



UMA SOLUÇÃO HÍBRIDA ANALÍTICO-NUMÉRICA PARA UM PROBLEMA TÉRMICO EM DUTOS ANULARES CONCÊNTRICOS

Thiago Antonini Alves

thiagooalves@utfpr.edu.br

DAMEC/UTFPR/Câmpus Ponta Grossa

Av. Monteiro Lobato, s/nº, km 04, Jardim Carvalho, 84.016-210, Ponta Grossa, PR, Brasil

Ricardo Alan Verdú Ramos

Cassio Roberto Macedo Maia

ramos@dem.feis.unesp.br

cassio@dem.feis.unesp.br

DEM/FE/IS/Unesp

Av. Brasil, 56, Centro 15.385-000, Ilha Solteira, SP, Brasil

Abstract. Neste trabalho foi apresentada uma solução híbrida analítico-numérica para um problema térmico associado à transferência de calor por convecção forçada em um escoamento laminar desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos Newtonianos com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos anulares concêntricos submetidos a condições de contorno de Dirichlet. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno uma Transformação Conforme foi utilizada visando transformar o domínio para um sistema de coordenadas mais apropriado. Feito isso, a Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) foi aplicada na Equação da Energia para determinação do campo de temperatura. Os resultados numéricos foram obtidos para parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de Nusselt local, médio e limite e comprimento de entrada térmica. Estes resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma excelente concordância.

Keywords: Transformada Integral, Transformação Conforme, Convecção forçada laminar, Anular concêntrico

1 INTRODUÇÃO

Na Engenharia, uma importante linha de pesquisa científico-tecnológica é a obtenção de técnicas, de metodologias e de procedimentos que possibilitem a interpretação mais realista possível dos fenômenos naturais, proporcionando assim, resultados precisos e confiáveis. Em particular, a solução de problemas difusivos elípticos e difusivo-convectivos parabólicos sempre representou um grande desafio à Engenharia, uma vez que, as equações diferenciais fundamentais que governam os princípios de conservação, são, em via de regra, de difícil solução (Maia, 2003).

Com a evolução dos equipamentos eletroeletrônicos e das ferramentas computacionais ocorrida nas últimas décadas, diversas técnicas e metodologias numéricas foram propostas e desenvolvidas para a obtenção de soluções, mesmo que aproximadas, de problemas que apresentavam estruturas complexas. Apesar das dificuldades decorrentes do enorme esforço computacional, do longo tempo de processamento, das dificuldades na elaboração de algoritmos numéricos, da instabilidade numérica e da convergência mais lenta, estas técnicas se desenvolveram rapidamente, uma vez que atendem satisfatoriamente as necessidades do engenheiro e/ou do projetista (Pelegriani, 2005).

Recentemente, inúmeros cientistas e pesquisadores estão concentrando seus esforços no desenvolvimento de técnicas híbridas analítico-numéricas que garantam precisão e confiabilidade nos resultados por elas obtidos. Em particular, a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG (Cotta, 1998), é uma ferramenta com estas características e vem demonstrando ser eficaz na solução de problemas de Mecânica dos Fluidos e de Transferência de Calor e Massa, os quais, geralmente, não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas. A Técnica da Transformada Integral Generalizada permite um tratamento analítico elegante e formal proporcionando um menor esforço numérico-computacional para a obtenção de solução de problemas (Maia *et al.*, 2005).

Neste contexto, Antonini Alves (2006) propôs uma combinação de duas ferramentas matemáticas para a obtenção de solução de uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica. Mais precisamente, neste trabalho é apresentada uma solução híbrida analítico-numérica para um problema térmico associado à transferência de calor por convecção forçada em um escoamento laminar desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* com perfil de temperatura de entrada uniforme no interior de dutos anulares concêntricos submetidos a condições de contorno de *Dirichlet* (temperatura prescrita na parede). Geralmente, problemas com essa geometria são resolvidos através da utilização do sistema de coordenadas cilíndricas. Todavia, para facilitar o tratamento dos operadores *Laplacianos* e a aplicação das condições de contorno, proceder-se-á uma mudança de variáveis através da aplicação de uma Transformação Conforme (Churchill, 1975), transformando o domínio original em um retângulo no novo sistema de coordenadas. Para a obtenção da distribuição de temperaturas e, conseqüentemente, dos parâmetros térmicos de interesse, a TTIG é aplicada sobre a equação governante do problema, pois, para este caso, a equação diferencial parcial que descreve a conservação de energia é transformada em um sistema de equação algébricas de fácil solução. Este procedimento vem sendo aplicado com sucesso para a obtenção da solução híbrida analítico-numérica de problemas difusivos e difusivo-convectivos com geometrias convencionais e não-convencionais (Maia *et al.*, 2006; Lima *et al.*, 2007; Navieira-Cotta *et al.*, 2010; Silva *et al.*, 2011; Sphaier, 2012; Cotta *et al.*, 2013; Chahub *et al.*, 2014; Antonini Alves *et al.*, 2014a, 2015a, 2015b, 2015c, 2016; Pelegriani *et al.*, 2014a, 2014b; Knupp *et al.*, 2015a, 2015b, 2015c).

