



MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS H-ADAPTATIVO: UMA NOVA TÉCNICA PARA PROJEÇÃO ISOTRÓPICA DO TAMANHO ELEMENTAR

Jucélio Tomás Pereira¹

Jéderson da Silva^{1,2}

João do Carmo Lopes Gonçalves^{1,3}

jucelio.tomas@ufpr

dasilva.jederson@gmail.com

joao.carmo@ifpr.edu.br

¹Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Paraná.

Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 210, Paraná, Curitiba, Brasil.

²Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Avenida dos Pioneiros, Jardim Morumbi, 3131, Paraná, Londrina, Brasil.

³Instituto Federal do Paraná.

Rua Antônio Carlos Rodrigues, 453, Paraná, Paranaguá, Brasil.

Resumo. *Devido à natureza aproximadora da solução fornecida pelo Método dos Elementos Finitos, são diversas as pesquisas que têm surgido com o objetivo de quantificar, controlar ou minimizar os erros causados pela discretização da solução. Nesse contexto, uma das alternativas é o emprego de processos h-adaptativos guiados por estimadores de erros a posteriori, os quais fornecem estimativas locais dos erros. Assim, com o objetivo de satisfazer um valor de erro limite com um custo computacional reduzido, propõe-se um novo método para projeção isotrópica do tamanho elementar, denominado Recuperação Quadrática do Erro. Neste, é desenvolvido o conceito de recuperação quadrática da densidade do erro em energia, o qual, em conjunto com a solução de um problema de otimização via Método de Lagrangeano, fornece uma expressão analítica para determinação do novo tamanho do*

elemento. A estimativa dos erros a posteriori baseada em recuperação é dirigida mediante a recuperação do gradiente pelo clássico método Superconvergente de Recuperação de Padrões (*Superconvergent Patch Recovery*) (Zienkiewicz e Zhu, 1992a, 1992b). A eficiência da metodologia proposta é comprovada através da aplicação em problemas lineares escalares de engenharia, sendo a implementação numérica e a geração da malha adaptada realizada respectivamente, pelos softwares Matlab e BAMG (*Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*).

Palavras-chave: Método dos elementos finitos, h-adaptatividade, *Superconvergent Patch Recovery*, Recuperação Quadrática do Erro.

1 INTRODUÇÃO

O emprego de métodos de aproximação e interpolação, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), para soluções de equações diferenciais, gera inevitavelmente erros numéricos e duas questões fundamentais são: quais são os erros associados ao MEF? Como o erro pode ser avaliado, controlado e efetivamente reduzido?

Segundo Reddy (2006), os erros em elementos finitos podem ser atribuídos a três fontes preponderantes: erros de aproximação de domínio, erros de aritmética finita e quadratura e erros de aproximação. Em geral, com foco na estimativa dos erros de aproximação, duas são as categorias principais de estimadores de erro: a priori e a posteriori (Ainsworth e Oden, 2000). Estes últimos são agrupados em duas classes principais: estimadores baseados em resíduo e estimadores baseados em recuperação (Zienkiewicz et al., 1999).

Os estimadores de erros baseados em recuperação, apresentados inicialmente por Zienkiewicz e Zhu (1987), são fundamentados na diferença entre os valores aproximados calculados via MEF e os valores recuperados (melhorados), os quais podem ser gerados por diferentes métodos de recuperação. Devido ao fato da qualidade da estimativa de erro baseada em recuperação estar intimamente ligada à qualidade dos valores recuperados dos gradientes, vários são os trabalhos que têm surgido com o intuito de obter valores recuperados cada vez mais precisos. Alguns métodos desenvolvidos são o *Superconvergent Patch Recovery* (SPR) (Zienkiewicz e Zhu, 1992a, 1992b), *Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium* (SPRE) (Wiberg e Abdulwahab, 1992), *Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium and Boundary conditions* (SPREB) (Wiberg et al., 1994), *Recovery by Equilibrium of Patches* (REP) (Boroomand e Zienkiewicz, 1997), *Recovery by Compatibility in Patches* (RCP) (Ubertini, 2004; Benedetti et al., 2006; Castellazzi et al., 2010), *Polynomial Preserving Recovery* (PPR) (Zhang e Naga, 2005) e *The Superconvergent Cluster Recovery Method* (SCR) (Huang e Yi, 2010).

Dessa forma, fundamentado nas estimativas de erros locais fornecidas por esses estimadores de erro, é possível estabelecer algoritmos adaptativos que busquem uma solução de elementos finitos que satisfaça uma precisão pré-estabelecida (Prudhomme et al., 2003).

Três formas básicas de adaptatividade da malha são geralmente empregadas, sejam elas (Cook et al., 2002): h, p e r. A mais comum entre todas e utilizada neste trabalho, é a h-adaptatividade de malha, a qual implica na modificação dos tamanhos elementares e consequente alteração do número de graus de liberdade, mantendo constante o grau polinomial (Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zhu e Zienkiewicz, 1988).

Originalmente, estratégias h-adaptativas eram limitadas em dividir os elementos com um erro acima do permitido até que uma solução aceitável fosse obtida (Zienkiewicz, 2006).

Embora esta metodologia obtenha soluções apreciáveis, possui um alto custo computacional. Dessa forma, outras metodologias de projeção do tamanho elementar e geração de uma malha dita ótima têm surgido.

Zienkiewicz e Zhu (1987) e Zhu e Zienkiewicz (1988) apresentaram um processo adaptativo, no qual um estimador de erro baseado em recuperação foi empregado como guia de um processo h-adaptativo isotrópico. Neste caso, definido o critério de malha ótima de equidistribuição do erro, foi obtido um modo de estimar diretamente cada tamanho elementar de acordo com um valor de erro pré-estabelecido. A abordagem foi aplicada para problemas lineares de engenharia, comprovando a eficácia do processo no controle de erros de aproximação e na obtenção de malhas muito próximas das adequadas. Outros trabalhos aplicaram essa projeção do tamanho elementar nos mais diversos problemas (Wiberg et al., 1997; Díez e Huerta, 1999; Onãte e Bugeda, 1993; Zienkiewicz et al., 1999; Castellazzi et al., 2010).

Dessa maneira, para dispor de cálculos confiáveis através da solução encontrada pelo MEF, faz-se necessária a utilização de metodologias eficazes de estimativas de erros em conjunto com técnicas adaptativas de refino que levem a uma uniformização e limitação do erro por todo o domínio do problema.

Como uma alternativa na determinação do tamanho elementar, o corrente estudo propõe uma nova técnica para projeção isotrópica do tamanho elementar. Esta, denominada Recuperação Quadrática do Erro (RQE), é baseada no conceito de recuperação quadrática da densidade do erro em energia, juntamente com a solução de um problema de otimização. A solução deste problema, posta através do Método do Lagrangeano, fornece uma expressão analítica para a determinação do novo tamanho elementar. Além disso, com o objetivo de demonstrar a qualidade e funcionalidade da projeção RQE, são apresentadas algumas aplicações em problemas lineares escalares de engenharia utilizando o estimador SPR (Zienkiewicz e Zhu, 1992a, 1992b). Para critério de comparação, os casos descritos são também submetidos a um processo h-adaptativo seguindo a projeção do tamanho elementar proposta por Zienkiewicz e Zhu (1987), aqui denominada projeção Ch^p , a qual é baseada no critério de equidistribuição do erro elementar.

