



## CONTROLADOR LQG APLICADO A UM SISTEMA DE DIREÇÃO ELÉTRICA

**Rafael Rodrigues da Silva**

**André Murilo**

**Evandro Leonardo Silva Teixeira**

rafaelsilvaunb@gmail.com

andremurilo@unb.br

evandroleonardo@unb.br

Universidade de Brasília - Faculdade Gama

St. Leste Projeção A - Gama Leste, Brasília - DF, 72444-240, Distrito Federal, Brasil

**Resumo.** A utilização de sistemas eletroeletrônicos (E/E) nos automóveis tem aumentado nos últimos anos. Isto se deve principalmente aos diversos benefícios oferecidos por estes sistemas como: redução no consumo de combustível, aumento de performance, conforto e segurança. Um dos sistemas bastante utilizado atualmente é o Sistema de Direção Elétrica Assistida (EPAS). O EPAS pode ser considerado como evolução dos mecanismos de direção tradicionais, e tem como objetivo reduzir o esforço empregado pelos motoristas durante as manobras de esterçamento das rodas. Dentre os diversos componentes que fazem parte do EPAS, destaca-se a Unidade de Controle Eletrônico (ECU) e também a estratégia de controle utilizada. Diante deste cenário, este trabalho tem por objetivo investigar a utilização da estratégia de controle Linear Quadrático Gaussiano (LQG), para o controle de um EPAS. Os resultados das simulações realizadas demonstraram que esta estratégia pode ser utilizada no projeto do controlador, uma vez que apresentou estabilidade e robustez ainda que sob presença de perturbações externas.

**Keywords:** Direção Elétrica, LQG, LQR, Filtro de Kalman

# 1 INTRODUÇÃO

A utilização de sistemas eletroeletrônicos (E/E) embarcados nos automóveis tem crescido exponencialmente nos últimos anos. Isto se deve principalmente a necessidade de atender a um mercado consumidor cada vez mais exigente e sofisticado. Diante deste cenário, a indústria automotiva se vê obrigada a investir maciçamente em soluções inovadoras. De fato, atualmente os componentes eletrônicos contribuem com cerca de 25 a 30% do custo total de um veículo, além de serem responsáveis por aproximadamente 90% das inovações e novas funcionalidades oferecidas (Coulon, 2014). A figura 1 mostra a contribuição de diferentes subsistemas automotivos no custo total de um veículo. Observa-se ao longo dos anos o aumento da utilização de software e sistemas E/E.

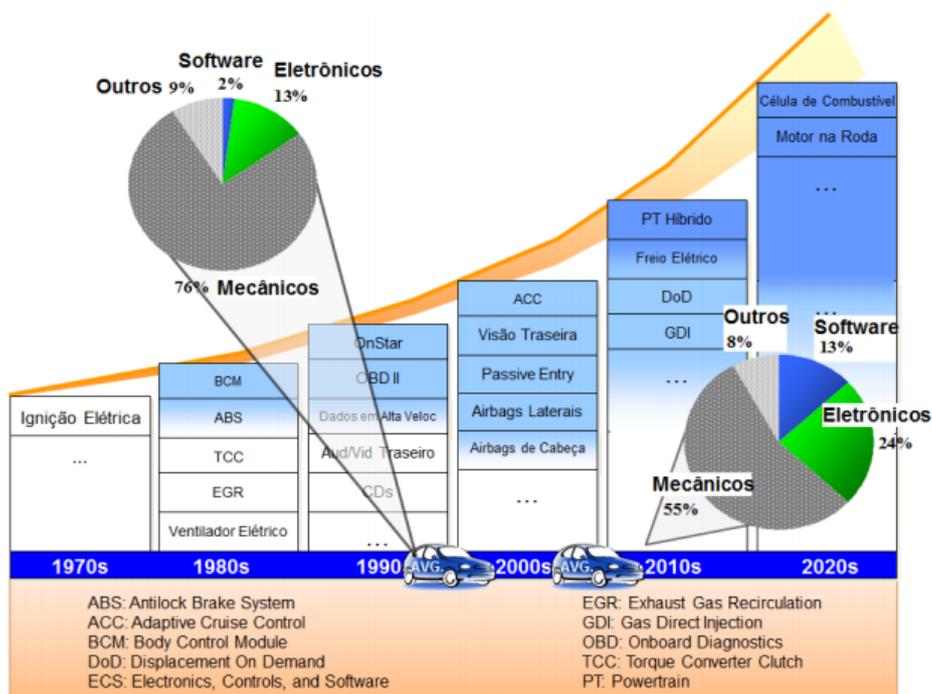


Figura 1: Parcela dos subsistemas no custo total do veículo. Fonte: Stella (2015).

O processo de inovação utilizado pela indústria automotiva tem se baseado cada vez mais na utilização de sistemas E/E para oferecer produtos e serviços especializados. Em particular, a utilização destes sistemas tornou-se fundamental tanto para a indústria automotiva quanto para o consumidor, já que proporcionam uma série de benefícios tais como: aumento de performance, redução no consumo de combustível, redução na emissão de gases poluentes, conforto e segurança quando comparados à sistemas puramente mecânicos ou hidráulicos (Blake & Leader, 2005). Dentre as diversas soluções inovadoras o Sistema de Direção Elétrica Assistida (EPAS) é um sistema capaz de proporcionar aumento no conforto, economia de combustível, redução de peso e segurança na condução de um automóvel (Chabaan & Wang, 2001).

