



## UMA SOLUÇÃO ANALÍTICO-NUMÉRICA PARA A DIFUSIVIDADE DO CALOR EM UM CILINDRO COM E SEM GERAÇÃO DE CALOR

**Flávio Mamede Pereira Gomes**

fmpgomes@furnas.com.br

Universidade de Brasília (UnB) e Furnas

**Nailde de Amorim Coelho**

naildea@yahoo.com.br

Universidade de Brasília (UnB) e Universidade Federal do Vale do São Francisco (Univasf)

**Lineu José Pedroso**

lineu@unb.br

Universidade de Brasília (UnB)

Universidade de Brasília – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental- Programa de Pós Graduação em Estruturas e Construção Civil - Grupo de Dinâmica e Fluido-Estrutura. Caixa Postal 04492, Campus Darcy Ribeiro, CEP 70919-9700, Brasília-DF.

**Resumo.** *Um grande número de problemas complexos de engenharia ou de interesse prático são resolvidos por meio de programas baseados em métodos numéricos, tal como o MEF. No entanto, na missão de modelagem e simulação da realidade física de muitos desses problemas, torna-se necessário, que estes resultados possam ser confrontados com resultados oriundos de outras fontes, como experimentais e analíticas. Os primeiros podem ser onerosos e/ou demandar muito tempo, e os segundos nem sempre existem na literatura ou requerem soluções matemáticas complexas ou, por vezes, bastantes limitadas para traduzir o problema real. Com efeito, este trabalho apresenta uma solução analítica para a equação do calor em função do ponto e do tempo, num cilindro com geração interna de calor. As soluções analíticas são obtidas utilizando-se as equações de Bessel de primeira espécie de ordem zero, um e dois, e o teorema de Duhamel. Estas soluções foram implementadas no FREEMAT, programa de soluções matemáticas e comparada com resultados obtidos com o programa ANSYS. Os resultados obtidos apresentaram uma excelente correlação, e correspondem as tendências esperadas para o fenômeno em questão.*

**Palavras-chaves:** Equação do calor, Bessel, Duhamel, ANSYS.

## 1 INTRODUÇÃO

As variações volumétricas ao longo do tempo, notadamente nas primeiras idades, conduzem ao aparecimento de tensões de tração no material ou estrutura, podendo assim induzir a formação de fissuras no concreto. Por este fato, a importância do conhecimento das propriedades térmicas para se projetar, construir e acompanhar o comportamento de estruturas sujeitas a grandes variações de temperatura (Furnas, 1997).

O problema de difusão térmica em engenharia requer o conhecimento da propriedade conhecida como difusividade térmica do material. A difusividade térmica indica a rapidez com que o concreto sofre mudança de temperatura (NBR 12818, 1993). Materiais de difusividade alta irão responder mais rapidamente às mudanças na temperatura ambiente, enquanto os materiais de menor difusividade irão responder mais lentamente, levando mais tempo para chegar à nova condição de equilíbrio. Dito de outro modo, a difusividade térmica mede a capacidade do material de conduzir energia térmica, em relação à capacidade de armazená-la (Incropera, 2008). Numericamente, é a condutividade dividida pela capacidade calorífica volumétrica (massa específica vezes calor específico).

A magnitude da difusividade térmica é afetada pelo tipo litológico de agregado e pela dimensão máxima característica (Furnas, 1997). Os valores típicos são mostrados na Tabela 1 (ACI, 2007).

**Tabela 1 - Difusividade térmica dos agregados (ACI, 2007).**

Litologia do agregado	Difusividade térmica	
	(m <sup>2</sup> /dia)	(10 <sup>-3</sup> .m <sup>2</sup> /h)
Quartzito	0,129	5,4
Calcário	0,113	4,7
Dolomito	0,111	4,6
Granito	0,096	4,0
Riolito	0,078	4,2
Basalto	0,072	4,0

De acordo com Bamonte & Gambarova (2010), a difusividade térmica não é afetada pela resistência do concreto. O concreto de alta resistência com difusividade térmica baixa pode ser utilizado como proteção térmica contra o fogo ou como molde de cobertura em paredes de cimento ou placas, incêndios ou gases quentes.

Diferente da condutividade e da capacidade de calor, não é possível considerar que a difusividade de concreto pode ser calculada de acordo com a média da difusividade de cada constituinte ponderada pela massa (De Schutter & Taerwe, 1995). Liduário, *et al.* (2005) apresentaram resultados de difusividade praticamente idênticos ao se manter a composição dos materiais e o cimento equivalente, alterando apenas a adição mineral (sílica ativa, metacaulim, escoria e pozalana, com teores de 8%, 8%, 20% e 50%, respectivamente). Segundo Furnas, (1997), a difusividade aumenta com o aumento do volume total de agregado, o que por sua vez explica que concretos com dimensão máxima característica maiores, que em geral possuem maior volume total de agregado, possuem maior difusividade. Isto explica também porque o aumento do consumo de água diminui a difusividade (Neville, 1997).

Ukrainczyk & Matusinović (2010) corroboram o que foi afirmado por Neville mostrando que o valor da difusividade obtido experimentalmente na pasta de cimento para a relação a/c (água/cimento) de 0,3 é 11% mais elevado do que para a/c de 0,4. Segundo Gomes (2016), a modelagem multiescala poderia ser usada para estudar diversas propriedades do concreto na macroescala, com base nas propriedades dos seus constituintes.

Na Tabela 2 são mostrados os valores típicos de difusividade térmica para concretos feitos com vários tipos de agregados de represas brasileiras.

**Tabela 2 -Difusividade térmica de agregados e obras brasileiras (Furnas, 1997).**

Agregado	Obra	Difusividade térmica (m <sup>2</sup> /dia)
Gnaisse	Angra dos Reis	0.097
Quartzito	Estreito	0.189
Calcário	Itaberá	0.128
Metagrauvaca	Tucuruí	0.096
Basalto	Itumbiara	0.063
Fonolito	Osmu Utsumi	0.078
Granodiorito	Cachoeira Porteira	0.108
Granito	Serra da Mesa	0.102
Cascalho	Itaparica	0.154

Outras propriedades térmicas tais como massa específica, condutividade térmica e calor específico, influenciam diretamente no concreto e em sua difusividade térmica. Alguns aspectos das propriedades dos materiais relacionadas com a difusividade, podem ser encontrados em vários estudos da literatura, alguns deles são: Azenha (2009), Azenha, et al (2011), Coelho (2012), Coelho, Nepomuceno & Pedroso (2014), Coelho, et al (2014), Gomes (2011), Santos (2004).

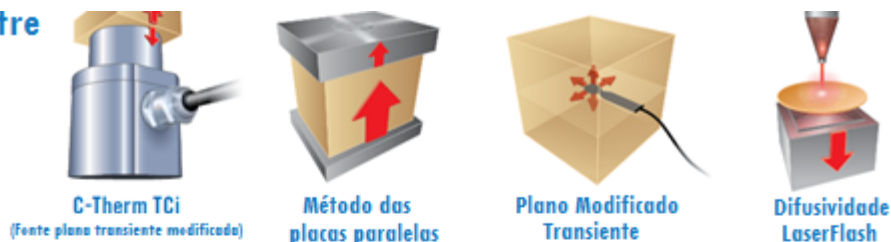
Diante do exposto, este trabalho busca, primeiramente, simular numericamente o ensaio de difusividade térmica por meio de um programa computacional (ANSYS) que utiliza o método dos elementos finitos (MEF), comparando os resultados numéricos com os resultados experimentais e a solução analítica para o problema homogêneo e transiente da difusividade sem geração interna de calor em coordenadas cilíndricas (adequado ao experimento). Posteriormente, será equacionado o mesmo problema anterior da difusividade acrescentando primeiramente uma geração interna de calor constante e, em seguida, uma geração interna de calor absolutamente genérica, cuja solução analítica será apresentada e comparada com a solução numérica por elementos finitos. Por fim, será discutido as implicações e aplicações desta solução.

