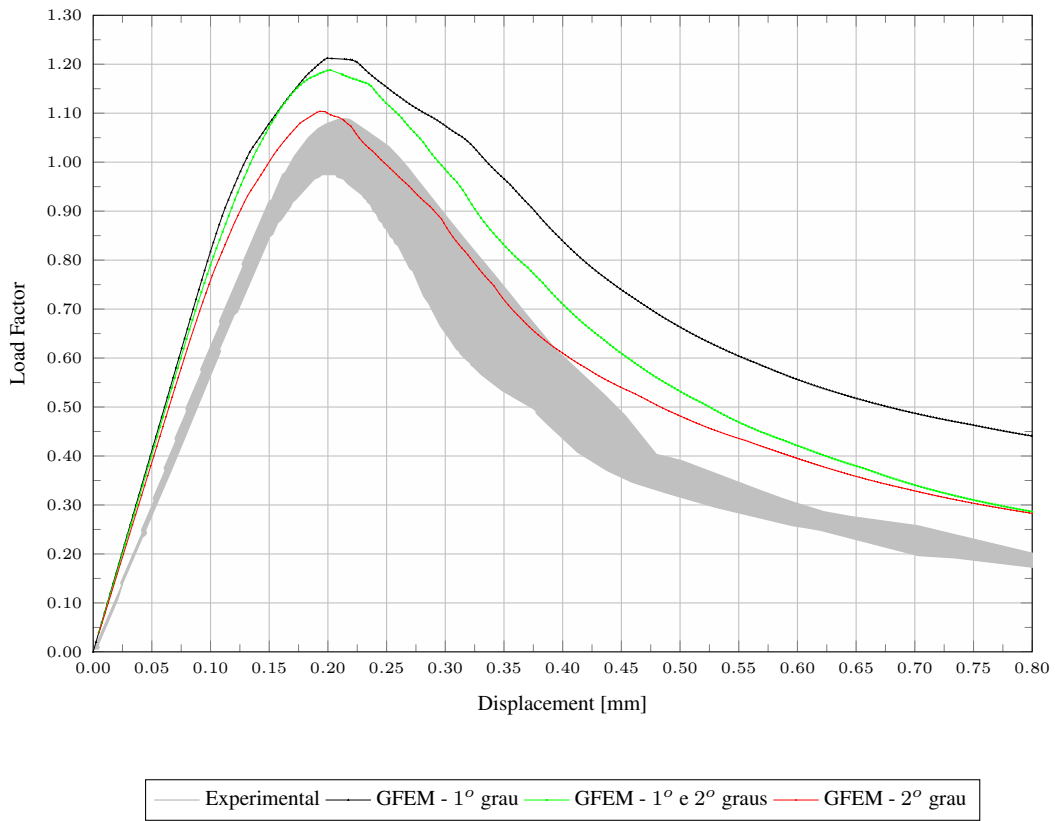


Figura 6: Pannel em L - Trajetórias de Equilíbrio - GFEM

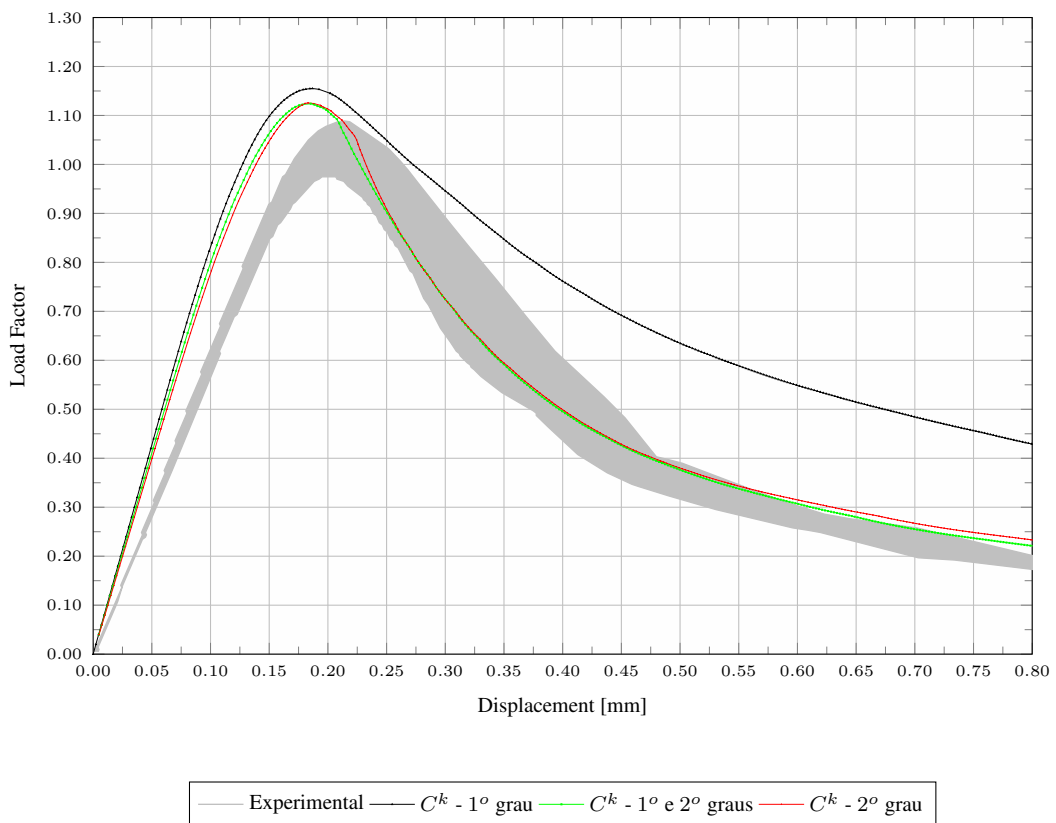


Figura 7: Pannel em L - Trajetórias de Equilíbrio - C^k

a necessidade de se aumentar o número de nós da discretização. Apesar de aumentar o custo computacional em relação a PU polinomial, o uso da PU de alta regularidade propiciou melhora nas trajetórias de equilíbrio analisadas, tornando o pico e o comportamento pós crítico mais próximo dos resultados experimentais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências brasileiras de apoio à pesquisa CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Financiamentos 309005/2013-2, 486959/2013-9 e 308785/2014-2) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - Financiamento PPM-00669-15).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Barenblatt, G., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. volume 7 of *Advances in Applied Mechanics*, pp. 55 – 129. Elsevier.
- Barros, F. B., 2002. *Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Barros, F. B., Barcellos, C. S. d., & Duarte, C. A., 2007. p-adaptive ck generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. *Computational Mechanics*, vol. 41, n. 1, pp. 175–187.
- Bažant, Z. P. & Oh, B., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, vol. 16, n. 3, pp. 155–177.
- Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L., 1994. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, n. 2, pp. 229–256.
- Bonne, T. & Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the fracture process at rock interfaces. In *Proceeding of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*, pp. 519–531.
- Borst, R. d., Remmers, J. J. C., Needleman, A., & Abellan, M. A., 2004. Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, n. 7-8, pp. 583–607.
- Carol, I., Rizzi, E., & Willam, K., 1994. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- Carreira, D. J. & Chu, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal*, vol. 82, pp. 797–804.
- de Borst, R. & Abellan, M., 2002. A numerical framework for continuum damage-discontinuum transition. *Archives of Mechanics*, vol. 54, n. 5-6, pp. 377–387.