2 PROCEDIMENTO HÍBRIDO ANALÍTICO-NUMÉRICO

Na formulação do problema em questão foi considerado um escoamento laminar com perfil de temperatura de entrada uniforme fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento no interior de dutos anulares concêntricos submetidos a condições de contorno de *Dirichlet* (temperatura prescrita na parede). As propriedades termofísicas dos fluidos permaneceram constantes em todo o domínio e os efeitos da dissipação viscosa e da condução axial foram desprezados. Desta maneira, para fluidos *Newtonianos*, a Equação da Energia pode ser expressa por

$$\rho c_p w(x,y) \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = k \nabla^2 T(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\}, \quad (1)$$

sendo que, ρ é a massa específica, c_p é o calor específico a pressão constante, k é condutividade térmica, w é a velocidade, T é a temperatura, e Γ e Ω são o contorno e o domínio, respectivamente, da seção transversal do duto anular concêntrico, como ilustrado esquematicamente na Fig. 1.

As condições de entrada e de contorno são expressas por

$$T(x,y,z) = T_0, \quad \{(x,y) \in \Omega, z = 0\}, \quad (2)$$

$$T(x,y,z) = T_p, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\}, \quad (3)$$

sendo que, T_0 e T_p são as temperaturas de entrada e da parede, respectivamente.

O perfil de velocidade $w(x,y)$ do escoamento laminar no interior do duto anular concêntrico foi obtido por meio da TTIG, conforme apresentado em Antonini Alves *et al.* (2014b).

2.1 Adimensionalização

A Equação da Energia e as condições de entrada e de contorno, Eqs. (1), (2) e (3), podem ser escritas na forma adimensional como

$$W(X,Y) \frac{\partial \theta(X,Y,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta(X,Y,Z)}{\partial Y^2}, \quad \{(X,Y) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (4)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 1, \quad \{(X,Y) \in \Omega, Z = 0\}, \quad (5)$$

$$\theta(X,Y,Z) = 0, \quad \{(X,Y) \in \Gamma, Z > 0\}, \quad (6)$$

com,

$$X = \frac{x}{D_h}, \quad Y = \frac{y}{D_h}, \quad Z = \frac{z}{D_h Pe}, \quad D_h = \frac{4 A_S}{Per}, \quad (7-11)$$

$$Pe = \frac{\rho c_p w_{méd} D_h}{k}, \quad (12)$$

$$W(X,Y) = \frac{w(x,y)}{w_{méd}}, \quad \theta(X,Y,Z) = \frac{T(X,Y,Z) - T_p}{T_0 - T_p}, \quad (13)$$

sendo que, D_h é o diâmetro hidráulico, Pe é o número de Péclet, A_S é a área da seção transversal, Per é o perímetro do contorno e $w_{méd}$ é a velocidade média do fluido.

2.2 Transformação de coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico, foi utilizada uma Transformação Conforme expressa por

$$\zeta = R_e e^{i\omega}, \quad (14)$$

sendo, $R_e = r_e/D_h$, $R_i = r_i/D_h$, $\zeta = X + iY$ e $\omega = u + iv$. Esta relação permite transformar o domínio anular concêntrico no plano (X,Y) em um domínio retangular no plano (u,v) conforme ilustrado na Figura 1.

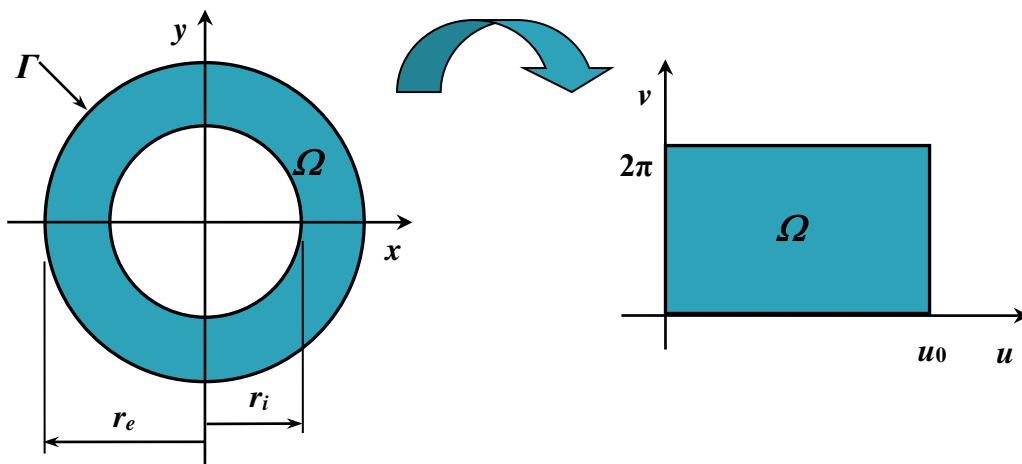


Figura 1. Transformação do domínio anular concêntrico no plano (X,Y) para o plano (u,v) .