## 2 ENSAIO DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA

Quanto aos métodos de ensaio, diversas técnicas e equipamentos são utilizados para se medir experimentalmente a difusividade térmica do concreto e outros materiais. A Fig. 1 mostra uma comparação das vantagens e desvantagens entre diversas técnicas e equipamentos modernos para a determinação da difusividade térmica. Alguns deles fornecem não somente a difusividade térmica, mas simultaneamente a condutividade e, indiretamente, a capacidade térmica. Eventualmente, a efusividade, cujo significado é irrelevante para o propósito deste artigo, é também fornecida. Esses equipamentos e técnicas têm em comum emitir um pulso

térmico e medir o aquecimento e o resfriamento em diversos pontos conforme a propagação do calor nas direções da amostra.

**Comparação Entre os Métodos: Mais rápido, mais fácil, & mais versátil**



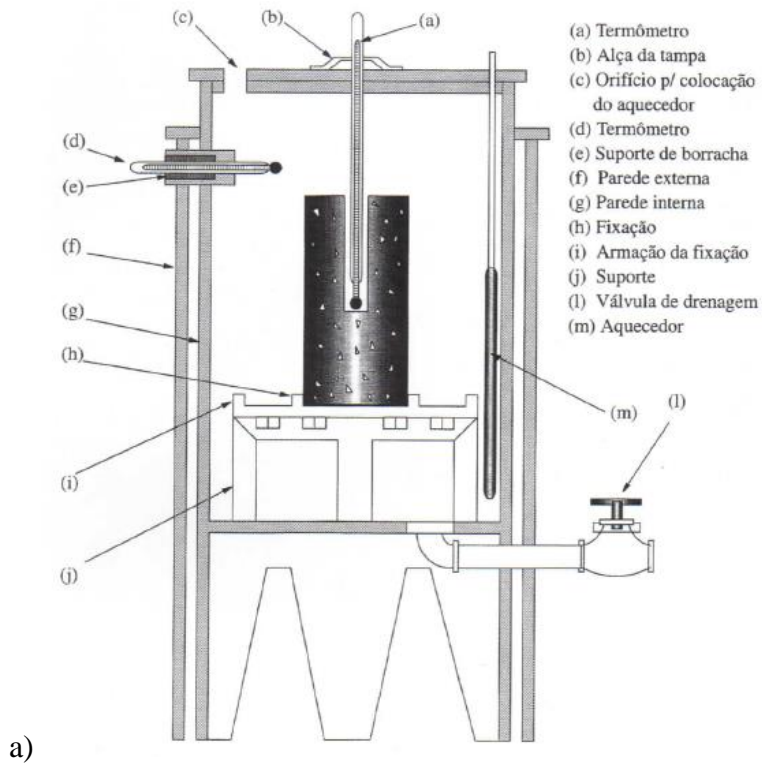
VELOCIDADE & FLEXIBILIDADE				
Preparação de amostra	Não requer	Extenso	Alguma	Extenso
Unidade temporal	Segundos	Horas	Minutos	Segundos
Tempo de ensaio	Mínimo	Moderado	Significante	Extenso
Não-destrutivo	: Sim	Não	Não	Não
Integrado, descarregável	: Sim	Não	Não	Não
Resultados - Database	: Sim	Não	Não	Não
ALCANCE				
k (W/mK)	0 - 100	0 - 2	0 - 100 (100 - 500 requer Cp)	0 - 500
Temperatura (°F) (°C)	-58° a 392°F -50° a 200°C	-4° a 392°F -20° a 200°C	-148° a 2552°F -100 a 1400°C	-148° a 3627°F -100° a 2000°C
CONFIGURAÇÃO DA AMOSTRA				
Mínimo	0,67" de diâmetro (17mm)	6" x 6" (150 x 150mm)	Duas amostras idênticas 1" x 1" (25 x 25mm)	0,5" de diâmetro (12,4mm) 0,004" de espessura (1mm)
Máximo	Ilimitado	24" x 24" (600 x 600mm)	Duas amostras idênticas Ilimitado	0,5" de diâmetro (12,4mm) 0,004" de espessura (1mm)
Ensaio de materiais Capacidades	Sólidos, líquidos	Sólido	Sólido, Líquido	Sólido

Figura 1 – Comparação entre técnicas e equipamentos para difusividade térmica (Adaptado de C THERM, 2013)

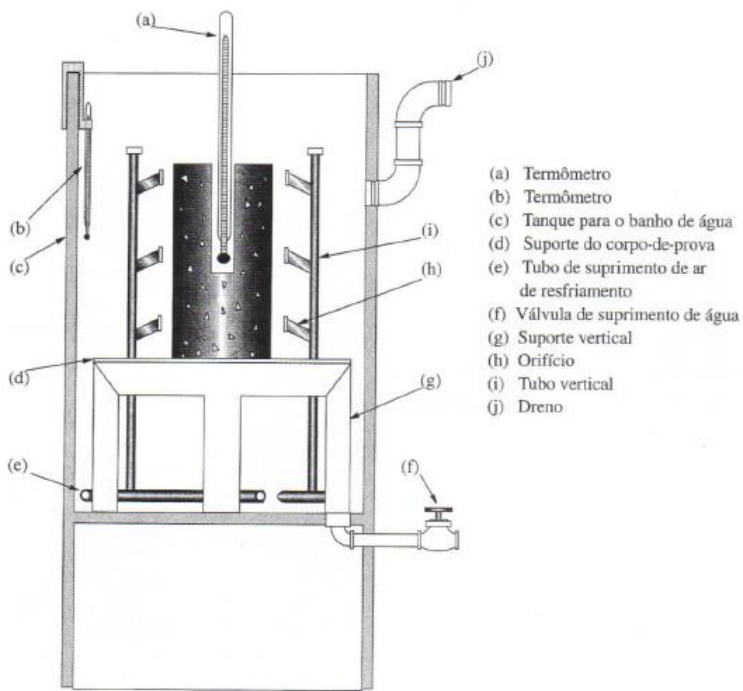
Os resultados experimentais deste trabalho foram obtidos no Laboratório de Concreto de Furnas e o procedimento foi realizado conforme descrito por Furnas (1997) apresentado a seguir. Originalmente, este procedimento de ensaio remonta ao preconizado pelo *US Bureau of Reclamation* para o concreto massa da barragem de *Hoover (Boulder Dam Project, 1940)*.

São utilizados dois tanques, um de aquecimento, em que corpos de prova (20 cm x 40 cm) são aquecidos até estabilizar em temperatura uniforme de 20°C, 40°C ou 60°C; e outro de resfriamento, com temperatura externa em 4°C, conforme pode ser visto na Fig. 2-b. Segundo este método, o ensaio consiste na determinação da curva de resfriamento do corpo de prova, entre as temperaturas de aquecimento e a do banho de resfriamento. As temperaturas são registradas em intervalos de 2 a 5 minutos pelo sensor do termômetro colocado no interior do corpo de prova. Após aquecido, o corpo de prova é colocado no tanque de resfriamento e é observado o tempo até que este totalmente resfriado, com temperatura constante de 4°C.