- Duarte, C., Kim, D., & Babuška, I., 2007. Chapter: A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to three-dimensional cracks. *Advances in Meshfree Techniques*, vol. 5.
- Duarte, C. A., 1995. A review of some meshless methods to solve partial differential equations. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report 06.
- Duarte, C. A., 1996. *The hp-cloud method*. Phd thesis, The University of Texas at Austin.
- Duarte, C. A., Babuška, I., & Oden, J. T., 2000. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, vol. 77, n. 2, pp. 215–232.
- Duarte, C. A. & Kim, D.-J., 2008. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, n. 6-8, pp. 487–504.
- Duarte, C. A., Kim, D.-J., & Quaresma, D. M., 2006. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, pp. 33 – 56.
- Dugdale, D., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *J Mech Phys Solids*, vol. 8.
- Edwards, H. C., 1996. C^∞ finite element basis functions. Technical Report 96-45, TICAM, The University of Texas at Austin.
- Fleming, M., Chu, Y., Moran, B., Belytschko, T., Lu, Y., & Gu, L., 1997. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, n. 8, pp. 1483–1504.
- Fries, T.-P. & Belytschko, T., 2010. The Extended/Generalized Finite Element Method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, pp. 253–304.
- Fries, T.-p. & Matthias, H.-g., 2004. Classification and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical Univ. of Braunschweig*, pp. 64.
- Hillerborg, A., Modéer, M., & Peterson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, pp. 773–782.
- Lancaster, P. & Salkauskas, K., 1981. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, vol. 37, n. 155, pp. 141–158.
- Mazars, J., 1984. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à rupture du béton de structure*. PhD thesis, Université Paris, Paris, França.
- Mazars, J. & Pijaudier-Cabot, G., 1989. Continuum damage theory - Application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, pp. 345–365.
- Monteiro, A. B., Wolenski, A. R. V., Penna, S. S., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L. S., 2014. Application of the generalized finite element method on the physically nonlinear analysis of structures. In *XXXV CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, pp. 1–19, Fortaleza, Brasil.

- Needleman, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of applied mechanics*, vol. 54, n. 3, pp. 525–531.
- Ngo, D. & Scordelis, A., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 67, pp. 152–163.
- Nilson, A., 1968. Nonlinear analysis of concrete by the finite element method. *Journal of American Concrete Institute*, vol. 65, pp. 757–766.
- Oden, J. T. & Reddy, J. N., 1976. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc.
- Peixoto, R., Anacleto, F., Ribeiro, G., Pitangueira, R., & Penna, S., 2016. A solution strategy for non-linear implicit BEM formulation using a unified constitutive modelling framework. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 64, n. April, pp. 295–310.
- Penna, S. S., 2011. *Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pereira, H. C. R., 2015. Estratégia de enriquecimento para métodos baseados na partição da unidade. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pinheiro, D. C. C., 2016. *Análise multi-escala de meios parcialmente frágeis: uma abordagem global-local via métodos sem malha*. Projeto de tese, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pinheiro, D. C. C., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L. S., 2015. Partição da unidade de elevada regularidade para análise de estruturas. In *XXXVI CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, pp. 1–20, Rio de Janeiro, Brasil.
- Rao, B. & Rahman, S., 2004. An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, n. 2, pp. 197–223.
- Rashid, Y. R., 1968. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 7, pp. 334–344.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M., & Blaauwendra, J., 1985. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON*, vol. 30, pp. 1–48.
- Sevilla, R. & Barbieri, E., 2014. NURBS distance fields for extremely curved cracks. *Computational Mechanics*, vol. 54, n. 6, pp. 1431–1446.
- Shapiro, V., 1991. Theory of R-functions and applications: a primer. Technical Report TR91-1219, Computer Science Department, Cornell University.
- Shepard, D., 1968. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference*, pp. 517–524. ACM.
- Silva, R. P., 2012. *Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Suidan, M. & Schnobrich, W. C., 1973. Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of the structural division*, pp. 2109–2121.
- Winkler, B., Hofstetter, G., & Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 28, n. 7-8, pp. 797–819.
- Wolenski, A. R. V., Monteiro, A. B., Penna, S. S., Barros, F. B., & Pitangueira, R. L. S., 2015. Gfem nonlinear analysis using microplane constitutive models. In *XXXVI CILAMCE - Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, pp. 1–14, Rio de Janeiro, Brasil.