



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

MÉTODO CE/SE COM FUNÇÕES DE BASE POLINOMIAL DE SEGUNDA ORDEM PARA AS EQUAÇÕES DE SAINT VENANT UNIDIMENSIONAIS

Adriano Rodrigues de Melo

melo.a.rodriques@gmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense - IFC, 89245-000, Araquari, Santa Catarina, Brasil. PPGMNE, UFPR, 81531-970, Curitiba, Paraná, Brasil

Liliana Madalena Gramani

Eloy Kaviski

l.gramani@gmail.com

eloy.dhs@ufpr.br

PPGMNE, UFPR, 81531-970, Curitiba, Paraná, Brasil

Resumo. *O método dos elementos de conservação espaço-tempo e elementos de solução (CE/SE) é um método multidimensional robusto e acurado proposto por Chang em 1991. Fundamentado na resolução de leis de conservação, tal método é caracterizado por explorar, de modo conjunto, as formas integrais e diferenciais das leis de conservação. Apresenta-se, neste artigo, o desenvolvimento de um novo esquema CE/SE explícito para a solução das equações de Saint Venant unidimensionais, utilizando funções de base polinomiais de segunda ordem. Diferentemente dos esquemas tradicionais compostos por quatro variáveis de marcha, na presente formulação, as variáveis dinâmicas são aproximadas localmente por um polinômio de Taylor de segunda ordem, de modo que as equações resultantes são constituídas por seis incógnitas. As relações pertinentes às duas variáveis adicionais são obtidas combinando-se as equações de continuidade e quantidade de movimento. Para demonstrar a acurácia, eficiência e robustez do método, problemas de ruptura de barragem, escoamentos subcríticos e transcríticos são simulados numericamente. Os resultados comprovam que o esquema proposto possui alta habilidade em capturar choques e discontinuidades.*

Palavras-chave: *Método CE/SE, Equações de Saint Venant, Polinômio de Taylor de 2ª ordem*

INTRODUÇÃO

Os métodos convencionais de dinâmica de fluidos computacional (CFD) focam na discretização das equações diferenciais parciais (Liu *et al.*, 2015). Por outro lado, o método dos elementos de conservação espaço-tempo e elementos de solução ou, de modo abreviado, método CE/SE, considera na sua formulação, informações tanto da forma diferencial quanto da forma integral das leis de conservação (Chang e To, 1991). Esta estratégia se justifica pelo fato de que a representação diferencial de uma lei de conservação surge da lei integral sob a hipótese de que a solução física é suave, situação que é difícil de realizar numericamente numa região de rápida mudança, tal como uma camada limite turbulenta (Chang *et al.*, 1999).

No método CE/SE original, a variável fluxo \mathbf{Q} e o gradiente espacial \mathbf{Q}_x são considerados como incógnitas e são resolvidos simultaneamente (Zhang *et al.*, 1999). Por tanto, para um sistema de equações unidimensionais como Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh(S_{0x} - S_{fx}), \quad (2)$$

obtém-se convencionalmente quatro variáveis de marcha: $\mathbf{Q} = (h, q)$ e $\mathbf{Q}_x = (h_x, q_x)$, em que $h(x, t)$ é a profundidade do fluxo (m); $q = uh$ sendo $u(x, t)$ a velocidade média do escoamento (m/s) na direção x ; x é a distância ao longo do canal (m); t é o tempo (s); g é a aceleração da gravidade (m/s^2) e S_{0x} é a inclinação do fundo do canal. A resistência do escoamento pode ser avaliada pela relação (Chaudhry, 2008, p. 249):

$$S_{fx} = \frac{\eta^2 |u|u}{C_0^2 h^{4/3}}, \quad (3)$$

com coeficiente de Manning η ($\text{m}^{-1/3}\text{s}$) e fator de correção para unidades C_0 (no SI, $C_0 = 1$, enquanto que em unidades inglesas, $C_0 = 1,49$).

As equações de Saint Venant constituem um dos modelos mais comumente usados na análise de fluxo de águas rasas em rios ou áreas costais (Yang *et al.*, 2015), sendo que (1) e (2) representam sua forma conservativa unidimensional para um canal retangular (Chaudhry, 2008). Molls e Molls (1998) e Zhang *et al.* (2012) desenvolveram esquemas pela formulação CE/SE para as equações de águas rasas unidimensionais e bidimensionais, simulando o problema de ruptura de barragem nestas dimensões. Molls e Molls (1998) apresentaram, ainda, simulações de ressalto hidráulico 1D e 2D.

Este trabalho tem por objetivo apresentar o desenvolvimento de novos esquemas CE/SE para as equações (1) e (2), utilizando funções de base polinomial de segunda ordem em x e t (as abordagens convencionais utilizam polinômios de primeira ordem). Para isso, este artigo é organizado da seguinte maneira: na seção 2, são elencadas as principais características do método, como definições dos elementos de conservação (CE) e dos elementos de solução (SE), bem como as aproximações das leis diferenciais e integrais de conservação. Deduz-se, ainda nesta seção, as equações que regem o esquema de marcha. Na seção 3, alguns estudos de

caso são simulados, como problemas de escoamento subcrítico e transcrito, além do clássico problema de ruptura de barragem unidimensional. Por fim, na seção 4, são apresentadas as conclusões e considerações finais.

DESENVOLVIMENTO

Para aplicar o método CE/SE, as formas conservativas das equações (1) e (2) são reescritas, respectivamente, como

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = F, \quad (5)$$

em que

$$q = uh, \quad f = \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \quad F = -gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad \text{e} \quad S_{fx} = \frac{\eta^2|q|q}{C_0^2h^{10/3}}. \quad (6)$$

Agora, pelo teorema da divergência de Gauss no espaço \mathbb{R}^2 , tem-se que as equações em (4) e (5) representam as formas diferenciais das leis integrais de conservação

$$\oint_{S(V)} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = \int_V F dV, \quad (7)$$

em que $S(V)$ representa o contorno de uma região espaço-tempo $V \subset \mathbb{R}^2$ e \mathbf{Q} e \mathbf{P} os campos vetoriais

$$\mathbf{Q} = (h, q) \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = (q, f). \quad (8)$$

Seja Ψ o conjunto de todos os pontos de uma malha em V , conforme Fig. 1(a). Para cada $(i, j) \in \Psi$ associa-se um elemento de solução, denotado por $SE(i, j)$ e definido como sendo o interior de uma região espaço-tempo limitada por uma curva pontilhada, conforme Fig. 1(b). Note-se que o elemento de solução é basicamente uma vizinhança dos segmentos de reta horizontal e vertical centrados em (i, j) .