Embora não mostrado no esquema das Figuras 2-a e 2-b, um isolamento de isopor ou cortiça é colocado nas extremidades superior e inferior do corpo-de-prova no tanque de resfriamento, para garantir que a perda de calor significativa se dê somente pela superfície lateral.



a)



b)

Figura 2. a) Tanque de aquecimento; b) tanque de resfriamento (Furnas, 1997).

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Os problemas que envolvem o calor podem ser resolvidos pela equação de condução de calor Eq. (1), aqui representada em coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial^2 T(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(r, t)}{\partial t} \quad (1)$$

em que:

- $\dot{q}$  = taxa de geração interna de calor;
- $k$  = condutividade térmica;
- $\alpha$  = difusividade térmica;
- $T, r, t$  = temperatura, raio e tempo, respectivamente.

#### 3.1 Difusividade térmica

O equacionamento do problema térmico relacionado ao ensaio de difusividade térmica é feito considerando um cilindro de raio  $R$  e comprimento infinito (fluxo de calor constante e igual a zero nas extremidades, o que reduz o problema a uma dimensão espacial  $r$ ). O cilindro apresenta uma temperatura inicial uniforme  $T_0$  e é introduzido em um ambiente com temperatura diferente  $T_\infty$ . Ao longo do tempo, o corpo-de-prova sofrerá variação de temperatura até que todo seu interior alcance a temperatura final igual à temperatura ambiente  $T_\infty$ .

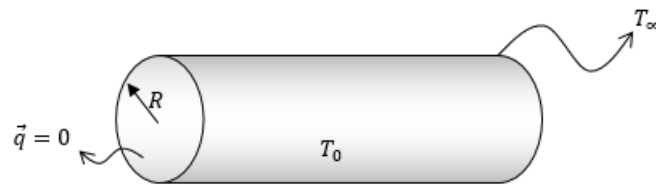


Figura 3 – Cilindro para estudo da difusividade térmica.

Matematicamente, o problema pode ser representado pela equação de condução unidimensional Eq. (2), com as condições iniciais (CI) e de contorno (CC), mostradas equações (3) e (4).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

com  $0 < r < R$  e  $t > 0$ .

$$CI: T_{(r,0)} = T_0 \quad (3)$$

$$CC: T_{(R,t)} = T_\infty \quad (4)$$

A solução deste problema homogêneo e transiente é clássica, reproduzida aqui conforme Hahn e Özişik (2012), dada pela Eq. (5).

$$T_{(r,t)} = T_0 - (T_0 - T_\infty) \left[ 1 - \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_m r)}{\beta_m J_1(\lambda_m R)} \exp(-\alpha \lambda_m^2 t) \right] \quad (5)$$

em que,  $J_0$  e  $J_1$  são as funções de Bessel de primeira espécie de ordem 0 e 1, respectivamente, e  $\lambda_m$  são as raízes características de  $J_0(\lambda_m r) = 0$ , em que os 10 primeiros termos são:

[ 2.4048 5.5201 8.6537 11.7915 14.9309 18.0711 21.2116 24.3525 27.4935 30.6346 ]<sup>1</sup>

### 3.2 Difusividade térmica com geração interna de calor constante

Para o cilindro da Fig. 3, considera-se agora uma geração de calor interna constante,  $g_0$ , a equação que representa o problema é dada como na Eq. (6) e as CC e CI são as mesmas do problema anterior.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g_0}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

A solução da equação diferencial parcial pode ser obtida pelo método de separação de variáveis, obtendo-se a solução da Eq. (7), baseado em Hahn & Özişik (2012).

$$T_{(r,t)} = T_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m r) e^{-\alpha \lambda_m^2 t} + \frac{g_0}{4k} (R^2 - r^2) \quad (7)$$

com  $C_m$  dado por:

$$C_m = \frac{2\lambda_m (T_0 - T_\infty) J_1(\lambda_m R) - R \frac{g_0}{k} J_2(\lambda_m R)}{\lambda_m^2 R [J_0^2(\lambda_m R) + J_1^2(\lambda_m R)]} \quad (8)$$

em que:

- $T_0, T_\infty$  = temperaturas inicial e final;
- $J_0, J_1, J_2$  = funções de Bessel de primeira espécie de ordens 0, 1 e 2, respectivamente;
- $g_0$  = geração de calor constante;
- $k$  = condutividade térmica;
- $R, r$  = raio externo e dimensão radial;
- $\lambda_m$  = raízes da equação característica  $J_0(\lambda_m R) = 0$

### 3.3 Difusividade térmica com geração interna de calor genérica

Considerando agora uma geração interna de calor genérica,  $g(t)$ , pode-se aplicar o teorema de Duhamel, fazendo na Eq. (7)  $g_0 = 1$  e  $T_\infty = 0$ , chamando-a de uma nova função dada pela Eq. (9), substituindo  $t$  por  $(t - \tau)$ :  $\varphi_{(r,t-\tau)}$

$$\varphi_{(r,t-\tau)} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0(\lambda_m r) e^{-\alpha \lambda_m^2 (t-\tau)} + \frac{1}{4k} (R^2 - r^2) \quad (9)$$

A nova solução da temperatura para geração interna de calor genérica torna-se o resultado da integral da Eq. (10, Teorema de Duhamel):

<sup>1</sup> Fonte: David W. Hahn e M. Necati Özişik, Table IV-2, pág. 704;

$$T_{(r,t)} = \int_{r=0}^b g_{(\tau)} \frac{\partial \varphi_{(r,t-\tau)}}{\partial t} d\tau \quad (10)$$

cuja solução é dada pela Eq. (11):

$$T_{(r,t)} = T_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \alpha \lambda_m^2 J_0(\lambda_m r) e^{-\alpha \lambda_m^2 t} \int_{r=0}^b g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau \quad (11)$$

Esta solução difere da apresentada em Hahn e Özişik (2012, Ex. 7-5), pois considera a possibilidade da temperatura inicial ser diferente da final. De qualquer modo, a integral de  $g_{(t)}$  dentro da solução analítica requer um procedimento numérico para ser implementada.

Seja uma discretização temporal em que  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  e uma função  $\chi$  definida pela Eq. (12):

$$\chi_{m(t_n)} = \chi_{m,n} \equiv e^{-\alpha \lambda_m^2 t_n} \int_0^{t_n} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau \quad (12)$$

Separando os limites de integração, tem-se a Eq. (13):

$$\chi_{m,n} = e^{-\alpha \lambda_m^2 t_n} \int_0^{t_{n-1}} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau + e^{-\alpha \lambda_m^2 t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau \quad (13)$$

No instante anterior, tem-se:

$$\chi_{m,n-1} \equiv e^{-\alpha \lambda_m^2 t_{n-1}} \int_0^{t_{n-1}} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{-\alpha \lambda_m^2 \Delta t_n}$ , tem-se:

$$e^{-\alpha \lambda_m^2 \Delta t_n} \chi_{m,n-1} = e^{-\alpha \lambda_m^2 t_n} \int_0^{t_{n-1}} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau$$

Substituindo na eq. (13), tem-se a Eq. (14):

$$\chi_{m,n} = e^{-\alpha \lambda_m^2 \Delta t_n} \chi_{m,n-1} + e^{-\alpha \lambda_m^2 t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} g_{(\tau)} e^{\alpha \lambda_m^2 \tau} d\tau \quad (14)$$