2 ESTIMATIVA DE ERRO BASEADA NA NORMA EM ENERGIA

Em uma análise numérica de um problema de engenharia pode-se definir o erro como a diferença entre a solução exata (u) e a solução aproximada obtida pelo MEF (u^{MEF}). Assim, a função erro medida em termos de um campo escalar é dada por (Zienkiewicz e Zhu, 1987)

$$e_u = u - u^{MEF}. \quad (1)$$

De maneira a quantificar o erro em cada região de forma apropriada são introduzidas diferentes normas representando uma quantidade escalar do erro. Utilizar-se-á neste trabalho a norma do erro em energia $\|e\|$. Este conceito, empregado em termos de um estimador de erro a posteriori baseado em recuperação, foi inicialmente introduzido por Zienkiewicz e Zhu (1987) e, para problemas lineares escalares, pode ser escrito como

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{G} - \mathbf{G}^{MEF})^T \mathbf{k} (\mathbf{G} - \mathbf{G}^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (2)$$

onde \mathbf{G} é o vetor gradiente analítico do campo escalar obtido pela diferenciação da solução exata u , \mathbf{G}^{MEF} é o vetor gradiente aproximado do campo escalar, obtido via MEF, e \mathbf{k} é um tensor linear e isotrópico de segunda ordem.

Para descrever o comportamento dos problemas em análise é conveniente definir uma medida percentual do erro mensurado pela norma em energia, conhecido como erro relativo percentual em energia η , na forma

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} 100\%, \quad (3)$$

onde $\|u\|$ representa uma medida da energia total acumulada no sistema.

Admitindo que a solução analítica u não é conhecida e, conseqüentemente, o gradiente analítico do campo escalar, estimativas de erro baseadas em recuperação utilizam uma solução recuperada \mathbf{G}^* , que possua uma taxa de convergência superior à solução obtida diretamente pelo MEF, \mathbf{G}^{MEF} . Deste modo, uma estimativa do erro baseada na norma em energia, obtida em relação à solução recuperada, pode ser escrita como (Zienkiewicz e Zhu, 1987)

$$\|e^*\| = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^{MEF})^T \mathbf{k} (\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^{MEF}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Uma clássica medida da qualidade do estimador de erro é denominada índice de efetividade θ , dado pela razão entre o erro estimado e o erro verdadeiro, expresso como

$$\theta = \|e^*\| / \|e\|. \quad (5)$$

Assim, caso a solução recuperada convirja a uma taxa mais elevada do que a solução de elementos finitos, tem-se uma estimativa assintoticamente exata (Zienkiewicz e Zhu, 1992b).

3 MÉTODO SUPERCONVERGENTE DE RECUPERAÇÃO DE PADRÕES (SPR)

Introduzido por Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b), o clássico método Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR) mostra-se uma ferramenta simples, robusta e eficaz na obtenção de valores de gradiente recuperado. Considerando um problema linear escalar, o método SPR basicamente busca encontrar um polinômio que aproxima os gradientes do campo escalar e , empregando um ajuste por mínimos quadrados de soluções obtidas nos pontos superconvergentes (Barlow, 1976), obtém os valores recuperados nos nós. Para tal, diferentemente de definir o polinômio aproximado ao longo de todo o domínio, a técnica obtém o polinômio que aproxima os gradientes do campo escalar dentro de um anexo de elementos que estão conectados a um mesmo nó, denominado de padrão (patch).

Assim, considerando uma malha de elementos finitos triangulares lineares (*Constant Strain Triangle* – CST) para cada componente G_i^{MEF} do vetor \mathbf{G}^{MEF} , escreve-se o gradiente recuperado como (Zienkiewicz e Zhu, 1992a, 1992b; Zienkiewicz e Taylor, 2000)

$$G_i^* = \mathbf{p}(x, y) \mathbf{a} = [1 \ x \ y] \mathbf{a}, \quad (6)$$

sendo os coeficientes do polinômio dados por

$$\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T. \quad (7)$$

Estes coeficientes são encontrados através da minimização da distância quadrática entre este polinômio e os valores de gradiente do campo escalar nos pontos superconvergentes dos elementos que formam o padrão para o nó.

Logo, uma vez obtidos os coeficientes do polinômio, as coordenadas do nó central do padrão são substituídas na Eq. (6) para encontrar as componentes do vetor gradiente recuperado do campo escalar no nó em questão. Empregando o mesmo procedimento para todos os nós da malha, obtêm-se todos os valores nodais recuperados do gradiente do campo escalar.

Com isso, empregando a matriz de funções de forma elementares (N) utilizadas para interpolar o campo escalar, um campo suavizado e contínuo entre os elementos pode ser formado. A parcela do gradiente do campo escalar recuperado sobre um elemento pode ser posta como

$$\mathbf{G}^* = N\bar{\mathbf{G}}^*, \quad (8)$$

onde $\bar{\mathbf{G}}^*$ é o vetor nodal dos gradientes recuperados do campo escalar para o elemento em questão. Logo, utilizando o conceito de estimador de erro baseado em recuperação (Eq. 4) a nível elementar, é possível computar os erros localmente.

Frisa-se que, para que a técnica funcione de maneira efetiva, é necessário que o número de pontos superconvergentes presentes no padrão seja igual ou superior ao número de coeficientes do vetor de incógnitas. Em caso contrário, Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b) recomendam que se empregue o polinômio aproximador do padrão mais próximo.

4 DEFINIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ADAPTATIVO

Assume-se que uma solução é convergente e aceitável caso satisfaça dois critérios: um em nível global, e outro em nível elementar (Zienkiewicz e Zhu, 1987; Onâte e Bugada, 1993). O primeiro requer que o erro global na norma em energia para a malha corrente $\|e\|$ não seja maior que um percentual da energia total $\|u\|$, ou seja

$$\|e\| \leq \bar{\eta} \|u\|, \quad (9)$$

onde $\bar{\eta}$ é o valor do erro relativo percentual admissível global especificado. Desta maneira, define-se o parâmetro de erro global, ζ_g , como

$$\zeta_g = \frac{\|e\|}{\bar{\eta} \|u\|}, \quad (10)$$

sendo que valores de $\zeta_g \leq 1$ indicam satisfação do critério de convergência global.

A distribuição dos elementos na malha deve satisfazer um critério de malha ótima, como, por exemplo, o critério de equidistribuição de erro. Deste modo, um critério de convergência local também necessita ser satisfeito. Esta condição local pode ser expressa por

$$\|e\|_{ie} \leq \|e\|_{lim}, \quad (11)$$

onde $\|e\|_{ie}$ é o erro no ie -ésimo elemento e $\|e\|_{lim}$ representa o erro limite por elemento, o qual é dependente do critério de malha adotado. Assim, define-se o parâmetro de erro local elementar $\bar{\zeta}_{ie}$ como (Zienkiewicz e Zhu, 1987; Oñate e Bugeda, 1993)

$$\bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|e\|_{ie}}{\|e\|_{lim}}. \quad (12)$$

Neste caso, é possível perceber que um parâmetro de erro local elementar igual à unidade representa um elemento com tamanho ótimo, de modo que satisfaz a Eq. (11). Em geral, a definição do erro limite elementar é a principal diferença entre os vários critérios de malhas existentes e influencia significativamente na distribuição dos elementos da malha (Oñate e Bugeda, 1993).

Deste modo, com o objetivo de buscar satisfazer ambos os critérios de convergência simultaneamente, um único parâmetro é definido. Este, denominado parâmetro de refinamento elementar ζ_{ie} , é determinado pela multiplicação de ζ_g e $\bar{\zeta}_{ie}$ e dado por (Zienkiewicz e Zhu, 1987)

$$\zeta_{ie} = \zeta_g \bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|e\|}{\bar{\eta} \|u\|} \frac{\|e\|_{ie}}{\|e\|_{lim}}. \quad (13)$$

5 PARÂMETROS DA QUALIDADE DO PROCESSO ADAPTATIVO

Em geral, os trabalhos que discutem estratégias h-adaptativas apresentam como medida da qualidade da malha gerada somente características globais da malha, por exemplo, o parâmetro de erro global (Eq. 10). Embora esses parâmetros sejam uma boa medida para tal, não é possível visualizar o comportamento das projeções em nível elementar.