Para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, $h(x, t)$ e $q(x, t)$ são aproximados por polinômios de Taylor de segunda ordem, dados respectivamente por

$$h^*(x, t; i, j) = h_i^j + (h_x)_i^j(x - x_i) + (h_t)_i^j(t - t_j) + \frac{1}{2}(h_{xx})_i^j(x - x_i)^2 + (h_{xt})_i^j(x - x_i)(t - t_j) + \frac{1}{2}(h_{tt})_i^j(t - t_j)^2, \quad (9)$$

$$q^*(x, t; i, j) = q_i^j + (q_x)_i^j(x - x_i) + (q_t)_i^j(t - t_j) + \frac{1}{2}(q_{xx})_i^j(x - x_i)^2 + (q_{xt})_i^j(x - x_i)(t - t_j) + \frac{1}{2}(q_{tt})_i^j(t - t_j)^2. \quad (10)$$

Observa-se a partir da Eq. (6), que F é função explícita das variáveis h e q e

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial h} h_x + \frac{\partial f}{\partial q} q_x, \quad f_t = \frac{\partial f}{\partial h} h_t + \frac{\partial f}{\partial q} q_t, \quad (11)$$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} h_x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial q} h_x q_x + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} q_x^2 + \frac{\partial f}{\partial h} h_{xx} + \frac{\partial f}{\partial q} q_{xx}, \quad (12)$$

$$f_{xt} = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} h_x h_t + \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial q} h_x q_t + \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial q} q_x h_t + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} q_x q_t + \frac{\partial f}{\partial h} h_{xt} + \frac{\partial f}{\partial q} q_{xt}, \quad (13)$$

$$f_{tt} = \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} h_t^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial h \partial q} h_t q_t + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} q_t^2 + \frac{\partial f}{\partial h} h_{tt} + \frac{\partial f}{\partial q} q_{tt}, \quad (14)$$

isto é, f e suas derivadas de primeira e segunda ordem são todas funções de h , q e suas respectivas derivadas. Por essa razão, a função f pode ser aproximada também por um polinômio de Taylor de segunda ordem

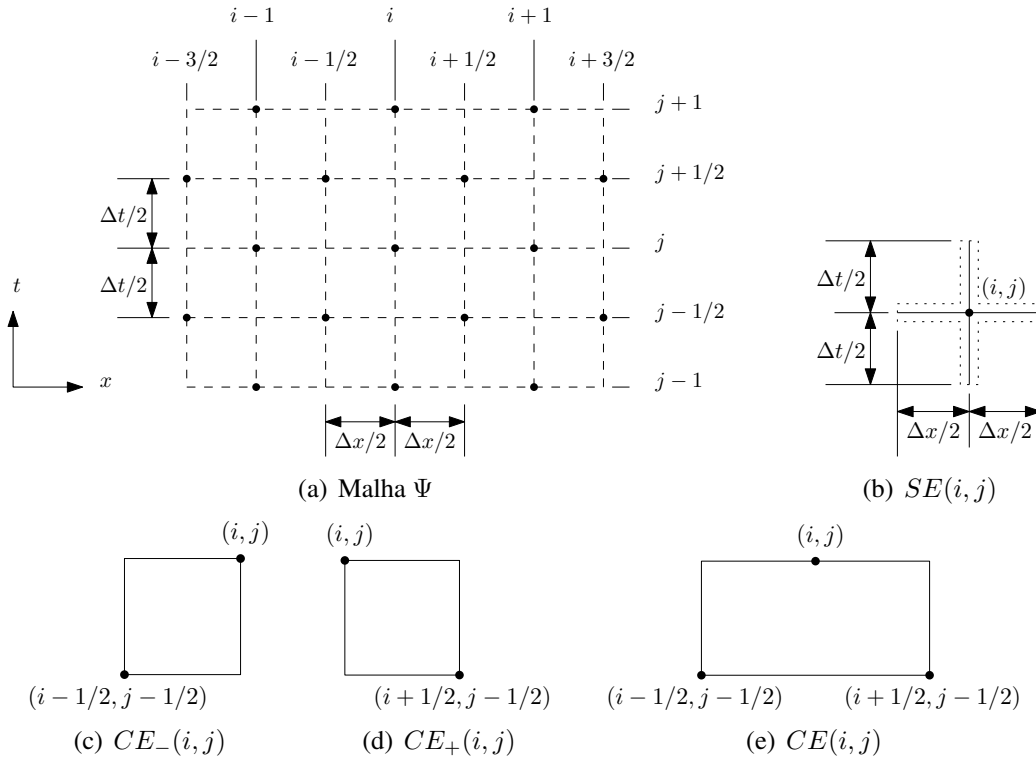


Figura 1: Formação da malha espaço-tempo Ψ escalonada (a), bem como elementos de solução (b) e elementos de conservação espaço-tempo (c), (d) e (e), todos formulados conforme Chang *et al.* (1991) e Chang (1993).

$$f^*(x, t; i, j) = f_i^j + (f_x)_i^j(x - x_i) + (f_t)_i^j(t - t_j) + \frac{1}{2}(f_{xx})_i^j(x - x_i)^2 + (f_{xt})_i^j(x - x_i)(t - t_j) + \frac{1}{2}(f_{tt})_i^j(t - t_j)^2, \quad (15)$$

de tal forma que seus coeficientes são dependentes das variáveis dinâmicas h , q e de suas derivadas.