Entre  $t_{n-1}$  e  $t_n$ , a função  $g_n$ , a qual varia dentro do intervalo, pode ser substituída por  $g_n^*$  calculada no meio do intervalo  $\Delta t_n^* = (t_n + t_{n-1})/2$  e constante neste intervalo. Portanto,  $g_n^* = g(\Delta t_n^*)$ . Com isso,  $\chi_{m,n}$  torna-se a Eq. (15):

$$\chi_{m,n} = e^{-\alpha \lambda_m^2 \Delta t_n} \chi_{m,n-1} + \frac{g_n^*}{\alpha \lambda_m^2} (1 - e^{-\alpha \lambda_m^2 \Delta t_n}) \quad (15)$$

A solução final para a temperatura pode ser implementada recursivamente como a Eq. (16):

$$T_{(r,t_n)} = T_{\infty} + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \alpha \lambda_m^2 J_0(\lambda_m r) \chi_{m,n} \quad (16)$$



## **4 RESULTADOS**

### **4.1 Difusividade térmica sem geração interna de calor**

As análises que se seguem foram realizadas a partir de resultados experimentais do Laboratório de Concreto de Furnas em Goiânia. Para três concretos diferentes, com  $D_{\text{máx}}$  25mm, 50mm e 12.5mm respectivamente, as difusividades encontradas foram: 0,075 m<sup>2</sup>/dia, 0,085 m<sup>2</sup>/dia, e 0,068 m<sup>2</sup>/dia. Cada um destes valores é a média de três ensaios realizados em temperaturas iniciais diferentes.

Implementando-se a Eq. (5) em um programa matemático com temperaturas iniciais de 20°C, 40°C e 60°C e sendo a temperatura final,  $T_{\infty} = T_f = 4^{\circ}\text{C}$ , obtêm-se os gráficos das Fig. 4 a, b, c.

Ambos os gráficos apresentam o tempo decorrido, em horas, no eixo das abscissas e o resfriamento, diferença de temperatura adimensional, no eixo das ordenadas. Dessa forma, pode-se afirmar que o tempo de resfriamento dependerá diretamente do valor da difusividade térmica.

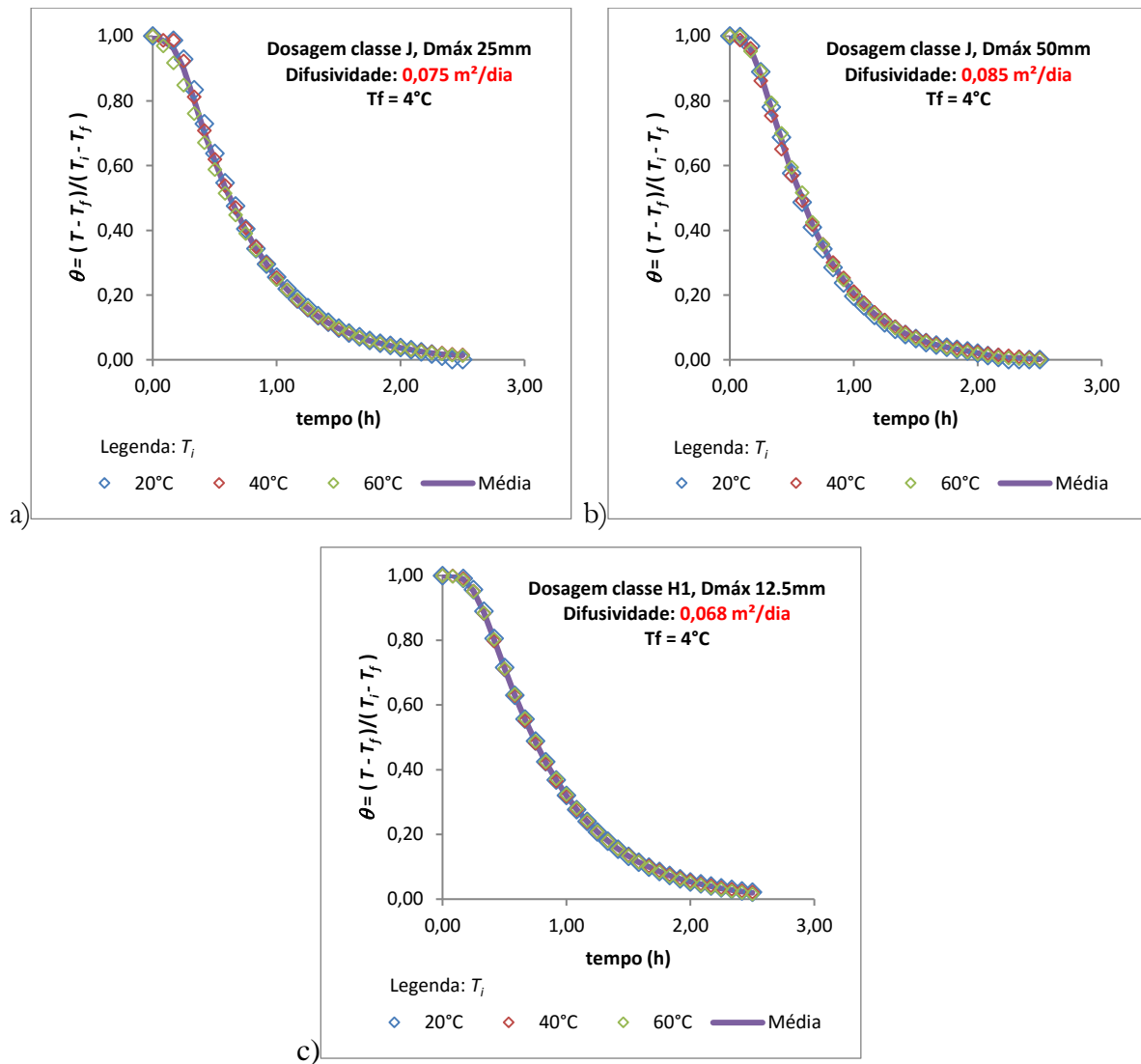


Figura 4 - Resultado de ensaio de difusividade térmica: a) Dmáx 25mm e b) 50mm; c) Dmáx 12.5mm.

A comparação entre a solução numérica, a solução analítica e o resultado experimental do ensaio com Dmáx 50mm e temperatura inicial de 40°C está apresentado na Figura 5.

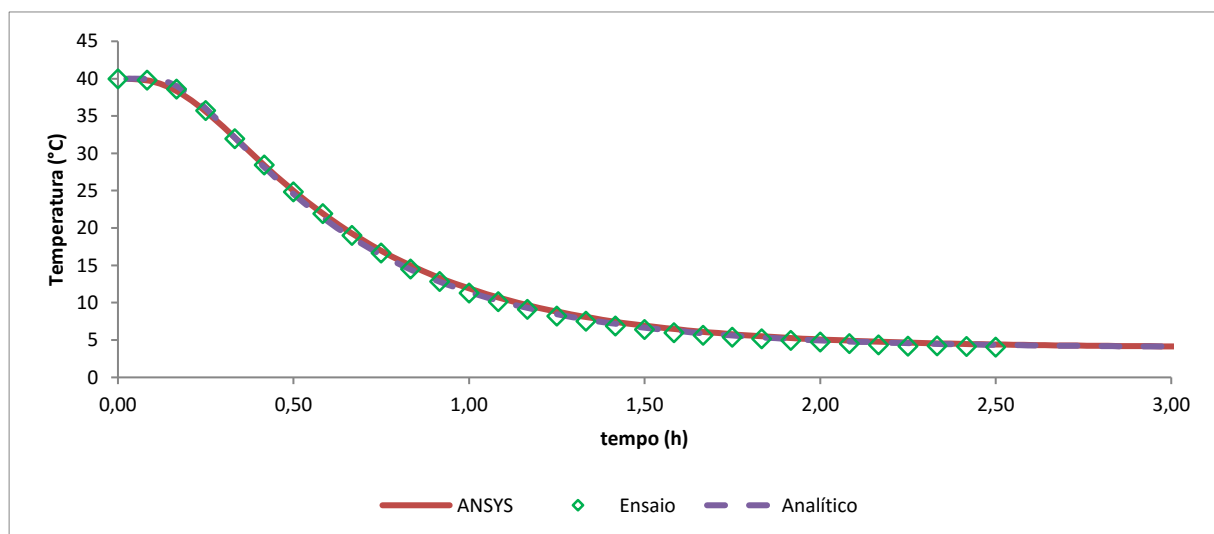


Figura 5 – Comparação dos resultados analíticos, experimentais e por MEF para a difusividade térmica.