As relações de transformação de coordenadas são expressas por

$$X = R_e e^{-v} \cos(u), \quad (15)$$

$$Y = R_e e^{-v} \sen(u), \quad (16)$$

$$Z = z. \quad (17)$$

Como a Transformação Conforme dada pela Eq. (14) satisfaz as condições de *Cauchy-Riemann*, os coeficientes métricos h_u , h_v e o *Jacobiano* $J(u,v)$ desta transformação podem ser expressos por

$$h_u(u,v) = h_v(u,v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = R_e e^{-v}, \quad (18)$$

$$J(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = R_e^2 e^{-2v}. \quad (19)$$

Com isso, a Equação da Energia, Eq. (4), reescrita no novo sistema de coordenadas gerado pela Transformação Conforme pode ser expressa por

$$H(u,v) \frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta(u,v,Z)}{\partial v^2}, \quad \{(u,v) \in \Omega\}, \quad (20)$$

sendo que, $H(u,v) = J(u,v) W(u,v)$.

As condições de entrada e de contorno neste novo sistema de coordenadas são

$$\theta(u,v,Z) = 1, \quad \{(u,v) \in \Omega, \quad Z = 0\}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u=0, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad Z > 0\}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial u} = 0, \quad \{u=2\pi, \quad 0 \leq v \leq v_0, \quad Z > 0\}, \quad (23)$$

$$\theta(u,v,Z) = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi, \quad v=0, \quad Z > 0\}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta(u,v,Z)}{\partial v} = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi, \quad v=v_0, \quad Z > 0\}. \quad (25)$$

2.3 Técnica da Transformada Integral Generalizada

Para a obtenção da solução da Equação da Energia no novo sistema de coordenadas a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG foi aplicada sobre a Equação da Energia transformada, Eq. (20), visando proceder a remoção das derivadas de segunda ordem. Para tal, o potencial $\theta(u,v,Z)$ foi escrito em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, foi considerado, primeiramente, o problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \mu^2\psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi\}, \quad (26)$$

com,

$$\frac{d\psi(0)}{du} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d\psi(2\pi)}{du} = 0. \quad (28)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas associados a este problema são expressos, respectivamente, por

$$\mu_i = 2(i-1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (29)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (30)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do par transformada-inversa expresso por

$$\bar{\theta}_i(v, Z) = \int_0^{2\pi} K_i(u) \theta(u, v, Z) du, \quad \text{transformada}, \quad (31)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{\theta}_i(v, Z), \quad \text{inversa}, \quad (32)$$

sendo que, $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, expressas por

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{\sqrt{N_i}}, \quad (33)$$

com,

$$N_i = \int_0^{2\pi} \psi_i^2(u) du = \pi, \quad (34)$$

sendo que, N_i são as integrais de normalização das autofunções $\psi_i(u)$.

Efetuada o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a Equação da Energia e utilizando as condições de contorno e as equações que definem o problema auxiliar de autovalor, a primeira transformação da equação diferencial pode ser expressa por

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}(v) \frac{\partial \bar{\theta}_j(v, Z)}{\partial Z} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(v, Z) = \frac{\partial^2 \bar{\theta}_i(v, Z)}{\partial v^2}, \quad i = 1, 2, 3... \quad (35)$$

$$A_{ij}(v) = \int_0^{2\pi} K_i(u) K_j(u) H(u, v) du. \quad (36)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , o seguinte problema de autovalor deve ser considerado,

$$\frac{d^2 \phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \phi(v) = 0, \quad \{ 0 \leq v \leq v_0 \}, \quad (37)$$

com,

$$\phi(0) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{d\phi(v_0)}{dv} = 0. \quad (39)$$

Os autovalores e as autofunções normalizadas para este novo problema podem ser expressos por

$$\lambda_m = \frac{(2m-1)}{4}, \quad m = 1, 2, 3... \quad (40)$$

$$\phi_m(v) = \text{sen}(\lambda_m v). \quad (41)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa,

$$\tilde{\theta}_{im}(Z) = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, Z) du dv, \quad \text{transformada}, \quad (42)$$

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z), \quad \text{inversa}, \quad (43)$$

sendo que, $Z_m(v)$ são as autofunções normalizadas e podem ser expressas por

$$Z_m(v) = \frac{\phi_m(v)}{\sqrt{M_m}}, \quad (44)$$

com,

$$M_m = \int_0^{v_0} \phi_m^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (45)$$

sendo que, M_m são as integrais de normalização das autofunções $\phi_m(v)$.