Por outro lado, aproxima-se o termo fonte F por um polinômio de Taylor de primeira ordem, pois o mesmo possui derivada de uma ordem a menos que h e q nas equações (4) e (5). Assim,

$$F^*(x, t; i, j) = F_i^j + (F_x)_i^j(x - x_i) + (F_t)_i^j(t - t_j). \quad (16)$$

Para todo $(x, t) \in SE(i, j)$, aproximam-se as equações em (4) e (5) por

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{\partial q^*}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial q^*}{\partial t} + \frac{\partial f^*}{\partial x} = F^*. \quad (17)$$

respectivamente. Com isso, os campos vetoriais em (8) são aproximados por $\mathbf{Q}^* = (h^*, q^*)$ e $\mathbf{P}^* = (q^*, f^*)$, de modo que as correspondentes leis integrais em (7) são aproximadas por

$$\oint_{S(V)} \mathbf{Q}^* \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{S(V)} \mathbf{P}^* \cdot d\mathbf{s} = \int_V F^* dV. \quad (18)$$

Substituindo-se as equações (9), (10), (15) e (16) em (17), obtém-se

$$(h_t)_i^j = -(q_x)_i^j, \quad (h_{tt})_i^j = -(q_{xt})_i^j, \quad (h_{xt})_i^j = -(q_{xx})_i^j, \quad (h_{tt})_i^j = (f_{xx})_i^j, \quad (19)$$

$$(q_t)_i^j = -(f_x)_i^j + F_i^j, \quad (q_{tt})_i^j = -(f_{xt})_i^j + (F_t)_i^j, \quad (q_{xt})_i^j = -(f_{xx})_i^j + (F_x)_i^j. \quad (20)$$

Comparando-se as equações (6), (11)-(14), (19) e (20), verifica-se que as aproximações (9), (10), (15) e (16) dependem apenas das variáveis

$$h_i^j, \quad (h_x)_i^j, \quad (h_{xx})_i^j, \quad q_i^j, \quad (q_x)_i^j \quad \text{e} \quad (q_{xx})_i^j, \quad (21)$$

isto é, os seis termos em (21) são as únicas variáveis de marcha associadas com o ponto (i, j) da malha Ψ .

As regiões retangulares não sobrepostas que dividem o domínio (ver Fig. 1(a)), serão referidas como elementos de conservação $CE(i, j)$ (Fig. 1(e)). Cada ponto $(i, j) \in \Psi$ está associado a dois CE's, denotados por $CE_-(i, j)$ e $CE_+(i, j)$ (ver Fig. 1(c) e Fig. 1(d)). O contorno de um CE é composto por dois SE's, por exemplo, o contorno de $CE_-(i, j)$ é formado por $SE(i, j)$ e $SE(i - 1/2, j - 1/2)$ (Chang, 1995; Chang *et al.*, 2000).

Avaliação de h_i^j e q_i^j

Para prosseguir, avalia-se as integrais de linha em (18) sobre o ij -ésimo elemento de conservação, isto é,

$$\oint_{S(CE_{\pm}(i,j))} \mathbf{Q}^* \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{S(CE_{\pm}(i,j))} \mathbf{P}^* \cdot d\mathbf{s} = \int_{CE_{\pm}(i,j)} F^* dV, \quad (22)$$

de modo que h_i^j e q_i^j podem ser obtidos, após todas as simplificações, como

$$h_i^j = \frac{1}{2} \left(\hat{h}_{i-1/2}^{j-1/2} + \tilde{h}_{i+1/2}^{j-1/2} \right) - \frac{\Delta x^2}{24} (h_{xx})_i^j, \quad (23)$$

$$q_i^j = \frac{1}{2} \left(\hat{q}_{i-1/2}^{j-1/2} + \tilde{q}_{i+1/2}^{j-1/2} \right) + \frac{\Delta t}{4} \left(\hat{F}_{i-1/2}^{j-1/2} + \tilde{F}_{i+1/2}^{j-1/2} \right) - \frac{\Delta x^2}{24} (q_{xx})_i^j, \quad (24)$$

respectivamente, onde

$$\hat{h}_i^j = h_i^j + \frac{\Delta x}{4} (h_x)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} (h_{xx})_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} q_i^j + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (q_t)_i^j + \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} (q_{tt})_i^j, \quad (25)$$

$$\tilde{h}_i^j = h_i^j - \frac{\Delta x}{4} (h_x)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} (h_{xx})_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} q_i^j - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (q_t)_i^j - \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} (q_{tt})_i^j, \quad (26)$$

$$\hat{q}_i^j = q_i^j + \frac{\Delta x}{4} (q_x)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} (q_{xx})_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} f_i^j + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (f_t)_i^j + \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} (f_{tt})_i^j, \quad (27)$$

$$\tilde{q}_i^j = q_i^j - \frac{\Delta x}{4} (q_x)_i^j + \frac{\Delta x^2}{24} (q_{xx})_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_i^j - \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} (f_t)_i^j - \frac{\Delta t^3}{24\Delta x} (f_{tt})_i^j, \quad (28)$$

$$\hat{F}_i^j = F_i^j + \frac{\Delta x}{4} (F_x)_i^j + \frac{\Delta t}{4} (F_t)_i^j \quad \text{e} \quad \tilde{F}_i^j = F_i^j - \frac{\Delta x}{4} (F_x)_i^j + \frac{\Delta t}{4} (F_t)_i^j. \quad (29)$$

Saliente-se que $(q_t)_i^j$, $(q_{tt})_i^j$, $(f_t)_i^j$ e $(f_{tt})_i^j$ são calculados conforme equações (11)-(14), (19) e (20), isto é, utilizando sempre as variáveis em (21).

As variáveis h_i^j e q_i^j em (23) e (24) dependem de $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$, respectivamente. Dessa forma, necessita-se avaliar previamente $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$.

Avaliação de $(h_x)_i^j$ e $(q_x)_i^j$

Seja m o número de leis de conservação unidimensionais a serem resolvidas. No método CE/SE tradicional existem $2m$ variáveis de marcha independentes para cada ponto (i, j) da malha (Chang *et al.*, 1999, p. 96). O esquema proposto neste trabalho supõe seis variáveis de marcha, ou seja, duas a mais que o esperado. Para contornar esta situação, combinaremos as equações (4) e (5), da seguinte maneira

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= -\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} + F \right) \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (30)$$

Assim, integrando a equação anterior sobre os elementos de conservação $CE_{\pm}(i, j)$ e aplicando teorema da divergência, obtém-se

$$\int_{CE_{\pm}(i,j)} \text{div} \mathbf{F}^* dV = \oint_{S(CE_{\pm}(i,j))} \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (31)$$

em que $\mathbf{F}^*(x, t; i, j) = (-f_x^* + F^*, h_x^*)$. Tomando $\bar{f}_x = f_x - F$, a Eq. (31) se torna

$$(q_x)_i^j = \frac{1}{2} \left\{ (q_x)_{i+1/2}^{j-1/2} + (q_x)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x}{4} \left[(q_{xx})_{i-1/2}^{j-1/2} - (q_{xx})_{i+1/2}^{j-1/2} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\bar{f}_x)_{i-1/2}^{j-1/2} - (\bar{f}_x)_{i+1/2}^{j-1/2} \right] + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \left[(\bar{f}_{xt})_{i-1/2}^{j-1/2} - (\bar{f}_{xt})_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \right\}. \quad (32)$$