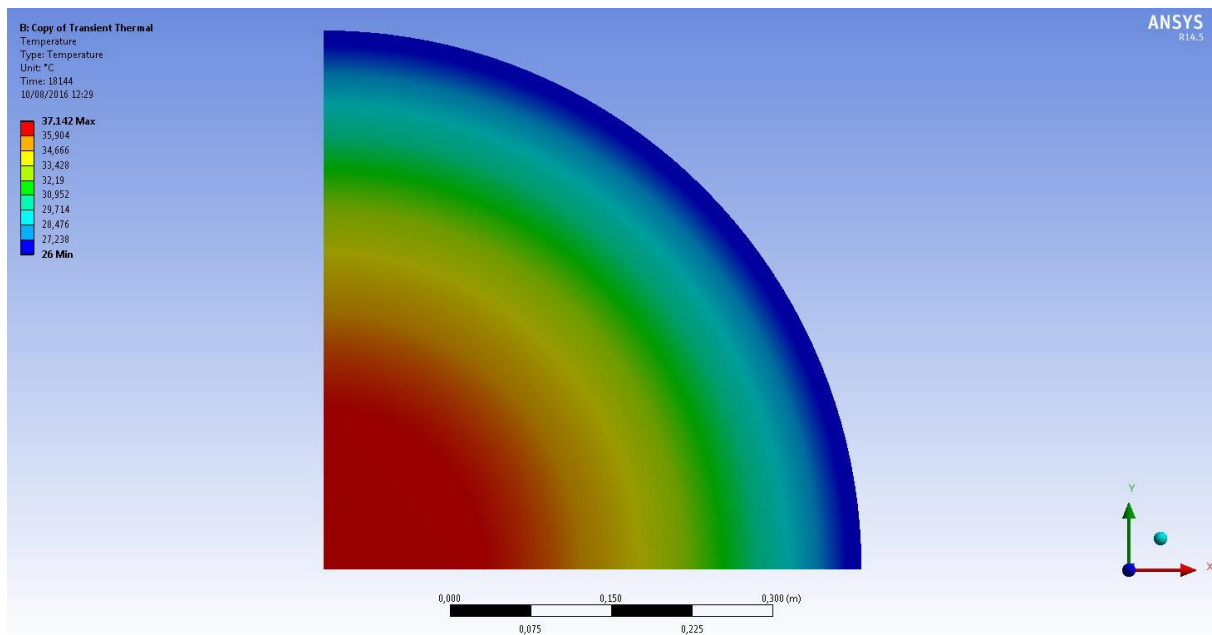
## 4.2 Difusividade térmica com geração interna de calor constante

Para a simulação numérica considerou-se uma temperatura inicial de 36°C e mantendo a temperatura imposta na superfície lateral do cilindro em 26°C, com uma difusividade térmica de 0,0782 m<sup>2</sup>/dia, e as propriedades apresentadas na Tabela 3.

**Tabela 3 – Propriedades e características do cilindro.**

Propriedade	Símbolo	Valor
Condutividade térmica	$k$	2 W/m.°C
Massa específica	$\rho$	2350 kg/m <sup>3</sup>
Calor específico	$c$	940 J/kg.°C
Raio	$R$	0,5 m
Temperatura inicial	$T_0$	36.0 °C
Temperatura final	$T_\infty$	26.0 °C
Geração interna de calor	$g_0$	200.0 W/m <sup>3</sup>

Os resultados encontrados podem ser visualizados na Fig. 6 para o tempo em que se obteve a temperatura máxima, 18144 s. A análise mostra  $\frac{1}{4}$  da seção transversal do cilindro. Observa-se que no contorno a temperatura permanece constante e igual a 26°C, e a máxima temperatura é obtida no centro, ou seja, para  $r = 0$ .



**Figura 6 – Isotermas de temperatura do cilindro obtidas com o ANSYS para geração de calor constante.**

A Fig. 7 apresenta o gráfico comparativo entre as temperaturas analíticas e numéricas para diferentes tempos de análises,  $t = 1$  dia e  $t = 0,2$  dias, sendo a temperatura mostrada no eixo das abcissas e no eixo das ordenadas o raio. Em ambos os casos, a máxima foi obtida para  $r = 0$ , ou seja, no centro do cilindro reduzindo até obter a temperatura do contorno, aqui também temperatura de equilíbrio. Nota-se também que para 0,2 dias as temperaturas foram maiores que para 1 dia, isso porque, o concreto tem uma geração interna de calor e, conseqüentemente, uma elevação inicial de temperatura para, posteriormente, começar a resfriar. Assim, nos tempos iniciais há aquecimento e depois um resfriamento.

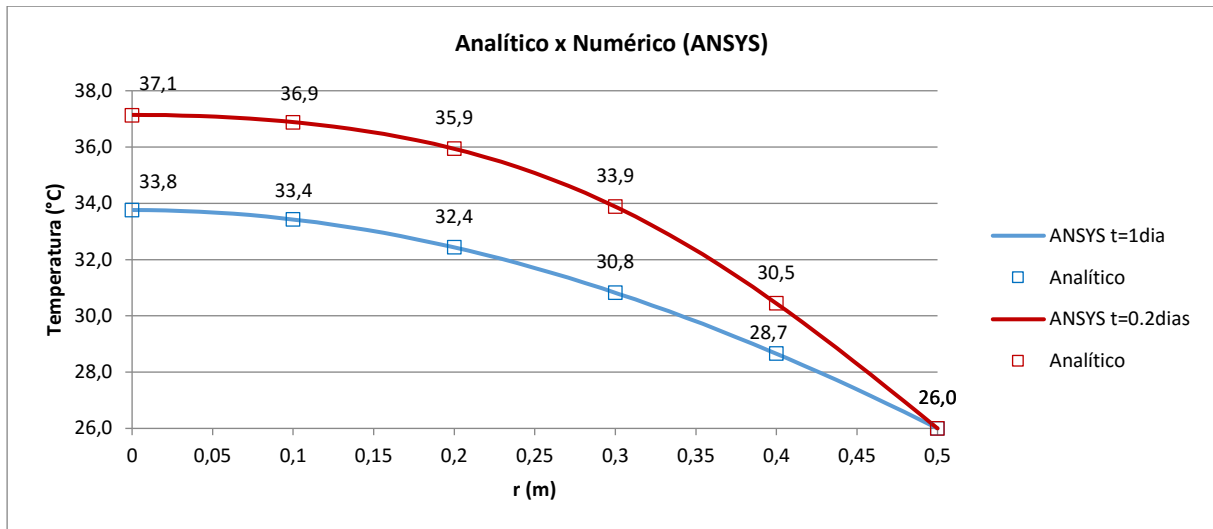


Figura 7 - Comparativo entre as temperaturas analíticas e numéricas para diferentes tempos de análises para geração de calor constante.