O corrente trabalho propõe a definição de três medidas auxiliares para quantificar e comparar a qualidade das projeções elementares, são elas: o máximo valor do parâmetro de erro local elementar ($\bar{\zeta}_{max}$), a média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ($\bar{\zeta}_{méd}$) e o desvio do parâmetro de erro local elementar ($D_{\bar{\zeta}}$). Esta última representa a variação média dos parâmetros de erro local elementar em relação à unidade e pode ser definida como

$$D_{\bar{\zeta}} = \sqrt{\frac{\sum_{ie=1}^{Nel} (\bar{\zeta}_{ie} - 1)^2}{Nel}}, \quad (14)$$

onde Nel é o número total de elementos na malha e $\bar{\zeta}_{ie}$ é dado pela Eq. (12). Deste modo, em uma malha ótima, $\bar{\zeta}_{ie} = 1$ para todos os elementos e, assim, $D_{\bar{\zeta}} = 0$ para a malha.

6 PROJEÇÃO Ch^p BASEADA NO CRITÉRIO DE EQUIDISTRIBUIÇÃO DO ERRO ELEMENTAR

A projeção Ch^p tem como objetivo encontrar o tamanho ideal de cada elemento de forma a satisfazer um determinado critério de malha ótima. Como critério de malha ótima, Zienkiewicz e Zhu propõem a condição de equidistribuição do erro em energia (Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zhu e Zienkiewicz, 1988). Assim, é possível expressar o erro total na malha corrente, $\|e\|$, como

$$\|e\|^2 = \sum_{ie=1}^{Nel} \|e\|_{ie}^2. \quad (15)$$

Supondo um valor constante e limitado para o erro em cada elemento, e denotado por $\|e\|_{lim}$, tem-se para a próxima malha

$$\|e\|^2 = Nel \|e\|_{lim}^2. \quad (16)$$

Combinando as equações (16) e (12), o parâmetro de erro local pode ser posto como

$$\bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|e\|_{ie}}{\|e\|_{lim}} = \frac{\|e\|_{ie}}{\|e\| Nel^{-1/2}} \quad (17)$$

e o parâmetro de refinamento elementar é dado por

$$\zeta_{ie} = \zeta_g \bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|e\|_{ie}}{\bar{\eta} \|u\| Nel^{-1/2}}. \quad (18)$$

Neste caso, ζ_{ie} é um parâmetro de refino que indica se a malha será (para $\zeta_{ie} > 1$) ou não (para $\zeta_{ie} \leq 1$) refinada. Para uma estimativa *a posteriori* do erro, um limite superior para o mesmo pode ser posto como (Zienkiewicz e Zhu, 1987; Zhu e Zienkiewicz, 1988)

$$\|e\| \leq Ch^{\min(p, \lambda)}, \quad (19)$$

onde $\|e\|$ representa a norma em energia, C é uma constante, h representa o tamanho de um elemento finito, p é a ordem polinomial do elemento e λ é um parâmetro que define a singularidade. Considerando que esta equação de projeção para o erro é válida para a malha corrente e para a próxima malha, obtém-se uma estimativa para o novo tamanho do elemento h_{new} na forma

$$h_{new} = \frac{h_{old}}{\zeta_{ie}^{1/p}}, \quad (20)$$

onde h_{old} representa o tamanho do elemento corrente.

7 PROJEÇÃO BASEADA NA RECUPERAÇÃO QUADRÁTICA DO ERRO (RQE)

Como posto anteriormente, o objetivo principal do presente trabalho é propor e analisar uma nova técnica de projeto da nova malha de elementos por refino h-adaptativo. Essa técnica busca encontrar o tamanho ótimo de cada elemento para que um valor limite do erro não seja ultrapassado. Para isso, envolve o conceito de recuperação quadrática do erro em densidade de energia em conjunto com técnicas de otimização.

Considere um problema linear escalar, cuja solução aproximada é conhecida para uma malha composta de elementos do tipo CST. Neste caso, define-se o gradiente aproximado do campo escalar (\mathbf{G}^{MEF}) e o gradiente recuperado do campo escalar (\mathbf{G}^*), respectivamente por:

$$\mathbf{G}^{MEF} = \begin{Bmatrix} G_{11}^{MEF} \\ G_{22}^{MEF} \end{Bmatrix} \quad e \quad \mathbf{G}^* = \begin{Bmatrix} G_{11}^* \\ G_{22}^* \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

No corrente estudo, o gradiente recuperado do campo escalar é obtido através do método SPR, que fornece campos lineares de gradientes em cada elemento. Assim, define-se a aproximação linear dos gradientes recuperados como

$$\begin{Bmatrix} G_{11}^* \\ G_{22}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_0^{11} + B_1^{11}x + B_2^{11}y \\ B_0^{22} + B_1^{22}x + B_2^{22}y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0^{11} & B_1^{11} & B_2^{11} \\ B_0^{22} & B_1^{22} & B_2^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_G^* \mathbf{P}, \quad (22)$$

onde \mathbf{B}_G^* representa a matriz com os coeficientes dos campos lineares dos gradientes recuperados, x e y são as coordenadas de um ponto qualquer, definido em relação ao baricentro do elemento e, portanto, \mathbf{P} é um vetor de coordenadas relativas.

Deste modo, para uma componente qualquer G_{ij}^* dos gradientes recuperados, pode-se escrever:

$$G_{ij}^* = B_0^{ij} + B_1^{ij}x + B_2^{ij}y = \mathbf{B}_G^{ijT} \mathbf{P}. \quad (23)$$

Aplicando a Eq. (23) para cada nó que compõe um determinado elemento tem-se:

$$G_{ij(nó1)}^* = B_0^{ij} + B_1^{ij}x_1 + B_2^{ij}y_1, \quad (24)$$

$$G_{ij(nó2)}^* = B_0^{ij} + B_1^{ij}x_2 + B_2^{ij}y_2, \quad (25)$$

$$G_{ij(nó3)}^* = B_0^{ij} + B_1^{ij}x_3 + B_2^{ij}y_3. \quad (26)$$

Este sistema de equações, na forma matricial, pode ser escrito como

$$\begin{Bmatrix} G_{ij(nó1)}^* \\ G_{ij(nó2)}^* \\ G_{ij(nó3)}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_0^{ij} \\ B_1^{ij} \\ B_2^{ij} \end{Bmatrix}. \quad (27)$$

Assim, a solução deste sistema de equações fornece as componentes B_G^{ij} da aproximação linear para a ij -ésima componente do gradiente recuperado. Aplicando-se a todas as componentes do gradiente do campo escalar, obtêm-se os coeficientes da matriz B_G^* .

7.1 Cálculo do erro total em uma região qualquer no entorno de um elemento

Como posto através da Eq. (1), o erro pode ser definido como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada obtida pelo MEF (Zienkiewicz e Zhu, 1987). Uma maneira de quantificar o erro é através da norma em energia, a qual pode ser vista como

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \int_{\Omega} \Delta U \, d\Omega = \int_{\Omega} \Delta \mathbf{G}^T \mathbf{k} \Delta \mathbf{G} \, d\Omega, \quad (28)$$

sendo $\|\mathbf{u}\|_E$ a norma do erro em energia em uma região do domínio qualquer, \mathbf{k} um tensor linear de segunda ordem, ΔU a função densidade do erro em energia e $\Delta \mathbf{G}$ o vetor da diferença entre os gradientes aproximados via MEF e os gradientes recuperados:

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}^* - \mathbf{G}^{MEF}. \quad (29)$$