De maneira equivalente, considerando $\mathbf{F}^* = (q_x^*, h_x^*)$ em (31), teremos

$$(h_x)_i^j = \frac{1}{2} \left\{ (h_x)_{i+1/2}^{j-1/2} + (h_x)_{i-1/2}^{j-1/2} + \frac{\Delta x}{4} \left[(h_{xx})_{i-1/2}^{j-1/2} - (h_{xx})_{i+1/2}^{j-1/2} \right] + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(q_x)_{i-1/2}^{j-1/2} - (q_x)_{i+1/2}^{j-1/2} \right] + \frac{\Delta t^2}{4\Delta x} \left[(q_{xt})_{i-1/2}^{j-1/2} - (q_{xt})_{i+1/2}^{j-1/2} \right] \right\}. \quad (33)$$

Avaliação de $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$

Para evitar oscilações causadas por descontinuidades, calcula-se $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$ por meio de uma média ponderada entre as diferenças regressivas e progressivas (Zhang *et al.*, 2012)

$$(h_{xx})_i^j = W\{(h_{xx}^+)_i^j, (h_{xx}^-)_i^j, \alpha\} \quad \text{e} \quad (q_{xx})_i^j = W\{(q_{xx}^+)_i^j, (q_{xx}^-)_i^j, \alpha\}, \quad (34)$$

onde a função W é definida como (Chang e To, 2010)

$$W(x_+, x_-, \alpha) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x_+ = x_- = 0 \\ \frac{|x_+|^\alpha x_- + |x_-|^\alpha x_+}{|x_+|^\alpha + |x_-|^\alpha} & , \text{ se } |x_+| + |x_-| > 0 \end{cases}, \quad (35)$$

e

$$(h_{xx}^\pm)_i^j = \pm \frac{2}{\Delta x} \left[(h'_x)_{i\pm 1/2}^j - (h_x)_i^j \right], \quad (h'_x)_{i\pm 1/2}^j = \left\{ h_x + \frac{\Delta t}{2} h_{xt} \right\}_{i\pm 1/2}^{j-1/2}, \quad (36)$$

$$(q_{xx}^\pm)_i^j = \pm \frac{2}{\Delta x} \left[(q'_x)_{i\pm 1/2}^j - (q_x)_i^j \right], \quad (q'_x)_{i\pm 1/2}^j = \left\{ q_x + \frac{\Delta t}{2} q_{xt} \right\}_{i\pm 1/2}^{j-1/2}. \quad (37)$$

A média ponderada das derivadas de segunda ordem é controlada pelo parâmetro α . Quando $\alpha = 0$, W é equivalente a diferenças finitas centrais e é adequado para regiões suaves, enquanto que α igual a um ou dois são usados em regiões com descontinuidades (Zhang *et al.*, 2012). Neste trabalho, utiliza-se $\alpha = 1$.

Consistência, erro de truncamento e estabilidade

Suponha-se inicialmente que as soluções u e q das equações (1) e (2) sejam funções suaves de modo que $u, q \in C^\infty(V)$ e ainda que $f(u, q) \in C^\infty(V)$. Neste caso, as funções u , q e f podem ser expandidas em série de Taylor na vizinhança de $(x_i, t_{j-1/2}) \in V \subset \mathbb{R}^2$. O mesmo é possível para suas derivadas, isto é, para as funções $h_x, h_t, q_x, q_{xx}, q_t, q_{tt}, f_t$ e f_{tt} . Substituindo estas expressões em série de Taylor devidamente nas equações (4) e (23), ao mesmo tempo em que as subtraímos, teremos

$$T_\Psi^h(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^4). \quad (38)$$

A Eq. (38) representa o erro de truncamento decorrente ao aproximar-se a Eq. (4) por (23). De modo análogo, obtemos os erros de truncamento

$$T_\Psi^q(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2), \quad (39)$$

$$T_\Psi^{q_x}(x_i, t_{j-1/2}) = \mathcal{O}(\Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) = T_\Psi^{h_x}(x_i, t_{j-1/2}), \quad (40)$$

obtidos com as aproximações (24), (32) e (33), respectivamente. Pelas equações anteriores, temos que os erros de truncamento $T_\Psi^{h,q,h_x,q_x}(x_i, t_{j-1/2}) \rightarrow 0$ quando $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. Quanto a $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$, pelas equações (34) e (35), temos que seus respectivos erros de truncamento são da ordem de $(h_x)_i^j$ e $(q_x)_i^j$. A condição de estabilidade de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) é restrita por (Zhang *et al.*, 2012)

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|u| + \sqrt{gh}), \quad (41)$$

onde o número de Courant satisfaz $0 < CFL \leq 1$.

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção apresenta-se simulações numéricas sobre três estudos de caso: o problema unidimensional de ruptura de barragem (subseção 3.1 a seguir) e problemas de escoamentos subcríticos (seção 3.2) e transcíticos (seção 3.3).

Problema de Riemann: ruptura de barragem

Nesta seção considera-se um problema ideal de ruptura de barragem sobre um domínio molhado, isto é, a quebra de barragem é instantânea, o fundo é plano e não existe resistência

ao escoamento. As condições iniciais para esta configuração seguem o clássico problema de Riemann

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l & , \text{ para } 0\text{m} \leq x \leq x_0\text{m} \\ h_r & , \text{ para } x_0\text{m} < x \leq L\text{m} \end{cases} , \quad \text{com } h_l \geq h_r \quad \text{e} \quad u(x, 0) = 0\text{m/s}. \quad (42)$$

O domínio considerado é $0\text{m} \leq x \leq 2000\text{m}$, $x_0 = 1000\text{m}$ e a solução analítica pode ser encontrada em Stoker (1957, p. 333) ou Delestre *et al.* (2013).