Fazendo a análise para diferentes relações adimensionais,  $r/R$ , até o tempo de 3 dias, obtém-se o gráfico da Fig. 8.

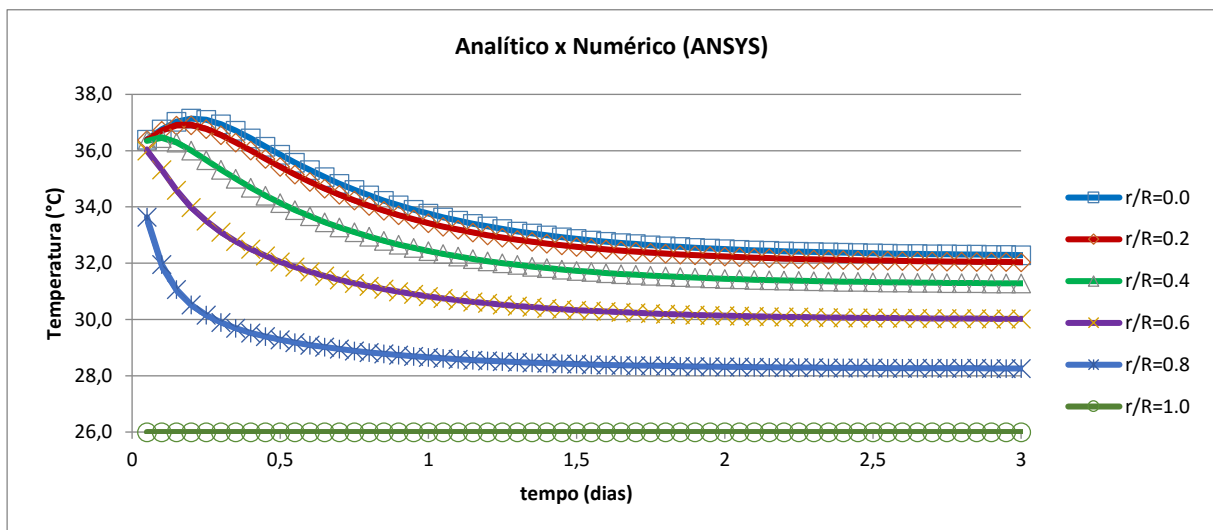


Figura 8 – Comparativo: temperaturas analíticas e numéricas em função do tempo para diferentes razões  $r/R$  para geração de calor constante.

### 4.3 Difusividade térmica com geração interna de calor genérica

Alterando apenas a geração interna de calor do subitem anterior e mantendo iguais todas as propriedades térmicas e o raio do cilindro, é possível comparar a solução numérica e analítica apresentada pela Eq. (16).

A equação da taxa de geração interna de calor utilizada foi dada pela Eq. (17):

$$g(t) = \rho c \Delta T^{adi} \frac{a^N N t^{N-1}}{(a^N + t^N)^2} \quad (17)$$

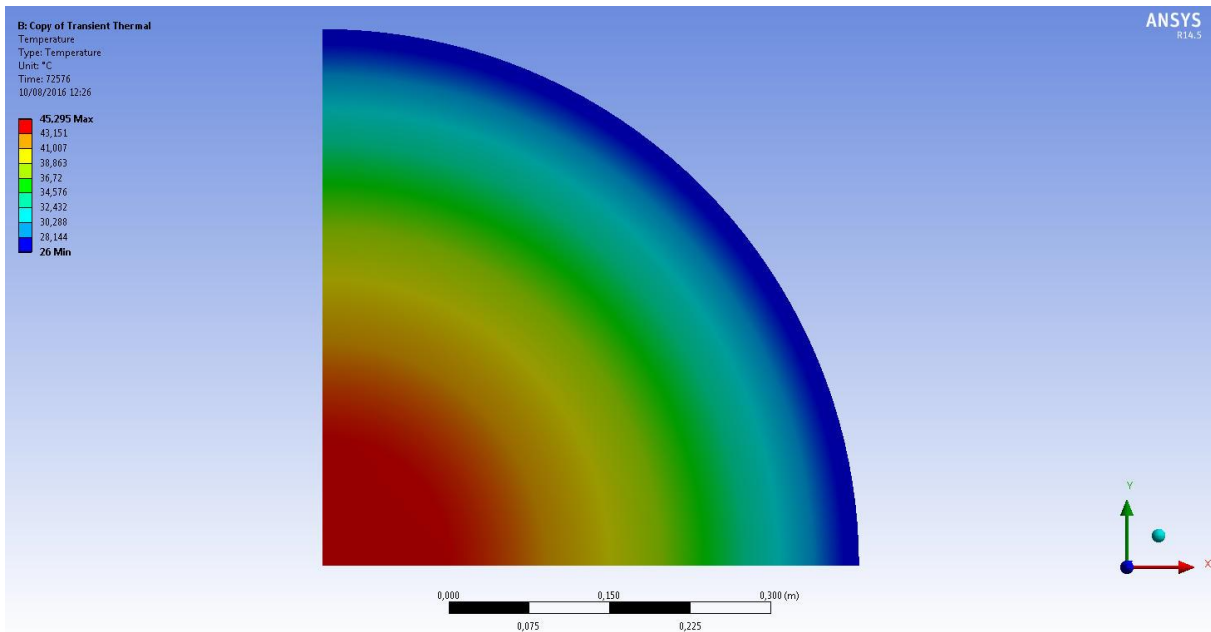
A Eq. (17) correspondente a uma elevação adiabática de temperatura de equação conhecida como “função Hill”, Eq. (18) (Faria, 2004).

$$\Delta T(t) = \Delta T^{adi} \frac{t^N}{a^N + t^N} \quad (18)$$

sendo:

- $\Delta T^{adi} = 39^\circ\text{C}$ , elevação adiabática (final) de temperatura;
- $a = 0.8$ , constante da função, em dia;
- $N = 2.0$ , constante da função, sem unidade;
- $\rho = 2350$ , massa específica, em  $\text{kg}/\text{m}^3$ ;
- $c = 940$ , calor específico, em  $\text{J}/\text{kg}^\circ\text{C}$ ;

A Fig. 9 mostra os resultados numéricos para o cilindro com a geração interna de calor genérica aplicada. Nota-se que a temperatura da superfície externa apresenta temperatura constante, dada pela C.C., e as máximas são obtidas no centro.



**Figura 9 – Isotermas de temperatura do cilindro obtidas com o software ANSYS para geração de calor genérica.**

No gráfico da Fig. 10, tem-se a comparação dos resultados analíticos e numéricos para as temperaturas ao longo do raio nas idades de 0.2 e 1 dia. Observa-se que os resultados foram coincidentes, significando a adequada representação numérica do fenômeno.