Aplicando a Eq. (22) à Eq. (29) obtém-se

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{G}^* - \mathbf{G}^{MEF} = \mathbf{B}_G^* \mathbf{P} - \mathbf{G}^{MEF}, \quad (30)$$

a qual pode ser expandida na forma

$$\Delta \mathbf{G} = \begin{bmatrix} B_0^{11} & B_1^{11} & B_2^{11} \\ B_0^{22} & B_1^{22} & B_2^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11}^{MEF} & 0 & 0 \\ G_{22}^{MEF} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_0^{11} - G_{11}^{MEF}) & B_1^{11} & B_2^{11} \\ (B_0^{22} - G_{22}^{MEF}) & B_1^{22} & B_2^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

$$\Delta \mathbf{G} = \mathbf{B}_G \mathbf{P},$$

onde \mathbf{B}_G é a matriz com os coeficientes do campo linear resultante da diferença entre os gradientes recuperados e gradientes aproximados obtidos via MEF (\mathbf{G}^{MEF}). Desta maneira, a função densidade do erro em energia pode ser posta como:

$$\Delta U = \Delta U(x, y) = \Delta \mathbf{G}^T \mathbf{k} \Delta \mathbf{G} = \mathbf{P}^T \mathbf{B}_G^T \mathbf{k} \mathbf{B}_G \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{Z} \mathbf{P}, \quad (32)$$

onde \mathbf{Z} é uma matriz simétrica definida pelo produto:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}_G^T \mathbf{k} \mathbf{B}_G. \quad (33)$$

Neste caso, a expansão do termo $\Delta U(x, y)$ resulta em:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \mathbf{P}^T \mathbf{Z} \mathbf{P} = \\ &= (Z_{11}) + (Z_{12} + Z_{21})x + (Z_{13} + Z_{31})y + [Z_{22}x^2 + (Z_{23} + Z_{32})xy + Z_{33}y^2] \\ &= \Delta U_0 + (M_1x + M_2y) + (H_{11}x^2 + 2H_{12}xy + H_{22}y^2) \\ &= \Delta U_0 + \mathbf{M}x + x^T \mathbf{H}x, \end{aligned} \quad (34)$$

onde ΔU_0 , \mathbf{M} , \mathbf{H} e \mathbf{x} são dados por

$$\Delta U_0 = Z_{11}, \quad (35)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{12} + Z_{21} \\ Z_{13} + Z_{31} \end{Bmatrix}, \quad (36)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}. \quad (38)$$

Por questões de simplificação, considera-se que o domínio de um elemento com centro no mesmo baricentro seja uma circunferência de raio r . Neste caso, pode-se definir a norma do erro em energia em uma região de domínio circular Ω_o como:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{E_o}^2 &= E_o^2 = \int_{\Omega_o} \Delta U \, d\Omega_o \\ &= \int_{\Omega_o} \left[\Delta U_0 + (M_1 x + M_2 y) + (H_{11} x^2 + 2H_{12} xy + H_{22} y^2) \right] d\Omega_o \\ &= \Delta U_0 \int_{\Omega_o} d\Omega_o + M_1 \int_{\Omega_o} x \, d\Omega_o + M_2 \int_{\Omega_o} y \, d\Omega_o + H_{11} \int_{\Omega_o} x^2 \, d\Omega_o + \dots \\ &\dots + 2H_{12} \int_{\Omega_o} xy \, d\Omega_o + H_{22} \int_{\Omega_o} y^2 \, d\Omega_o \\ &= \Delta U_0 A_0 + H_{11} I_y + H_{22} I_x, \end{aligned} \quad (39)$$

onde A_0 corresponde a área do círculo e I_x e I_y são os momentos de inércia do mesmo, dados por

$$I_x = I_y = \pi r^4 / 4. \quad (40)$$

Neste caso, uma estimativa para o erro em uma região circular (E_o), de raio genérico r , na região do elemento em análise na malha corrente, pode ser posta como

$$E_o^2 = \pi r^2 \left[\Delta U_0 + \text{tr}(\mathbf{H}) \frac{r^2}{4} \right]. \quad (41)$$

7.2 Projeção do novo tamanho elementar via otimização

Esta seção tem por objetivo encontrar um triângulo equilátero de arestas h_{new} , centrado no baricentro de um elemento triangular Ω_e de arestas h_{old} e cuja área é aproximadamente a de uma circunferência de raio r . O novo elemento deve possuir, em seu interior, um valor de erro total (E_o) limitado por um erro limite (ε_{adm}). Matematicamente, pode-se encontrar o tamanho ótimo do novo elemento em termos de um problema de otimização, onde o objetivo

é maximizar a área da circunferência centrada no elemento, mas restrito a $E_o^2 \leq \varepsilon_{adm}^2$. Assim, este problema de otimização pode ser posto na forma padrão como:

$$P : \begin{cases} \text{minimizar } -A_o = -\pi r^2 \\ \text{Restrição : } g(r) \leq 0 \end{cases} \quad (42)$$

onde $g(r)$ é a função restrição do erro no elemento, dada por

$$g(r) = E_o^2 - \varepsilon_{adm}^2 = \pi r^2 \left[\Delta U_0 + tr(\mathbf{H}) \frac{r^2}{4} \right] - \varepsilon_{adm}^2 \quad (43)$$

A solução do problema de otimização (Eq. (42)) pode ser realizada aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange. Este se baseia na construção da função Lagrangeano (L), a qual depende do raio r e do multiplicador de Lagrange (λ^*), posta como

$$\begin{aligned} L(r, \lambda^*) &= -\pi r^2 + \sum \lambda^* g(x) \\ &= -\pi r^2 + \lambda^* \left[\pi r^2 \left(\Delta U_0 + tr(\mathbf{H}) \frac{r^2}{4} \right) - \varepsilon_{adm}^2 \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Assim, a determinação da área ótima, contanto que o erro não ultrapasse um valor limite, pode ser obtida através da aplicação das condições necessárias de primeira ordem para o ótimo da função Lagrangeano, as quais são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -2\pi r + \lambda^* \left[2\pi r \Delta U_0 + \pi r^3 tr(\mathbf{H}) \right] = 2\pi r \left[-1 + \lambda^* \left(\Delta U_0 + \frac{r^2}{2} tr(\mathbf{H}) \right) \right] = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^*} = g(r) = \pi r^2 \left[\Delta U_0 + tr(\mathbf{H}) \frac{r^2}{4} \right] - \varepsilon_{adm}^2 = 0 \quad (46)$$

Reescrevendo a Eq. (46) na forma

$$\left[\frac{\pi}{4} tr(\mathbf{H}) \right] r^4 + [\pi \Delta U_0] r^2 - \varepsilon_{adm}^2 = 0 \quad (47)$$

e aplicando as seguintes definições: $r^2 = R$, $A = (\pi tr(\mathbf{H})) / 4$, $B = \pi \Delta U_0$ e $C = -\varepsilon_{adm}^2$, a Eq.(47) pode ser reescrita em termos de uma função do segundo grau da forma $AR^2 + BR + C = 0$. Nesse caso, em especial, esta equação possui uma única raiz real e positiva dada por

$$R = r^2 = 2 \frac{\sqrt{(\Delta U_0)^2 + \frac{tr(\mathbf{H})}{\pi} \varepsilon_{adm}^2} - \Delta U_0}{tr(\mathbf{H})}. \quad (48)$$

Assim, dividindo o numerador e o denominador por ΔU_0 (supondo $\Delta U_0 > 0$), a Eq. (48) pode ser expressa como

$$r = \left(2 \left[\frac{\sqrt{1+\xi} - 1}{\text{tr}(\mathbf{H}) / \Delta U_0} \right] \right)^{1/2}, \quad (49)$$

onde

$$\xi = \frac{\text{tr}(\mathbf{H}) \varepsilon_{adm}^2}{\pi \Delta U_0^2}. \quad (50)$$

Definido qual deve ser o raio ótimo da circunferência associado ao erro elementar, pode-se calcular a área da circunferência ($A_0 = \pi r^2$) referente a esse raio, dado pela Eq. (49). Admitindo que esta área seja igual a área do novo elemento triangular e, ainda, que este elemento seja equilátero de arestas h_{new} , pode-se estimar o novo tamanho elementar em função do raio da circunferência como

$$h_{new} = \sqrt{4\pi 3^{-1/2}} r \cong 2,7r. \quad (51)$$

8 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de demonstrar a qualidade e funcionalidade da técnica de Recuperação Quadrática do Erro (RQE), nesta seção são apresentados dois modelos de excitações de domínio aplicados ao problema linear escalar utilizando um processo de estimativa de erro baseado no método SPR e considerando o elemento CST. Além disso, de forma a quantificar o quão precisa e robusta a nova técnica se mostra, os casos descritos são também submetidos a um processo h-adaptativo seguindo a projeção Ch^p baseada no critério de equidistribuição do erro elementar.