Efetuada o produto interno das autofunções normalizadas $Z_m(v)$ com a equação diferencial transformada em u e utilizando as condições de contorno e as relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor, a transformação integral da Equação da Energia pode ser expressa por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{ijn} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0, \quad i, m = 1, 2, 3, \dots \quad (46)$$

$$B_{ijn} = \int_0^{v_0} Z_m(v) Z_n(v) A_{ij}(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) K_j(u) Z_m(v) Z_n(v) H(u, v) du dv, \quad (47)$$

sendo que os parâmetros B_{ijn} são integráveis e, portanto, conhecidos.

A solução do sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias dado permite a obtenção do potencial transformado, quando submetido à condição de entrada transformada dada por

$$\tilde{\theta}_{im}(0) = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) Z_m(v) \theta(u, v, 0) du dv = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) Z_m(v) du dv. \quad (48)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado pode ser determinado numericamente resolvendo o sistema de equações diferenciais correspondente e efetuando o truncamento da expansão para uma dada ordem $i = M$ e $j = N$.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ijn} \frac{d\tilde{\theta}_{jn}(Z)}{dZ} + (\mu_i^2 + \lambda_m^2) \tilde{\theta}_{im}(Z) = 0. \quad (49)$$

O potencial temperatura pode, então, ser reconstruído por meio da utilização da transformada inversa, para a expansão truncada até a ordem M e N ,

$$\theta(u, v, Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M K_i(u) Z_m(v) \tilde{\theta}_{im}(Z). \quad (50)$$

Obviamente, quanto maior N e M maior será a precisão dos resultados, sendo que, do ponto de vista computacional, o duplo somatório poderia ser resolvido como proposto por Mikhailov & Cotta (1996), permitindo a redução deste custo através do reordenamento dos termos e substituição por um somatório simples. No entanto, pela simplicidade do problema em questão, isso não se faz necessário.

2.4 Parâmetros Térmicos de Interesse

2.4.1 Temperatura média de mistura

A temperatura média de mistura em sua forma adimensional pode ser expressa por

$$\theta_{méd}(Z) = \frac{T_{méd}(Z) - T_p}{T_0 - T_p} = \frac{1}{A_S^*} \int_{\Omega} \frac{\theta(X, Y, Z) W(X, Y) d\Omega}{W_{méd}(X, Y)}, \quad (51)$$

com,

$$W_{méd}(X, Y) = \int_{\Omega} W(X, Y) d\Omega = 1. \quad (52)$$

sendo que, $A_S^* = A_S / D_h^2$ é a área da seção transversal adimensional. Portanto, no plano (u, v) , $\theta_{méd}$ pode ser expresso por

$$\theta_{méd}(Z) = \frac{1}{A_S} \int_0^{u_0} \int_0^{v_0} \theta(u, v, Z) W(u, v) J(u, v) dv du. \quad (53)$$

2.4.2 Número de Nusselt local

O número de Nusselt local pode ser definido por

$$Nu(Z) = -\frac{1}{4 \theta_{méd}(Z)} \frac{d\theta_{méd}(Z)}{dZ}. \quad (54)$$

2.4.3 Número de Nusselt médio

O número de Nusselt médio pode ser definido por

$$Nu_{méd}(Z) = -\frac{1}{4Z} \ln \theta_{méd}(Z). \quad (55)$$

2.4.4 Comprimento de Entrada Térmica

De acordo com Shah & London (1978), o comprimento de entrada térmico, L_{th} , pode ser definido, com sendo a posição em que o número de *Nusselt* local é 5% maior do que o número de *Nusselt* na região em que o fluido está termicamente desenvolvido (número de *Nusselt* limite). Desta forma,

$$L_{th} = \text{raiz positiva de } \{1,05 Nu(\infty) - Nu(Z) = 0\}. \quad (56)$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a obtenção dos resultados numéricos, o Método de Quadratura de *Gauss* foi utilizado para o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ijmn} e demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do *Jacobiano* nos pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações diferenciais foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado fazendo uso da rotina *DIVPAG* da biblioteca *IMSL Fortran* (1994) e do truncamento da expansão dada pela Eq. (50) para diversas ordens M e N . De uma análise de convergência foi verificado que com a utilização de até 50 termos na expansão da série em cada coordenada foi possível à obtenção de três casas decimais de precisão na região de convergência mais lenta ($0,01 \leq r^* \leq 0,20$), enquanto que nas demais regiões foi obtido a mesma precisão com uma ordem $N = M = 25$ de truncamento na série, ou menos. O tempo de processamento computacional gasto foi pequeno, cerca de 25 a 30 segundos em um microcomputador pessoal comum (processador *Intel™ Core™ i7* de 3,6 GHz e com 16 GB de memória RAM).