As variáveis do esquema são computadas com as equações (23), (24), (32), (33) e (34). Apresenta-se nas Fig. 2(a) e Fig. 2(b) um comparativo entre as soluções analítica e numérica, calculadas no tempo $t = 52\text{s}$, com $n + 1 = 201$ pontos, incremento espacial $\Delta x = 10\text{m}$ e profundidades iniciais a montante e a jusante $h_l = 10\text{m}$ e $h_r = 5\text{m}$, respectivamente. Notemos que a resposta numérica é coerente com a analítica, embora apresente suavidade que a distancia nas regiões com mudanças abruptas.

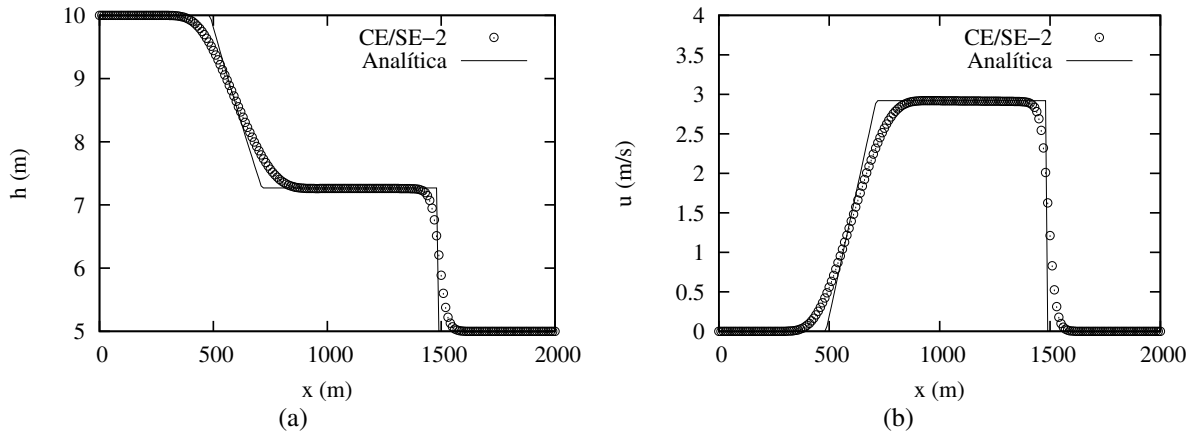


Figura 2: Elevação da superfície da água h e velocidade u para o problema de ruptura de barragem, computada no tempo $t = 52\text{s}$, utilizando uma malha uniforme com 201 pontos, incremento espacial $\Delta x = 10\text{m}$ e $h_r/h_l = 0,5$.

Pode-se aprimorar a solução numérica modificando-se as aproximações de $(h_x)_i^j$ e $(q_x)_i^j$ por

$$(h_x)_i^j = W\{(h_x^+)_i^j, (h_x^-)_i^j, \alpha\} \quad \text{e} \quad (q_x)_i^j = W\{(q_x^+)_i^j, (q_x^-)_i^j, \alpha\}, \quad (43)$$

em que $(h_x^\pm)_i^j$ e $(q_x^\pm)_i^j$ são calculadas em termos de h_i^j e q_i^j , semelhantemente à (36) e (37), respectivamente.

Esta nova abordagem é apresentada no algoritmo 1 e, neste caso, as equações (32) e (33) desempenham o papel de aproximações iniciais num processo iterativo (ver algoritmo 1), que, para nossas simulações, convergem em 3 ou 4 iterações numa tolerância de 10^{-6} .

Os gráficos constantes na Fig. 3 foram construídos com o esquema constante no referido algoritmo 1, sob as mesmas condições e com os mesmos parâmetros utilizados para obter a Fig. 2. Observemos que esta solução numérica é superior à anterior, sobretudo no que tange às regiões de rápidas mudanças.

Conforme Zhang *et al.* (2012), a razão h_r/h_l é um importante índice para julgar a aplicabilidade e a acurácia de esquemas numéricos no modelo 1D de ruptura de barragem. Segundo os mesmos autores, os regimes de escoamentos subcrítico e supercrítico existem simultaneamente num canal sem fricção, horizontal e retangular, quando $h_r/h_l < 0,138$. Altera-se, neste sentido, estes parâmetros para uma razão $h_r/h_l = 0,01$. Os resultados simulados são mostrados nas Fig. 3(c) e Fig. 3(d).

Algoritmo 1: Algoritmo CE/SE-2

início

Defina tolerância tol , $j = 0$;

repita

$j = j + 1$, $i = 0$

repita

$i = i + 1$, $k = 1$

Calcule $(q_x)_i^j$ e $(h_x)_i^j$ com as equações (32) e (33), respectivamente;

Calcule $(q_{xx})_i^j$ e $(h_{xx})_i^j$ com as equações em (34);

Calcule $q_i^j(k)$ e $h_i^j(k)$ com as equações (23) e (24), respectivamente;

repita

Calcule $(q_x)_i^j$ e $(h_x)_i^j$ com as equações em (43);

Calcule $(q_{xx})_i^j$ e $(h_{xx})_i^j$ com as equações em (34);

Calcule $q_i^j(k+1)$ e $h_i^j(k+1)$ com as equações (23) e (24), respectivamente;

até $\|h_i^j(k+1) - h_i^j(k)\| < tol$ e $\|q_i^j(k+1) - q_i^j(k)\| < tol$;

até $i = n - 1$;

até $j = q - 1$;

fim

Adota-se o esquema modificado (algoritmo 1) nas simulações numéricas que se seguem, tendo em vista sua superioridade.

Escoamento subcrítico

Os escoamentos subcríticos e transcíticos são todos simulados sobre um canal com comprimento $L = 20\text{m}$, sem resistência ao escoamento ($S_{fx} = 0$) e com uma topografia de fundo dada por

$$z(x) = \begin{cases} \frac{4 - (x - 10)^2}{20} & , \text{ se } 8\text{m} < x < 12\text{m}, \\ 0 & , \text{ caso contrário,} \end{cases} \quad (44)$$