Em ambos os problemas, são realizadas quatro iterações adaptativas para cada tipo de projeção com o intuito de avaliar os parâmetros de qualidade das malhas geradas. A única limitação imposta sobre o tamanho elementar, é que este não deva aumentar mais do que 1,5 vezes e diminuir mais do que 3 vezes em cada uma das iterações. A programação é realizada utilizando o software Matlab e a geração da malha adaptativa emprega o gerador de malhas BAMG (Hecht, 2006). Devido ao fato do gerador de malha necessitar de informações nodais do tamanho elementar, define-se o novo tamanho elementar em um nó ($h_{nó}$) conectado a m elementos de tamanho h_{new} através da expressão

$$\frac{1}{h_{nó}} = \frac{1}{m} \sum_{ie=1}^m \frac{1}{h_{new}^{ie}}. \quad (52)$$

8.1 Problema 1

Nesse caso, considerando um problema definido em um domínio Ω e submetido unicamente a condições de contorno de Dirichlet homogêneas, tem-se que sua forma variacional pode ser posta como

$$\text{Encontrar } u(x, y) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \quad (53)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{k} \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega} v f \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

onde u é um campo escalar, \mathbf{k} um tensor linear de segunda ordem (no corrente problema, considerado isotrópico e unitário), f a excitação de domínio, ∇ é o operador gradiente, v é uma função de variação cinematicamente admissível e H_0^1 denota o espaço de Hilbert de primeira ordem com suporte compacto em Ω .

Neste exemplo, a excitação de domínio aplicada é selecionada tal que a solução analítica é dada por (Zienkiewicz e Taylor, 2000; Castellazzi et al., 2010)

$$u(x, y) = x(1-x)y(1-y)\arctan[\alpha(\rho - \rho_0)], \quad (54)$$

onde $\rho = (x+y)/\sqrt{2}$, $\rho_0 = 0,8$ e $\alpha = 20$. A Fig. 1 representa a solução exata em termos do campo escalar.

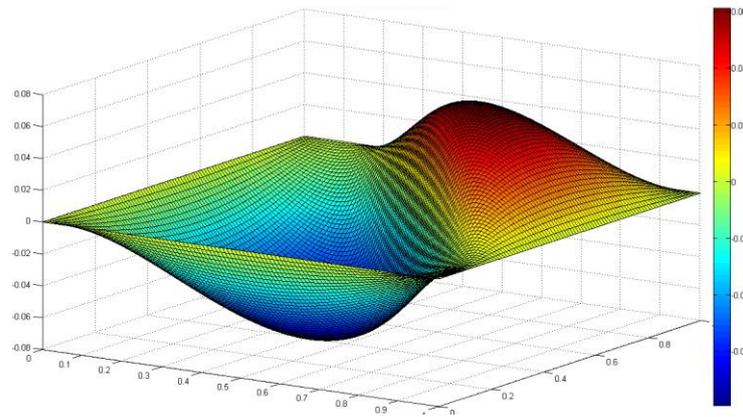


Figura 1. Problema 1: Solução analítica (Silva et al., 2015).

Para ambas as projeções elementares, parte-se de uma malha uniforme com 244 elementos buscando-se um erro relativo percentual admissível de 5% da energia total acumulada. Na Fig. 2 pode-se visualizar a distribuição dos elementos ao longo do domínio para a projeção Ch^p (Fig. 2(a)) e para a projeção RQE (Fig. 2(b)). Comparando-se a Fig. 2(a) com a Fig. 2(b), percebe-se um comportamento mais suave quando a projeção RQE é empregada, havendo uma menor oscilação quanto à distribuição dos elementos na malha entre as iterações.

Na Fig.3 podem-se visualizar alguns parâmetros globais da qualidade das malhas geradas. Nota-se, na Fig. 3(a), que ambas as projeções tendem ao valor do erro relativo percentual admissível de 5% e, portanto, globalmente encontram-se próximas da malha ótima. Por outro lado, cabe ressaltar que a projeção RQE utiliza um número de graus de liberdade (NGL) significativamente inferior à projeção Ch^p (Fig. 3(b)), indicando uma melhor distribuição dos elementos na malha. Também é possível visualizar na Fig. 4(a) os valores dos índices de efetividade globais, indicando uma boa estimativa dos erros ($\theta \approx 1$) e, conseqüente qualidade dos valores de gradientes recuperados pela técnica SPR.

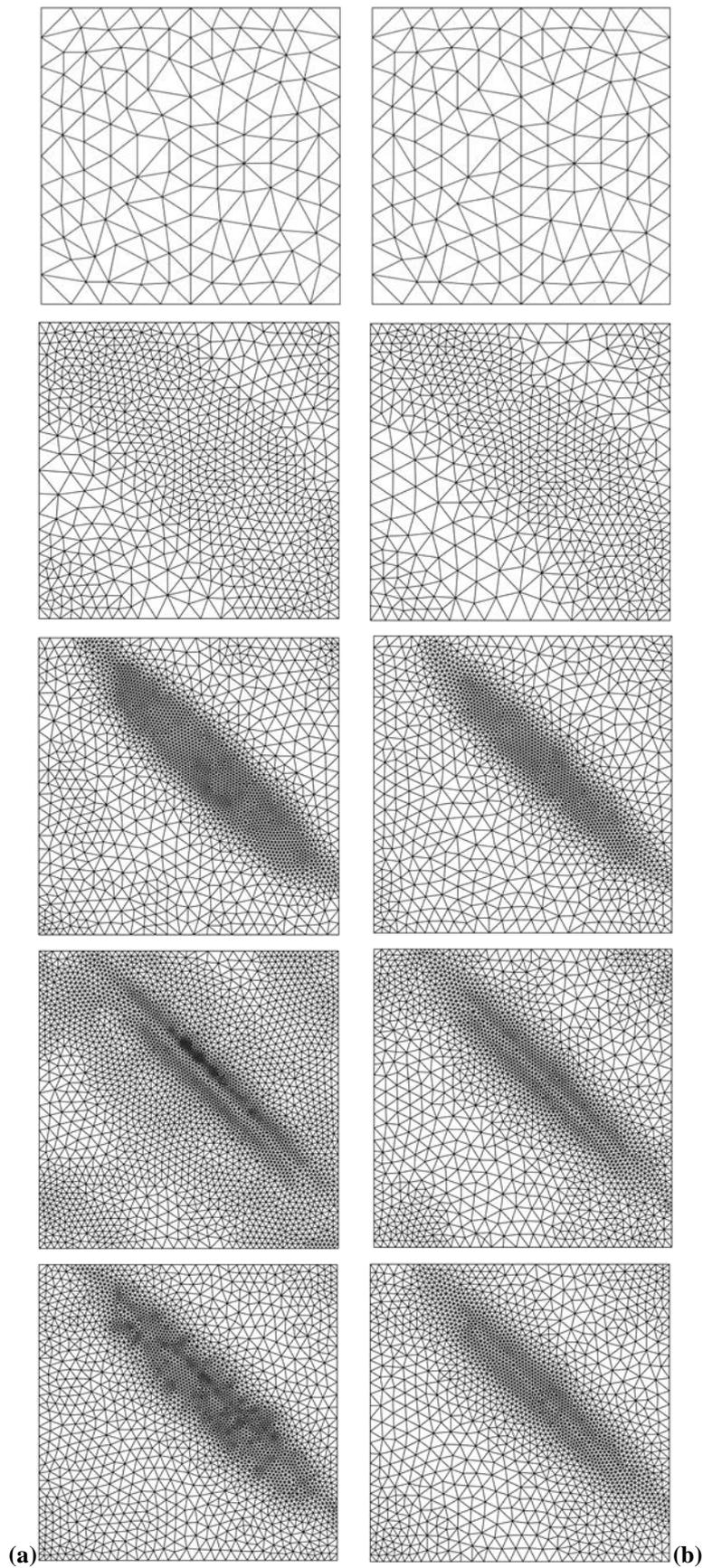


Figura 2. Problema 1: Malha de elementos finitos. (a) Projeção Ch^p . (b) Projeção RQE

Além disso, nas Figuras 4(b), 5(a) e 5(b) são expostos parâmetros auxiliares para determinação da qualidade das malhas, sendo estes a média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ($\bar{\zeta}_{méd}$), o desvio do parâmetro de erro local elementar ($D_{\bar{\zeta}}$) e, representando uma medida local crítica, o máximo valor do parâmetro de erro local elementar ($\bar{\zeta}_{máx}$).