Nas Figuras 2, 3 e 4, são apresentados os comportamentos da temperatura adimensional média de mistura e dos números de *Nusselt* local e médio, respectivamente, em função da razão de aspecto $r^* = r_i / r_e$ dos dutos anulares concêntricos. Como esperado, os parâmetros térmicos de interesse decrescem com o aumento da coordenada axial adimensionalizada Z independentemente da razão de aspecto.

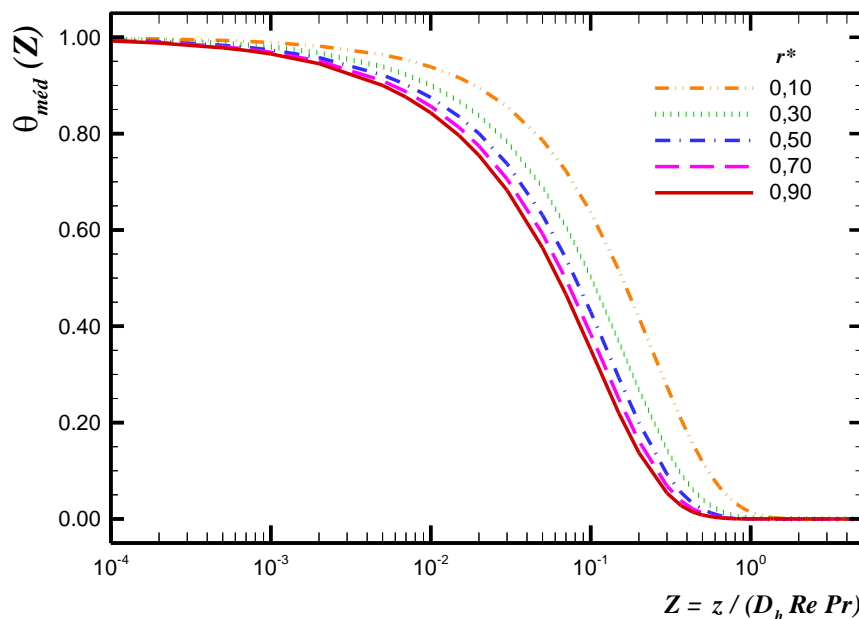


Figura 2. Temperatura adimensional média de mistura para diferentes dutos anulares concêntricos.

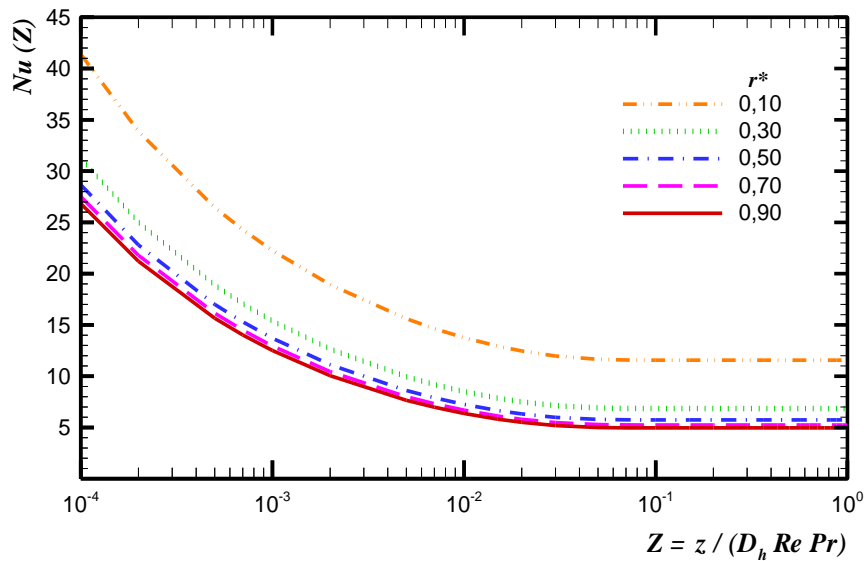


Figura 3. Número de *Nusselt* local para diferentes dutos anulares concêntricos.