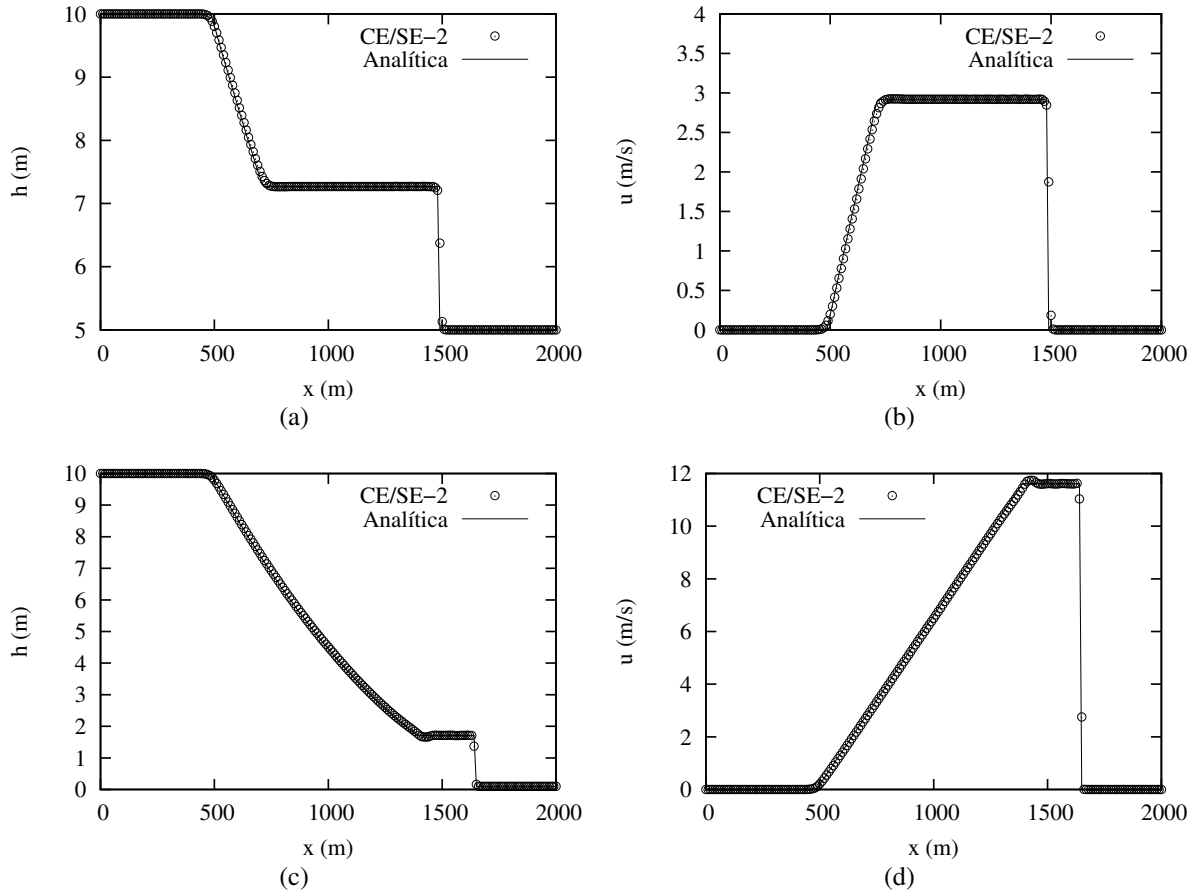


Figura 3: Elevação da superfície da água h e velocidade u para o problema de ruptura de barragem, computada utilizando-se o algoritmo 1, no tempo $t = 52s$, numa malha uniforme com 201 pontos e respectivo incremento espacial $\Delta x = 10m$, sendo: (a)-(b) $h_l = 10m$ e $h_r = 5m$, (c)-(d) $h_l = 10m$ e $h_r = 0,1m$.

e cujas respectivas soluções analíticas podem ser encontradas em Delestre *et al.* (2013).

O problema de escoamento subcrítico tem condições iniciais $h + z = 2m$ e $q = 0m^2/s$ e as condições de contorno são escolhidas como $q = 4,42m^2/s$ a montante (*upstream*) e $h = 2m$ a jusante (*downstream*). Pode-se observar, conforme Fig. 4(a) e Fig. 4(a), que as soluções numéricas obtidas apresentam boa concordância. Estas soluções foram construídas numa malha uniforme com $n + 1 = 101$ pontos ($\Delta x = 1/5$).

Escoamento transcrito

Consideraremos nesta seção duas situações: um problema de escoamento transcrito sem formação de choque e um segundo problema, também de escoamento transcrito, mas com formação de choque transiente.

No primeiro caso, o escoamento é fluvial a montante e se torna torrencial na parte superior da saliência (Delestre *et al.*, 2013). As condições iniciais podem ser feitas iguais a $h + z = 0,66m$ e $q = 0m^2/s$ e, como condições de contorno, $q = 1,53 m^2/s$ a montante e $h = 0,66m$ a jusante (enquanto o escoamento é subcrítico) (Yang *et al.*, 2015). Nas Fig. 5(a) e Fig. 5(b)

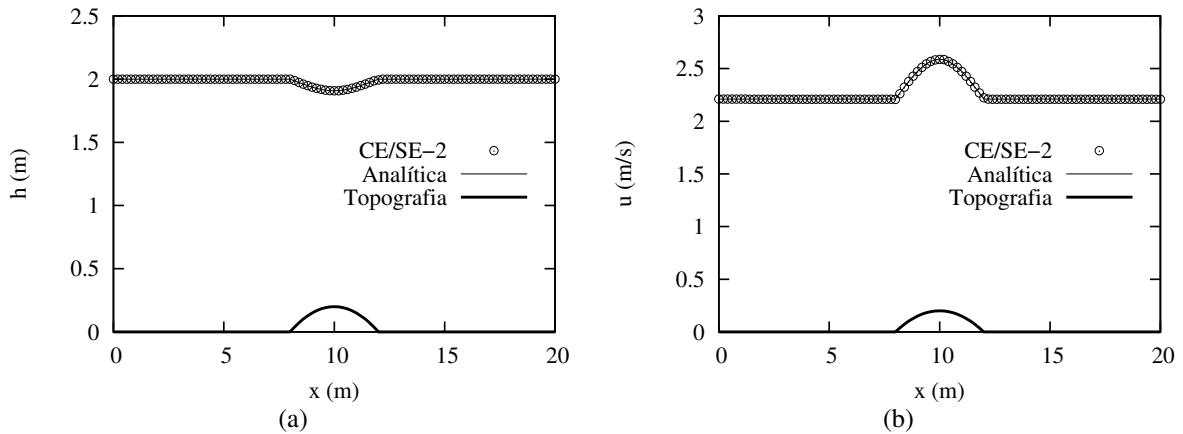


Figura 4: Elevação da superfície da água h (a) e velocidade u (b) para o problema de escoamento subcrítico, após convergência em $t = 100s$, computada numa malha uniforme com 101 pontos.

encontram-se os gráficos da profundidade h e velocidade u , calculadas no tempo $t = 100s$, quando as soluções atingem seus respectivos estados estáveis.