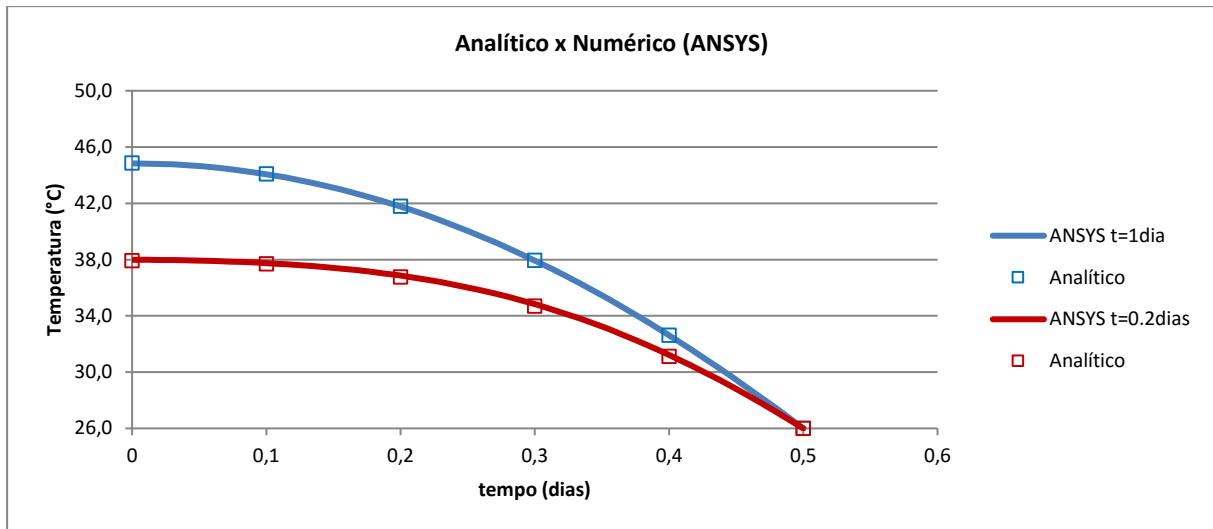


Figura 10 - Comparativo entre as temperaturas analíticas e numéricas para diferentes tempos de análises para geração de calor genérica.

Na Fig. 11, são dadas as temperaturas em diferentes razões  $r/R$  no decorrer do tempo de três dias. As máximas temperaturas são para a relação  $r/R = 0$ , ou seja, no centro do cilindro, reduzindo até a extremidade. As máximas temperaturas são obtidas para um tempo de aproximadamente 0,85 dias devido a equação de geração genérica.

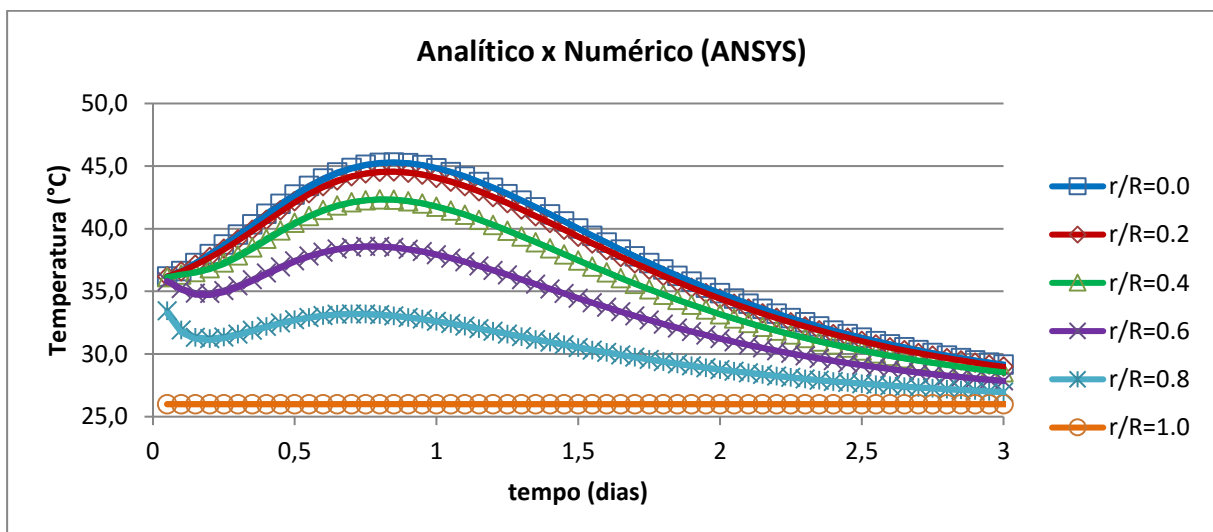


Figura 11 – Comparativo: temperaturas analíticas e numéricas em função do tempo para diferentes razões  $r/R$  para geração de calor genérica.

## 5 CONCLUSÕES

As propriedades térmicas dos materiais, notadamente o concreto, são importantes para descrever seu comportamento quanto à geração e difusão do calor. A difusividade térmica é pré-requisito essencial nas análises térmicas, pois relaciona-se com o tempo de resfriamento do material sujeito a determinadas condições iniciais e de contorno. A geração interna de

calor é necessária para se modelar o comportamento do concreto em situações reais de serviço. Os ensaios calorimétricos para o conhecimento desta importante propriedade são relativamente caros e demorados, apenas sendo possível de realizar em laboratórios especializados. Já a situação descrita, de um corpo-de-prova cilíndrico sujeito simultaneamente à geração interna de calor e a um resfriamento forçado pela superfície, é possível ser facilmente reproduzida em campo. Com a formulação descrita, em que a temperatura em função do tempo está analiticamente relacionada à taxa de geração de calor, é possível então, à partir do histórico de temperaturas medido, calcular por retroanálise a taxa de geração interna de calor. Esta importante propriedade pode ser então determinada a partir de medições de temperatura em corpo-de-prova “passivo”, isto é, sem equipamento especial para controlar o ambiente circundante do corpo-de-prova.

Esta formulação torna-se interessante para ser aplicada também na validação e calibração de calorímetros semi-adiabáticos, que atualmente são os de mais baixo custo encontrados no mercado e para os quais não se conta ainda com normalização para calibração.

O desenvolvimento teórico da equação analítica da temperatura para uma geração interna de calor genérica permitiu utilizar um importante teorema, ainda pouco explorado nesta matéria, que é o teorema de Duhamel. Diversos outros casos importantes relacionados à geração interna de calor podem ser desenvolvidos utilizando-se a mesma ferramenta teórica deste teorema: a) o caso de uma placa infinita, b) o caso do lançamento de uma camada de concreto sobre um substrato inerte e c) o caso da pós-refrigeração. Todos estes casos estão sendo explorados para o desenvolvimento de uma solução analítica considerando uma geração interna de calor genérica.

Em termos de modelagem computacional, é sempre importante realizar estudos de convergência de malha, estudando o adequado grau de refinamento do tamanho médio dos elementos, bem como o grau de refinamento da discretização temporal. A realização de uma modelagem numérica envolvendo geração interna de calor, para a qual a resposta analítica é conhecida, é capaz de garantir que o refinamento espacial e temporal estão adequados à análise em questão. Isto se faz particularmente importante antes de se realizar a modelagem de grandes estruturas em que o refinamento da malha causa um aumento exponencial do esforço computacional.

Por fim, este caso de geração interna de calor genérica em cilindro com temperatura imposta na superfície vem a compor um importante caso de benchmark nesta área de simulação numérica do concreto nas primeiras idades a se integrar ao esforço internacional sendo engendrado neste sentido (TU COST 1404).

## **AGRADECIMENTOS**

A FURNAS, pelos projetos de pesquisa ANEEL que permitiram o desenvolvimento dos trabalhos relacionados ao concreto massa, tanto da parte numérica quanto experimental. À UNIVASF, ao PECC-UnB e ao CNPq pelo apoio e colaboração para a realização da pesquisa.