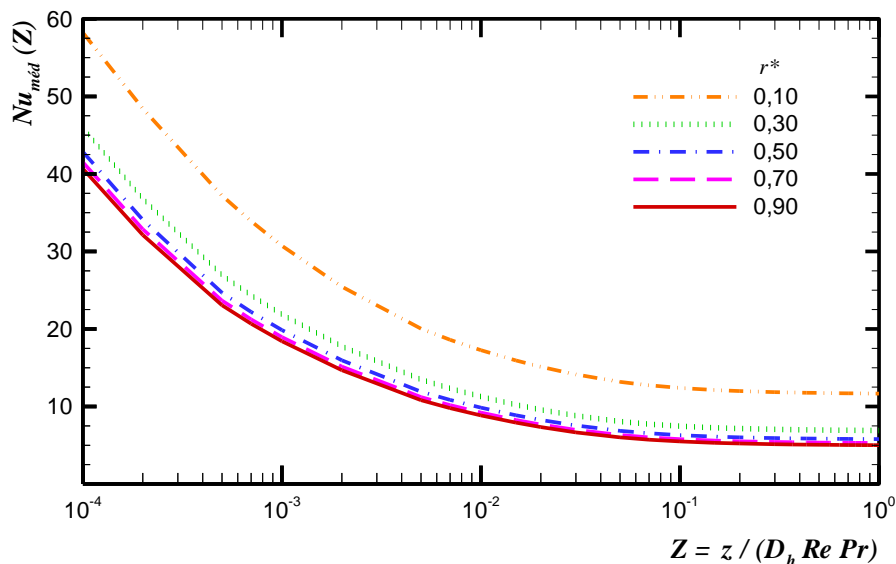


Figura 4. Número de *Nusselt* médio para diferentes dutos anulares concêntricos.

Na Figura 5 e na Tabela 1 são apresentados os comportamentos dos números de *Nusselt* limite e médio e do comprimento de entrada térmica em função da razão de aspectos dos dutos anulares concêntricos. O número de *Nusselt* limite aumenta com o aumento da razão de aspecto enquanto o comprimento de entrada térmica apresenta um comportamento contrário, ou seja, ele diminui com o aumento da razão de aspecto.

Tabela 1. Parâmetros térmicos de interesse para o escoamento em dutos anulares concêntricos.

r^*	$Nu(\infty)$	$Nu_{méd}$ (10^{-3})	$Nu_{méd}$ (10^{-2})	$Nu_{méd}$ (10^{-1})	$Nu_{méd}$ (10^0)	L_{th}
0,00	335,823	494,86	395,85	345,41	336,79	0,0669
0,01	53,535	96,14	68,12	55,83	53,77	0,0732
0,05	17,460	39,74	24,59	18,51	17,57	0,0949
0,10	11,560	30,03	17,26	12,38	11,64	0,1101
0,15	9,331	26,19	14,40	10,05	9,40	0,1218
0,20	8,130	24,17	12,95	8,81	8,20	0,1322
0,25	7,371	22,77	11,93	8,01	7,43	0,1401
0,30	6,845	21,91	11,32	7,47	6,91	0,1478
0,35	6,459	21,16	10,77	7,06	6,52	0,1545
0,40	6,163	20,70	10,46	6,76	6,22	0,1603
0,45	5,928	20,21	10,09	6,50	5,99	0,1660
0,50	5,738	19,93	9,90	6,31	5,80	0,1721
0,55	5,581	19,58	9,65	6,14	5,64	0,1777
0,60	5,449	19,40	9,53	6,01	5,50	0,1831
0,65	5,337	19,13	9,34	5,89	5,39	0,1876
0,70	5,240	19,01	9,26	5,79	5,29	0,1925
0,75	5,156	18,80	9,10	5,70	5,21	0,1982
0,80	5,082	18,72	9,06	5,63	5,14	0,2018
0,85	5,017	18,53	8,92	5,55	5,07	0,2074
0,90	4,959	18,47	8,87	5,50	5,01	0,2109
0,95	4,907	18,32	8,78	5,44	4,96	0,2163
1,00	4,861	18,28	8,74	5,40	4,91	0,2201