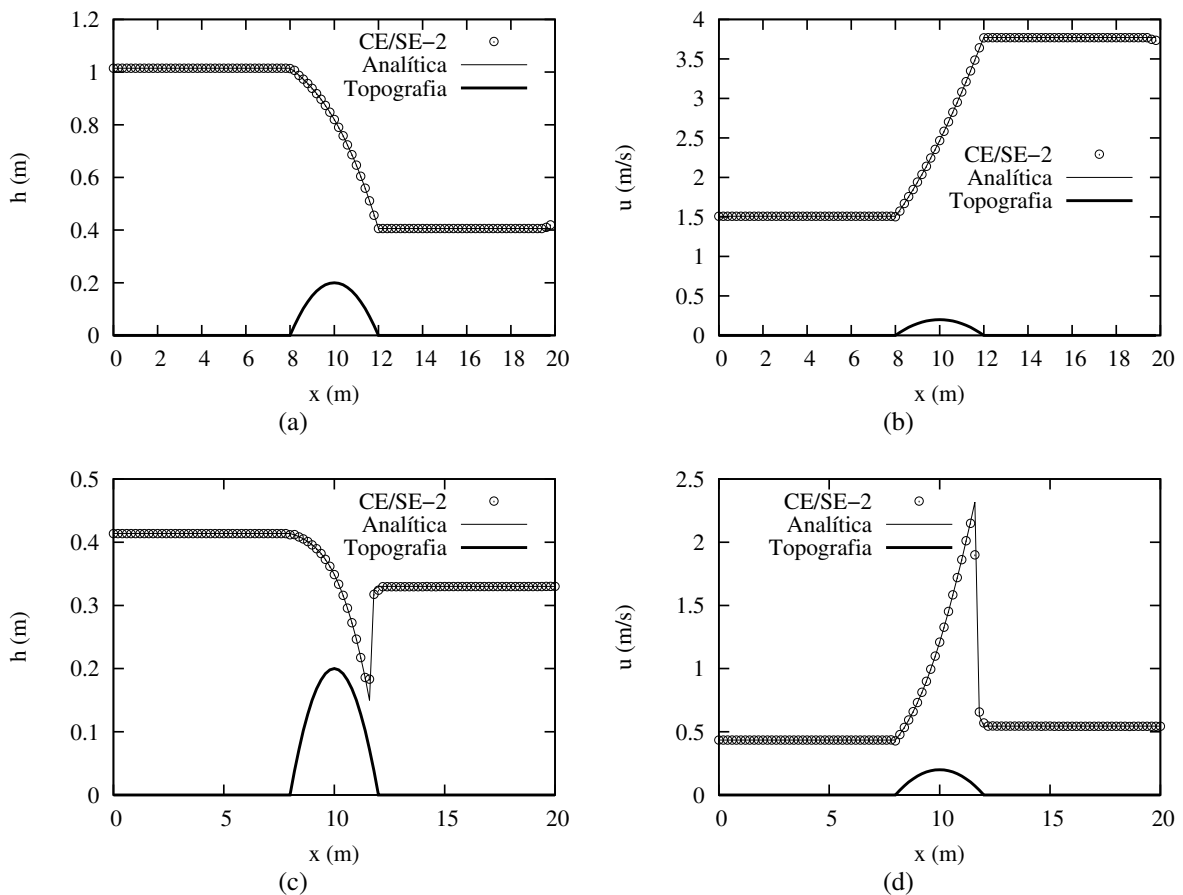


Figura 5: Elevação da superfície da água h e velocidade u para os problemas de escoamento transcrito com (c) e (d) e sem formação de choque ((a) e (b)), após convergência em $t = 100s$, computada numa malha uniforme com 101 pontos e correspondente incremento $\Delta x = 1/5$.

No segundo caso, o escoamento torna-se supercrítico no topo da lombada, mas torna-se novamente fluvial após um salto hidráulico (Delestre *et al.*, 2013). As condições iniciais consideradas são $h + z = 0,33\text{m}$ e $q = 0\text{m}^2/\text{s}$, enquanto que as condições de contorno a jusante e a montante são $q = 0,18\text{m}^2/\text{s}$ e $h = 0,33\text{m}$, respectivamente. As soluções numéricas são comparadas com as analíticas e, conforme Fig. 5(c) e Fig. 5(d), são devidamente acuradas.

Ordem de acurácia experimental

Com o problema resolvido numericamente na seção 3.3 realiza-se uma análise de acurácia experimental. A Tabela 1 organiza os erros computados na norma L^1 em diferentes incrementos Δx . Denota-se CE/SE-1 e CE/SE-2 aos esquemas com funções de base polinomial de ordens 1 e 2, respectivamente.

Tabela 1: Ordem de acurácia experimental das soluções numéricas relativas ao problema de escoamento transcrito sem choque (seção 3.3), computadas na norma L^1 e no tempo $t = 100\text{s}$.

Δx	CESE-1				CESE-2			
	Erro _h	Ordem _h	Erro _u	Ordem _u	Erro _h	Ordem _h	Erro _u	Ordem _u
$L/25$	9,82E-02		4,96E-01		1,45E-01		3,70E-01	
$L/50$	2,76E-02	1,8	1,41E-01	1,8	3,61E-02	2,0	1,07E-01	1,8
$L/100$	7,54E-03	1,9	3,93E-02	1,8	1,04E-02	1,8	3,17E-02	1,8
$L/200$	2,19E-03	1,8	1,16E-02	1,8	3,25E-03	1,7	9,71E-03	1,7