## **REFERÊNCIAS**

American Concrete Institute. *Report on Thermal and Volume Change Effects on Cracking of Mass Concrete*. Farmington Hills, 2007.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 12818: *Concreto - Determinação da difusividade térmica*. Rio de Janeiro: 1993.

Azenha, M. A. D.; *Numerical Simulation of The Structural Behaviour of Concrete Since Its Early Ages*. 379 f. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto – FEUP. Porto: 2009.

Azenha, M. A. D.; Cruz, J. S.; Camões, A.; Ferreira, R. M.; Numerical Simulation of the Structural Behaviour of Concrete Tetrapods Subject to Imposed Deformations and Applied Loads. Congress on Numerical Methods in Engineering. Coimbra. Junho: 2011.

Bamonte, P.; Gambarova, P.G.; *Thermal and Mechanical Properties at High Temperature of a Very High-Strength Durable Concrete*. Journal of Materials in Civil Engineering. V. 22. ASCE: 2010.

Boulder Dam Project, 1940

Coelho, N. A.. *Um Estudo Numérico do Efeito Térmico em Concreto Massa*. 152 f. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2012.

Coelho, N. A.; Nepomuceno, A. A.; Pedroso, L. J.; *O concreto massa e seus efeitos térmicos*. Novas Edições Acadêmicas: 2014.

Coelho, N. A.; Pedroso, L. J.; Rêgo, J. H. S.; Nepomuceno, A. A.; *Use of ANSYS for Thermal Analysis in Mass Concrete*. Journal of Civil Engineering and Architecture. V. 8. Number 7. David Publishing Company: 2014.

CTHERM; Thermal Conductivity. Manual técnico. Thermal Conductivity Analyzer: 2013.

De Schutter, G.; Taerwe, L.; *Specific-Heat and Thermal-Diffusivity of Hardening Concrete*. V. 47. Magazine of Concrete Research: 1995.

FARIA, Étore Funchal. *Predição da exotermia da reação de hidratação do concreto através de modelo termo-químico e modelo de dados*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE. Rio de Janeiro: 2004.

FURNAS, EQUIPE DE. Concretos massa, estrutural, projetado e compactado com rolo-Ensaio e propriedades. São Paulo: PINI, 1997. Laboratório de Concreto.

Gomes, F. M. P.; *Concreto nas primeiras idades: propriedades e modelagem termomecânica simplificada*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Goiás. Goiânia: 2011.

Gomes, F. M. P.; *Thermal diffusivity with heat internal generation*. Relatório de pesquisa. Universidade de Brasília – UnB. Brasília: 2016.

Incropera, F. P.; Dewitt, D. P.; Bergman, T. L.; Lavine, A. S.. *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

Hahn, D. W.; Özişik, M. N.; *Heat Conduction*. 3 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2012.

Liduário, A. S.; Farias, L. A.; Geyer, A. L. B.; Vieira, F. L.; Andrade, M. A. S.; Andrade, W. P.; *Influência de materiais pozolânicos ou minerais no comportamento térmico do concreto*. Ibracon: 2005.

Neville, A. M. *Propriedades do concreto*. 2. ed. São Paulo: Pini, 1997. 828 p.

Santos, S. B. *Uma Contribuição ao Estudo do Comportamento Termomecânico de Estruturas Maciças de Concreto*. Modelagem Viscoelástica Linear e Aplicações. 287 f. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória: 2004.



Ukrainczyk, N.; Matusinović, T.; *Thermal properties of hydrating calcium aluminate cement pastes*. Cement and Concrete Research. V. 40. Elsevier: 2010. Doi:10.1016/j.cemconres.2009.09.005.

## ANEXO

### Script Freemate da implementação da solução analítica para geração de calor genérica

```
% CylindricHGenNecatiOzisikp296.m
% David Hann e Necati Ozisik, Heat Conduction, 2012
% Exemplo 7.5, pág 295
% *****
% ENSAIO DE GERAÇÃO INTERNA DE CALOR POR CALORÍMETRO SEMI-ADIABÁTICO
% Cilindro infinito de raio "b"
% com temperatura inicial diferente de a Tf
% sujeito a condição de contorno de temperatura imposta igual a Tf = Ti
% *****

clear all; clc; format long
Ti = 36;
Tf = 26;
b = 0.5; % m - raio externo
h2 = 0.07822544137619 / 86400; % m2/s - difusividade térmica
k = 2.0; % W/m2°C - condutividade térmica
t = 0:864:864000; % s - tempo em segundos
r = [ 0 b/5 2*b/5 3*b/5 4*b/5 b ]; % interessa o resfriamento do centro do corpo-de-prova
nr = length(r);
q0 = 39*k/h2;

%%%%%%%%%%%%%%
% raízes da equação característica:
% J0(mi(n)*b) = 0
% -----
mi = [ 2.4048 5.5201 8.6537 11.7915 14.9309 18.0711 21.2116 24.3525 27.4935 30.6346 ]/b;
% -----
%%%%%%%%%%%%%%

for i = 1:nr
    for n = 1:10
        J0r(n) = Bessel(0,mi(n)*r(i));
        % J0b(n) = Bessel(0,mi(n)*b);
        J1b(n) = Bessel(1,mi(n)*b);
        % J2b(n) = Bessel(2,mi(n)*b);
        % C(n) = J0r(n)/mi(n)/J1b(n);
        % C(n) = ( 2 * mi(n) * (Ti - Tf) * J1b(n) - b / k * J2b(n) ) / ( mi(n)^2 * b * (J0b(n)^2 + J1b(n)^2) );
    end

    j=1;
    g_(j) = 0;
    soma = 0;
    for n = 1:10
        phi(j,n) = 1;
        % soma = soma + C(n) * phi(j,n);
    soma = soma + J0r(n)/(mi(n)*b*J1b(n)) * phi(j,n);
    end
    Teta(j,i) = Tf - soma;

    for j = 2:1001
        g_(j) = q0*(0.8*86400)^2*((t(j)+t(j-1))/2)^(2-1)/((0.8*86400)^2 + ((t(j)+t(j-1))/2)^2)^2;
        soma = 0;
        for n = 1:10
            Po(j,n) = g_(j)*b^2/(k*(Ti-Tf));
            phi(j,n) = Po(j,n)/(mi(n)*b)^2*(1-exp(-h2*mi(n)^2*(t(j)-t(j-1)))) + phi(j-1,n) * exp(-h2*mi(n)^2*(t(j)-t(j-1)));
        end
    end
end
```

```
soma = soma + J0r(n)/(mi(n)*b*J1b(n)) * phi(j,n);
    end
    Teta(j,i) = Tf + 2*soma*(Ti-Tf);
    end
end

tdia = t'/86400;

plot(tdia,Teta);
set(gca,'position',[0.12 0.15 0.8 0.8]);
ylabel('Temperature (°C)');
xlabel('time (days)');
legend('Analytical');
print('HanOsisikEx7_5p314.png');

Res = [ tdia Teta ];
save('CylindricHGen.txt','Res');

soma = 0;
for j=1:1001
    soma = g_(j)*864 + soma;
end
Q(j) = soma;
Tadi = Q(j)*h2/k

% Salvar o script abaixo como outro script com o nome de Bessel.m e deixar na mesma pasta de trabalho do script principal
function out = Bessel(a,z)

    soma = 0;
    for m=0:100
        soma = soma + (-1)^m/gamma(m+1)/gamma(m+a+1)*(z/2)^(2*m+a);
    end
    out = soma;
end
```