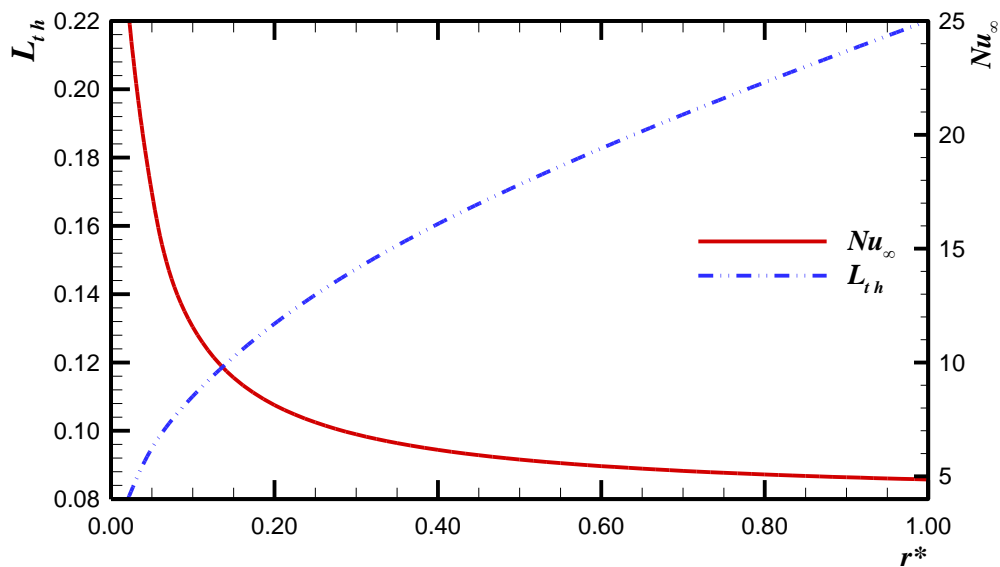


Figura 5. Número de Nusselt limite e comprimento de entrada térmica para dutos anulares concêntricos.

Na Tabela 2 é realizada uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho para o número de *Nusselt* local em diferentes dutos anulares concêntricos e os resultados apresentados em Lundberg *et al.* (1963) através de uma solução analítica. Enquanto que a Tabela 3 mostra a comparação do número de *Nusselt* limite e do comprimento de entrada térmica.

Tabela 2a. Comparação entre os resultados numéricos e os disponíveis na literatura para o número de *Nusselt* local no escoamento laminar em dutos anulares concêntricos.

<i>Z</i>	<i>r</i> [*] = 0,05		<i>r</i> [*] = 0,10	
	Presente Trabalho	Lundberg <i>et al.</i> (1963)	Presente Trabalho	Lundberg <i>et al.</i> (1963)
0,010	20,329	20,332	13,761	13,762
0,050	17,593	17,592	11,649	11,648
0,100	17,465	17,464	11,562	11,562
0,500	17,461	17,460	11,560	11,560
1,000	17,461	17,460	11,560	11,560

Tabela 2b. Comparação entre os resultados numéricos e os disponíveis na literatura para o número de *Nusselt* local no escoamento laminar em dutos anulares concêntricos.

<i>Z</i>	<i>r</i> [*] = 0,50		<i>r</i> [*] = 1,00	
	Presente Trabalho	Lundberg <i>et al.</i> (1963)	Presente Trabalho	Lundberg <i>et al.</i> (1963)
0,010	7,246	7,246	6,260	6,260
0,050	5,785	5,785	4,902	4,902
0,100	5,739	5,739	4,861	4,861
0,500	5,738	5,738	4,861	4,861
1,000	5,738	5,738	4,861	4,861

Tabela 3. Comparação entre os resultados numéricos e os disponíveis na literatura para o número de *Nusselt* limite e o comprimento de entrada térmico no escoamento laminar dutos anulares concêntricos.

<i>r</i> [*]	<i>Nu</i> (∞)		<i>L</i> _{th}	
	Presente Trabalho	Lundberg <i>et al.</i> (1963)	Presente Trabalho	Shah & London (1978)
0,05	17,461	17,460	0,0949	0,09493
0,10	11,560	11,560	0,1101	0,1101
0,50	5,738	5,738	0,1721	0,1721
1,00	4,861	4,861	0,2201	0,2201

4 CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi analisada uma classe de problemas difusivo-convectivos de natureza parabólica em domínios de geometria anular concêntrica. Para tal, uma solução híbrida analítico-numérico de um problema de transferência de calor em escoamento laminar fluidodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento de fluidos *Newtonianos* no interior de dutos anulares concêntricos submetidos às condições de contorno de *Dirichlet* (temperatura prescrita na parede) e perfil de temperatura de entrada uniforme foi executada utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG e a uma Transformação Conforme. Os parâmetros térmicos de interesse, tais como: temperatura média de mistura, números de *Nusselt* local, médio e limite e comprimento de entrada térmica foram calculados para dutos de configurações geométricas anulares concêntricas e comparados, quando possível, com os resultados disponíveis na literatura. Finalmente, foi observado que a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG e a Transformação Conforme estão sendo aplicadas com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, os quais muitas vezes não possuem solução pelas técnicas analíticas clássicas.