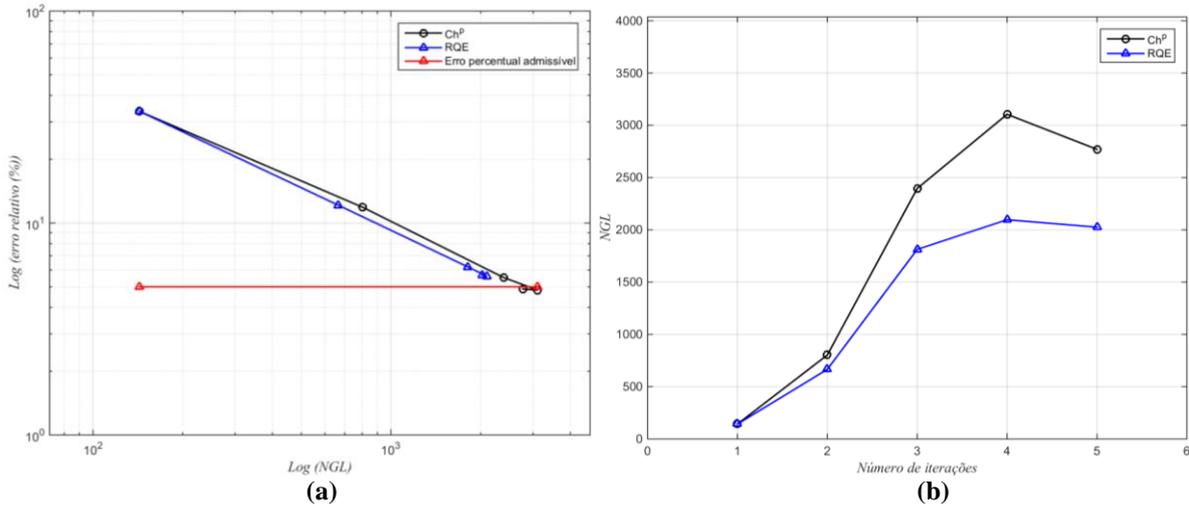


Figura 3. Problema 1: (a) Log (NGL) x Log (erro relativo %). (b) Número de iterações x NGL.

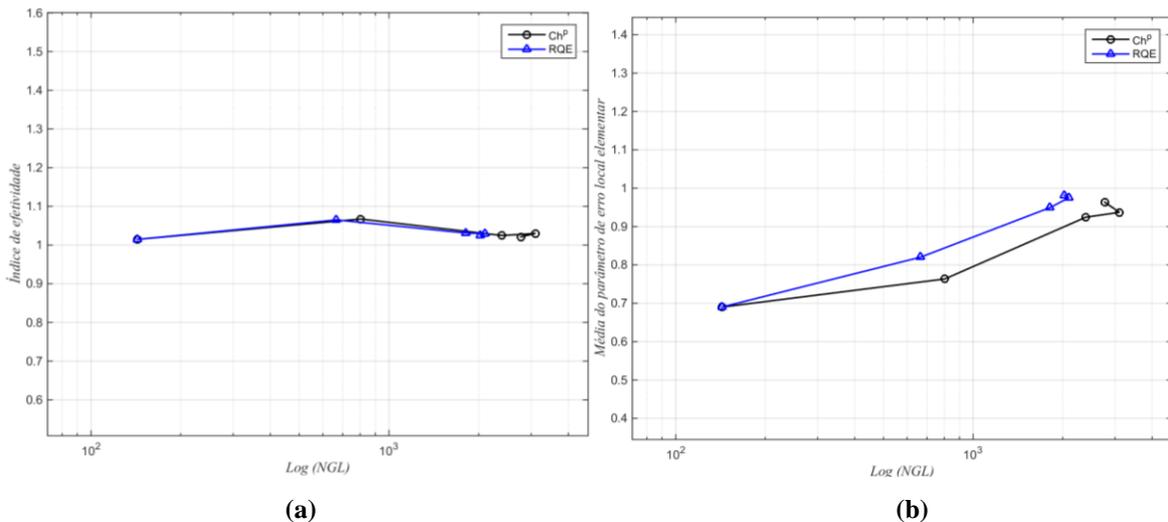


Figura 4. Problema 1: (a) Log (NGL) x Índice de efetividade. (b) Log (NGL) x $\bar{\zeta}_{méd}$.

Através dessas medidas percebe-se claramente que, quando a projeção RQE é empregada, uma maior proximidade com a malha ótima desejada é obtida. Ou seja, quando comparada com a projeção Ch^p tem-se um $\bar{\zeta}_{méd}$ mais próximo da unidade, um $D_{\bar{\zeta}}$ mais próximo de zero e um $\bar{\zeta}_{máx}$ inferior.

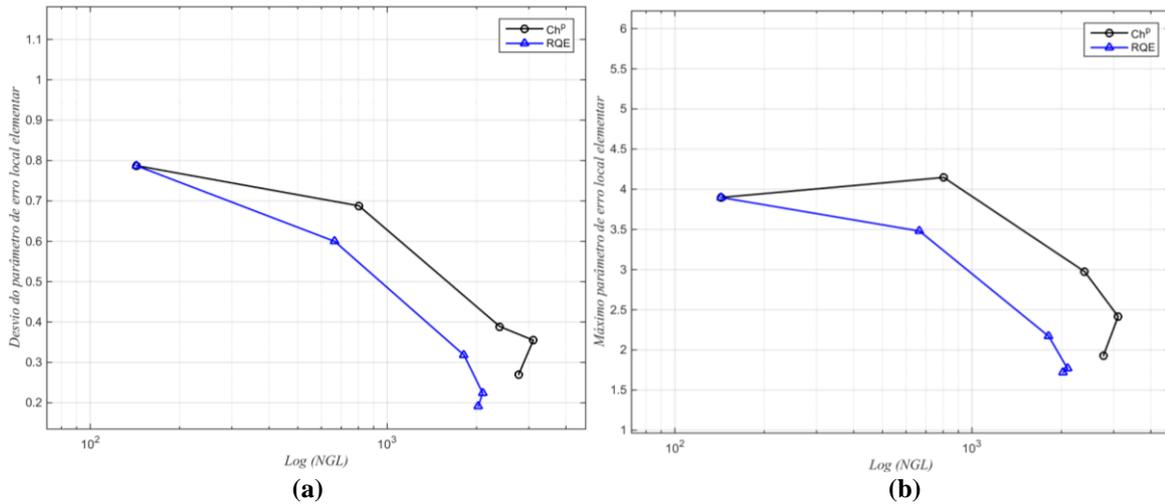


Figura 5. Problema 1: (a) $\text{Log}(NGL) \times D_{\bar{\zeta}}$. (b) $\text{Log}(NGL) \times \bar{\zeta}_{\text{máx}}$.

8.2 Problema 2

Neste, o problema proposto por Mitchell (2013) é adaptado, sendo que o termo de excitação de domínio empregado é especificado de modo que a solução analítica (Fig. 6) seja dada por

$$T(x, y) = 2^{2(a+b)} x^a (1-x)^a y^b (1-y)^b, \quad (55)$$

onde $a = 20$ e $b = 1$.