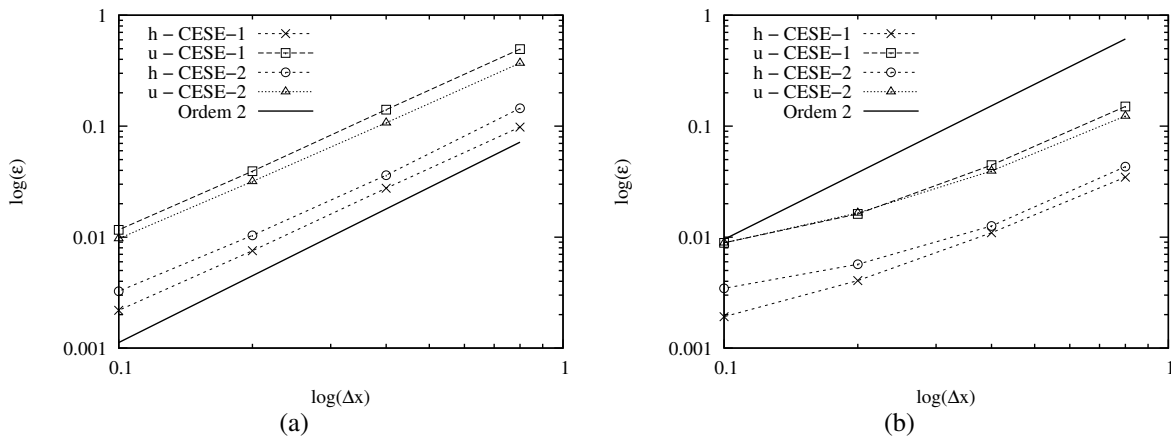


Figura 6: Gráficos em escala log-log dos erros versus incremento espacial Δx , para os esquemas CE/SE-1 e CE/SE-2, calculados no tempo $t = 100\text{s}$, em que: (a) Norma L^1 , conforme Tabela 1 e (b), Norma L^2 .

Os gráficos constantes nas Fig. 6(a) e Fig. 6(b) são construídos em escala log-log a partir dos dados tabelados em 1. O comportamento/acurácia dos esquemas são semelhantes. A ordem experimental calculada na norma L^1 se aproxima de 2, enquanto que na norma L^2 , está tendendo para ordem 1.

CONCLUSÃO

Este artigo apresenta o desenvolvimento de um novo esquema CE/SE explícito para a solução das equações de Saint Venant unidimensionais, utilizando polinômios de Taylor de segunda ordem no tempo e no espaço como funções de base. Diferentemente dos esquemas tradicionais com funções de base de primeira ordem, compostos por quatro variáveis de marcha, no presente esquema, as variáveis dinâmicas foram aproximadas localmente por um polinômio de Taylor de segunda ordem, de modo que as equações resultantes tornaram-se dependentes de seis variáveis de avanço no tempo. Para obter as relações pertinentes à estas duas incógnitas adicionais, utiliza-se novas equações diferenciais obtidas pela combinação entre as equações da quantidade de movimento e continuidade do modelo de Saint Venant.

A análise de erro na seção 2.4 mostrou que o esquema é dominado pelo fator Δt . Esquemas CE/SE com polinômios de primeira ordem possuem erro de truncamento semelhantes àqueles dados pelas equações (39) e (40), isto por que suas equações seguem o padrão de (32) e (33) (Molls e Molls, 1998; Zhang *et al.*, 2012), e assim, também são da ordem $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Observa-se a necessidade de se calcular as variáveis $(h_x)_i^j$ e $(q_x)_i^j$ de modo análogo às variáveis $(h_{xx})_i^j$ e $(q_{xx})_i^j$, isto é, utilizando-se da função $W(x_-, x_+, \alpha)$, para que se possa alcançar uma resposta mais próxima da ideal, sobretudo no que tange às regiões de rápida variação, conforme estudos numéricos realizados.

Concluí-se, por fim, que o esquema proposto possui considerável habilidade em capturar choques e descontinuidades, mesmo sobre malhas levemente refinadas (observe que utilizou-se $\Delta x = 10\text{m}$ para o problema de Riemann e $\Delta x = 0, 2\text{m}$ para os demais problemas).

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro, ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE - UFPR) e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense, Campus Araquari, pelo apoio à pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Chang, S. C., & To, W. W., 1991. *A New Numerical Framework for Solving Conservation Laws - The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element*. Technical Memo TM 104495, NASA, Lewis Research Center, NASA.
- Chang, S. C., 1993. *New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - Applications to the Euler and Navier-Stokes Equations*. Technical Memo TM 106226, NASA, Lewis Research Center, NASA.
- Chang, S. C., 1995. The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element - A New Approach for Solving the Navier-Stokes and Euler Equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 119, n. 2, pp. 295-324.
- Chang, S. C., Wang, X. Y., & Chow, C. Y., 1999. The Space-Time Conservation Element and Solution Element Method: A New High-Resolution and Genuinely Multidimensional Paradigm for Solving Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, vol. 156, n. 1, pp. 89-136.

- Chang, S. C., Wang, X. Y., & To, W. W., 2000. Application of the Space-Time Conservation Element and Solution Element Method to One-Dimensional Convection Diffusion Problems. *Journal of Computational Physics*, vol. 165, n. 1, pp. 189-215.
- Chang, S. C., & To, W. W., 2010. *A New Approach for Constructing Highly Stable High Order CESE Schemes*. Technical Memo TM 104495, NASA, Lewis Research Center, NASA.
- Chaudhry, M. H., 2008. *Open-Channel Flow - Second Edition*. Springer Science.
- Delestre, O., Lucas, C., Ksinant, P. A., Darboux, F., Laguerre, C., Tuoi Vo, T. N, James, F., & Cordier, S., 2013. Swashes: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 72, n. 3, pp. 269-300.
- Liu, H., Wang, H., Liu, S., Hu, C., Ding, Y., & Zhang, J., 2015. Lattice Boltzmann method for the Saint-Venant equations. *Journal of Hydrology*, vol. 524, pp. 411-416.
- Molls, T., & Molls, F., 1998. Space-time conservation method applied to Saint Venant equations. *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 124, n. 5, pp. 501-508.
- Stoker, J. J., 1957. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*. Interscience Publishers.
- Zhang, Y., Zeng, Z., & Chen, J., 2012. The improved space-time conservation element and solution element scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 68, n. 5, pp. 605-624.
- Zhang, Z. C., Yu, S., Chang, S. C., Himansu, A., & Jorgenson, P., 1999. A modified space-time conservation element and solution element method for Euler and Navier-Stokes equations. In *14th Computational Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics and Co-located Conferences*, Norfolk, VA, U.S.A.
- Yang, S., Kurganov, A., & Liu, Y., 2015. Well-balanced central schemes on overlapping cells with constant subtraction techniques for the Saint-Venant shallow water system. *Journal of Scientific Computing*, vol. 63, n. 3, pp. 678-698.