REFERÊNCIAS

- Antonini Alves, T., 2006. *Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais*. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, SP, Brasil, 360p.
- Antonini Alves, T., Pelegrini, M.F., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2014a. Limiting power of nuclear fuel cells with variable sources. *International Journal of Science and Advanced Technology*, vol. 4, pp. 7-15.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2014b. Laminar flow of newtonian fluids in concentric annular ducts. *Revista Ciências Exatas e Naturais (Impresso)*, vol. 16, pp. 285-305.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2015a. Escoamento laminar em dutos de setor circular. *Ciência & Engenharia*, vol. 24, pp. 1065-1074.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2015b. Escoamento laminar em dutos de setor de anel circular. *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, vol. 19, pp. 3-15.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2015c. Uma solução híbrida analítico-numérica para o escoamento laminar em dutos bicônicos. *Semina. Ciências Exatas e Tecnológicas (Impresso)*, vol. 36, pp. 119-132.
- Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2016. Aplicação da transformada integral generalizada e da transformação conforme na solução de um problema de convecção forçada laminar em dutos de setor de anel circular. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol. 2.
- Chalhub, D.J.M.N., Sphaier, L.A., & Alves, L.S.B., 2014. Integral transform analysis of poisson problems that occur in discrete solutions of the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Physics*, vol. 547, 012040.

- Cotta, R.M., 1998. *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering*. New York: Begell House Inc., 430p.
- Cotta, R.M., Knupp, D.C., Naveira-Cotta, C.P., Sphaier, L.A., & Quaresma, J.N.N., 2013. unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems. *Numerical Heat Transfer, Part A, Applications*, vol. 63, pp. 840-866.
- Churchill, R.V., 1975. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill, 276p.
- IMSL Math/Library, 1994. *Visual Numerics*, Edition 10, Version 2.0, Houston, TX-77042.
- Knupp, D.C., Cotta, R.M., Naveira-Cotta, C.P., & Kakaç, S., 2015a. Transient conjugated heat transfer in microchannels: integral transforms with single domain formulation. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 88, pp. 248-257.
- Knupp, D.C., Naveira-Cotta, C.P., & Cotta, R.M., 2015b. Fluid flow and conjugated heat transfer in arbitrarily shaped channels via single domain formulation and integral transforms. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 82, pp. 479-489.
- Knupp, D.C., Naveira-Cotta, C.P., Refer, A., Tiwari, M., Cotta, R.M., & Poulikakos, D., 2015c. Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 25, pp. 1444-1462.
- Lima, G.G.C., Santos, C.A.C., Haag, A., & Cotta, R.M., 2007. Integral transform solution of internal flow problems based on Navier Stokes equations and primitive variables formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering (Print)*, vol. 69, pp. 544-561.
- Lundberg, R.E., Mccuen, P.A., & Reynolds, W.C., 1963. Heat transfer in annular passages: hydrodynamically developed laminar flow with arbitrarily prescribed wall temperatures or heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 6, pp. 495-529.
- Maia, C.R.M., 2003. *Solução de Problemas Difusivos e Difusivos-Convectivos em Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada*. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, SP, 251p.
- Maia, C.R.M., Aparecido, J.B., & Milanez, L.F., 2006. Heat transfer in laminar flow of non-newtonian fluids in ducts of elliptical cross section. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45, pp. 1066-1072.
- Maia, C.R.M., Ramos, R.A.V., Pelegrini, M.F., & Antonini Alves, T., 2005. Heat transfer study in slug flow on elliptical ducts cross section by generalized integral transform technique. *Thermal Engineering*, vol. 4, pp. 154-163.
- Mikhailov, M.D., & Cotta, R.M., 1996. Ordering rules for double or triple eigenseries in the solution of multidimensional heat and fluid flow problems. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 23, pp. 299-303.
- Naveira-Cotta, C.P., Cotta, R.M., & Orlande, H.R.B., 2010. Inverse analysis of forced convection in micro-channels with slip flow via integral transforms and bayesian inference. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 49, pp. 879-888.
- Pelegrini, M.F., 2005. *Aplicação da Técnica da Transformada Integral para a Solução de Problemas Difusivos Transientes com Propriedades Termofísicas Variáveis*. Dissertação de

Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, SP, Brasil, 128p.

Pelegrini, M.F., Antonini Alves, T., Nishida, F.B., Ramos, R.A.V. & Maia, C.R.M., 2014a. Hybrid analytical-numerical analysis of SAE 4150 alloy steel rods cooling. *Advanced Materials Research*, vol. 1082, pp. 187-190.

Pelegrini, M.F., Antonini Alves, T., Ramos, R.A.V., & Maia, C.R.M., 2014b. Transient heat diffusion problems with variable thermal properties solved by generalized integral transform technique. *International Review of Mechanical Engineering (Testo Stampato)*, vol. 8, pp. 931-940.

Shah, R.K., & London, A.L., 1978. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Advances in Heat Transfer, Supplement 1. New York: Academic Press Inc., 477p.

Silva, R.L.E., Santos, C.A.C., Quaresma, J.N.N., & Cotta, R.M., 2011. Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 21, pp. 219-243.

Sphaier, L.A., 2012. Integral transform solution for heat transfer in parallel-plates micro-channels: combined electroosmotic and pressure driven flows with isothermal walls. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 39, pp. 769-775.