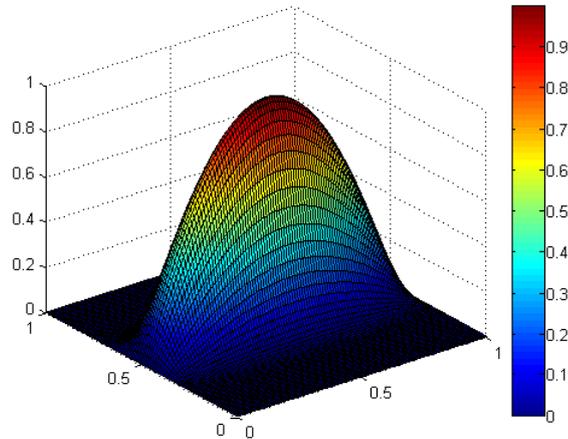


Figura 6. Problema 2: Solução analítica (Silva et al., 2015).

Nas Figuras 7, 8 e 9 são explanados, os parâmetros de qualidade das malhas. Conforme exposto para o Problema 1, a projeção RQE apresenta ótimas estimativas do novo tamanho elementar, conduzindo a malhas quase-ótimas. Além disso, quando comparada com a projeção Ch^p , a projeção RQE apresenta uma malha com um menor número de graus de liberdade (Fig. 7(b)) e, em geral, possui melhores índices globais ($\bar{\zeta}_{av}$: Fig. 8(b) e $D_{\bar{\zeta}}$: Fig. 9(a)) e locais ($\bar{\zeta}_{\text{máx}}$: Fig. 9(b)). Podem-se observar ainda, na Fig. 10, as malhas de elementos finitos para a projeção Ch^p e para a projeção RQE .

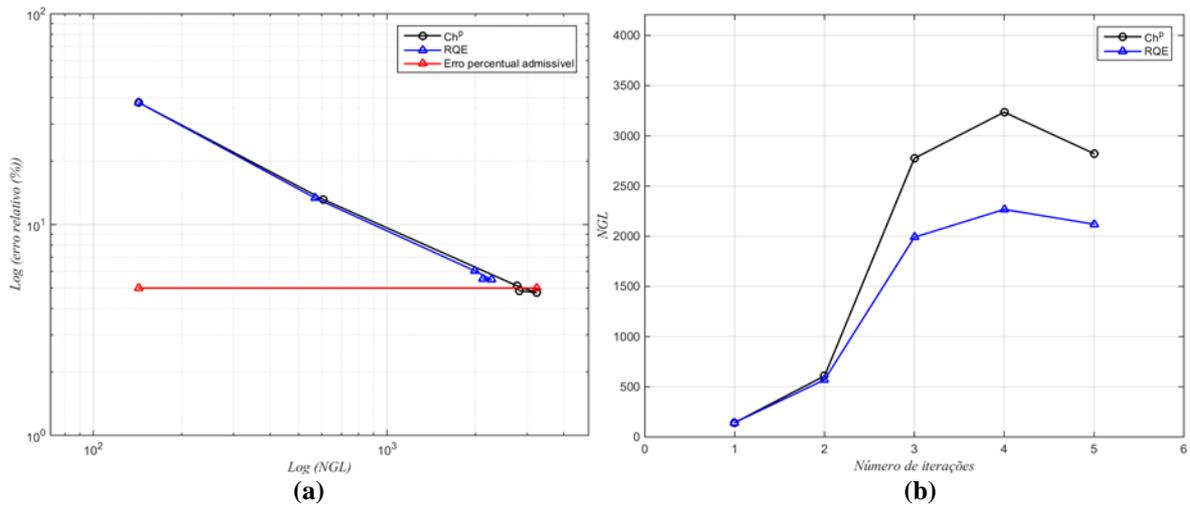


Figura 7. Problema 2: (a) Log (NGL) x Log (erro relativo %). (b) Número de iterações x NGL.

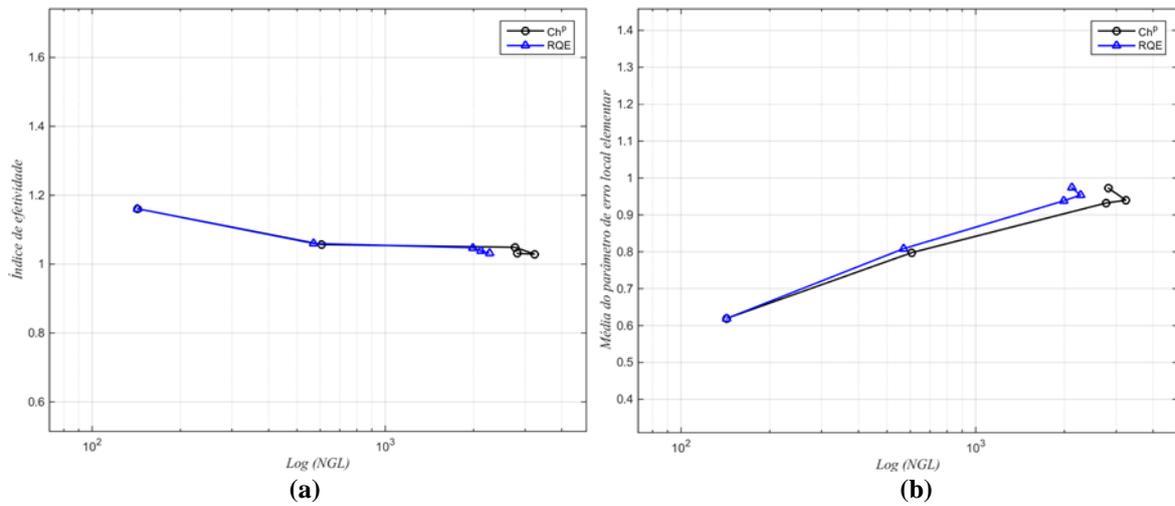


Figura 8. Problema 2: (a) Log (NGL) x Índice de efetividade. (b) Log (NGL) x $\bar{\zeta}_{méd}$.

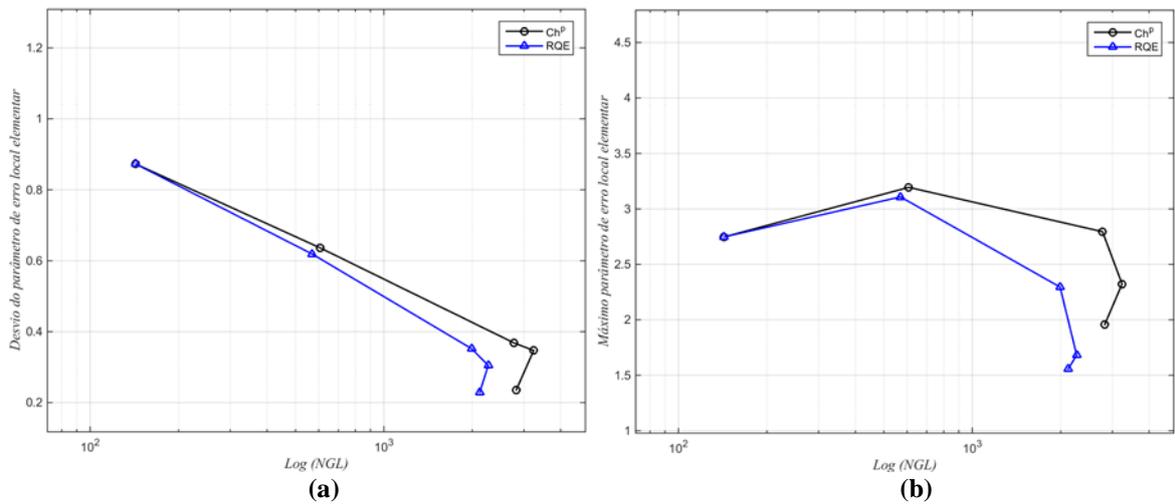


Figura 9. Problema 2: (a) Log (NGL) x $D_{\bar{\zeta}}$. (b) Log (NGL) x $\bar{\zeta}_{máx}$.

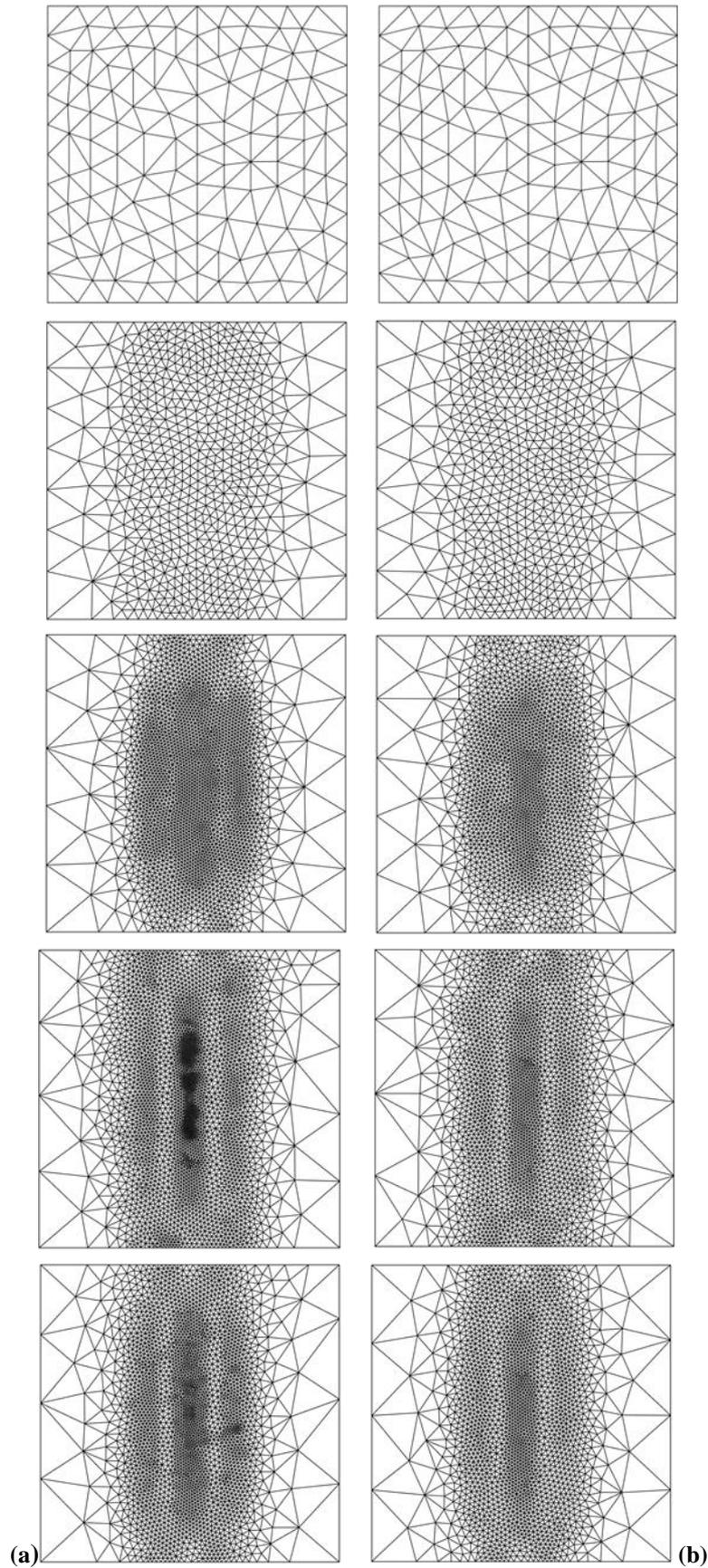


Figura 10. Problema 2: Malha de elementos finitos. (a) Projeção Ch^p . (b) Projeção RQE.

9 CONCLUSÕES

O corrente trabalho teve como objetivo o desenvolvimento e aplicação de uma nova técnica de projeção isotrópica do tamanho elementar, denominada projeção RQE. Considerando os problemas lineares escalares expostos, embora esta metodologia seja inicialmente limitada à aplicação de elementos lineares, quando comparada com a clássica determinação do novo tamanho elementar proposta por Zienkiewicz e Zhu (projeção Ch^p), a mesma, em geral, mostrou-se mais precisa. Essa precisão pode ser verificada através dos parâmetros de qualidade das malhas geradas, tanto em níveis globais, quanto em níveis elementares. Além disso, frisa-se que a metodologia descrita não se limita ao caso bidimensional, podendo ser aplicada ao caso tridimensional.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná pela infraestrutura e o ambiente de pesquisa, a Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Instituto Federal do Paraná.

REFERÊNCIAS

- Ainsworth, M., Oden, J. T., 2000. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, 1. ed., John Wiley and Sons.
- Barlow, J., 1976. Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, pp. 243–251.
- Benedetti, A., Miranda, S., & Ubertini, F., 2006. A posteriori error estimation based on the super convergent recovery by compatibility in patches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 67, pp. 108–131.
- Boroomand, B., & Zienkiewicz, O. C., 1997. Recovery by equilibrium in patches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pp. 137–164.
- Castellazzi, G., Miranda, S., & Ubertini, F., 2010. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, pp. 379–390.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J., 2002. *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley and Sons.
- Díez, P., & Huerta, A., 1999. A unified approach to remeshing strategies for finite element h-adaptivity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, pp. 215 – 229.
- Hecht, F., 2006. BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator, draft version v1.00.
- Huang, Y., & Yi, N., 2010. The Superconvergent Cluster Recovery Method. *Journal of Scientific Computing*, vol. 44, pp. 301–322.
- Mitchell, W. F., 2013. A collection of 2D elliptic problems for testing adaptive grid refinement algorithms. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 220, pp. 350-364.
- Onâte, E., & Bugeda, G., 1993. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. *Engineering Computations*, vol. 10, pp. 307–321.

- Prudhomme, S., Oden, J. T., Westermann, T., Bass, J., & Botkin, M. E., 2003. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, pp. 1193–1224.
- Reddy, J. N., 2006. *An Introduction to the Finite Element Method*. 3. ed., Mc Graw Hill.
- Silva, J., Silva, F. E. C., Pereira, J. T. & Gonçalves, J. C. L., 2015. Análise de diferentes estimadores de erro a posteriori aplicados a problemas bidimensionais utilizando refino h-adaptativo. In: *Congresso Nacional de Matemática Aplicada à Indústria (CNMAI)*, pp. 695 – 704.
- Ubertini, F., 2004. Patch recovery based on complementary energy. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, pp. 1501–1538.
- Wiberg, N. E., & Abdulwahab, F., 1992. An efficient postprocessing technique for stress problems based on superconvergent derivatives and equilibrium. *Numerical Methods in Engineering*, pp. 25–32.
- Wiberg, N. E., Abdulwahab, F., & Ziukas, S., 1994. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 3417–3440.
- Wiberg, N. E., Abdulwahab, F., & Li, X. D., 1997. Error estimation and adaptive procedures based on Superconvergent Patch Recovery (SPR) techniques. *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 203–242.
- Zhang, Z., & Naga, A., 2005. A new finite element gradient recovery method: Superconvergence Property. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 26, pp. 1192–1213.
- Zhu, J. Z., & Zienkiewicz, O. C., 1988. Adaptive techniques in the finite element method. *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 4, pp. 197–204.
- Zienkiewicz, O. C., 2006. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 207–213.
- Zienkiewicz, O. C., Boroomand, B., & Zhu, J. Z., 1999. Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 176, pp. 111–125.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis*. Butterworth Heinemann.
- Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1987. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 337–357.
- Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1992a. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1331–1364.
- Zienkiewicz, O. C., & Zhu, J. Z., 1992b. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp.1365–1382.