Devido a esses benefícios proporcionado pelo EPAS, este sistema tem substituído os sistemas de direção convencionais tais como: mecânico e hidráulico. No EPAS, o esforço empregado pelo condutor para promover a mudança de direção do veículo é consideravelmente reduzido, uma vez que o torque necessário para realizar o esterçamento das rodas passa a ser

complementado por um motor elétrico. Observa-se que como medida de segurança, o torque de assistência gerado pelo motor elétrico é reduzido gradativamente a medida que a velocidade do veículo aumenta (Kim & Song, 2002). Diante da importância e da criticidade de um EPAS, diferentes estratégias de controle tem sido investigadas.

Ante o exposto, o principal objetivo deste trabalho é compreender o comportamento de um EPAS ao aplicar a estratégia de controle do tipo Linear Quadrático Gaussiano (LQG). Observa-se que a estratégia LQG consiste em um Regulador Linear Quadrático (LQR) e um Filtro de Kalman para estimação dos estados, em que neste trabalhos ambos são discretos no tempo.

A utilização de sinais discretos no tempo é importante, haja visto que, são utilizados em controles digitais. Os sistemas digitais se tornaram fundamentais nos últimos anos uma vez que apresentam diversas vantagens sobre os analógicos, dentre estas podem ser citadas: facilidade de implementação e modificação, confiabilidade, reduzida sensibilidade a ruídos e interferências externas e possibilidade de implementação de protocolos de checagem de erros (Kannan, 2007).

Uma das principais vantagens do LQG é a estabilidade e robustez, mesmo quando aplicado à sistemas submetidos à ruídos e perturbações (O'Reilly, 1987). Além de apresentar flexibilidade no sentido de permitir o balanço do esforço computacional entre os estados e as variáveis de comando (Yang & Marjanovic, 2011).

Este trabalho foi organizado no seguinte formato: a seção 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica relacionada ao tema proposto. Já na seção 3 é apresentado o modelo dinâmico da direção elétrica utilizada. A seção 4 especifica os detalhes do projeto e implementação da estratégia de controle. Na seção seguinte, são mostrados os resultados das simulações realizadas. Por fim são apresentadas as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O EPAS é considerado como uma evolução nos sistemas de direção elétrica, uma vez que torna o sistema estruturalmente mais simples e proporciona diversos benefícios (Chabaan & Wang, 2001). Basicamente, um EPAS é composto por uma coluna de direção, um sistema de engrenagem, sensor de torque, uma Unidade de Controle Eletrônico (ECU) e um motor DC (Ren *et al.*, 2008). Além dos demais componentes utilizados na direção mecânica, isto é, um volante, um pinhão, uma cremalheira e terminais de direção. Em um EPAS, parte do torque necessário para provocar a mudança na direção do veículo é fornecido por um motor elétrico do tipo DC, isto reduz sensivelmente o esforço do condutor, em particular, em situações que exijam um demasiado esterçamento das rodas (como, por exemplo, as necessárias para estacionar um veículo). A figura 2 mostra um EPAS atualmente comercializado no mercado.

No EPAS, um sensor de torque é utilizado para medir o torque aplicado pelo condutor no volante do veículo. Uma vez que o torque é obtido, um sinal elétrico correspondente é enviado para a ECU da direção. A ECU por sua vez, com base em uma estratégia de controle, determina o torque de assistência necessário a ser aplicado na coluna de direção. Observa-se que a estratégia de controle deve ponderar o torque de assistência considerando a velocidade do veículo. Uma vez que este torque é determinado, a ECU envia um comando ao motor DC correspondente que o aplica na direção através de um sistema de engrenagens (Kim & Song, 2002). Contudo, para se ter o correto e eficiente funcionamento do EPAS é de fundamental importância verificar os resultados obtidos com a estratégia de controle implementada.



**Figura 2: Sistema de Direção Elétrica Assitida. Fonte: Day (2013).**

No que se refere as possíveis estratégias de controle para um EPAS, Kim & Song (2002) apresentam uma estratégia clássica de controle baseada em um controlador Proporcional Integral Derivativo (PID). Esta estratégia tem como objetivo controlar um motor para a redução do esforço exercido pelo condutor e melhorar o retorno do volante ao centro após a realização das manobras. No referido trabalho, também foi utilizado um sistema *Hardware-In-the-Loop* (HIL) a fim de verificar e validar a interação planta-controlador. Song *et al.* (2004) e Zang & Liu (2007) também utilizaram controladores PID para atingir os objetivos de controle, todavia, os pesquisadores reconhecem que os diferentes parâmetros de sintonia limitam a utilização prática. Outra limitação comumente reportada é o fato de controladores PIDs, em algumas situações, serem sensíveis a perturbações externas provenientes, principalmente, do atrito pneu-solo e vibrações o que pode comprometer o funcionamento do sistema.

Uma forma de contornar estes problemas é apresentada em Dong *et al.* (2010) e Parvathy & Daniel (2013). Nestes trabalhos, um controlador ativo é utilizado para aumentar a rejeição de perturbações de forma que o sistema seja insensível a influencias externas. A ideia principal da estratégia de controle, apresentada pelos pesquisadores, foi utilizar um Observador de Estado Estendido (ESO) de forma a estimar as perturbações generalizadas e em seguida neutralizar as perturbações em tempo real. Desse modo, o modelo passa a ser representado de forma mais simples podendo então ser controlado utilizando um tradicional Proporcional Derivativo (PD). Zhao *et al.* (2013) utilizam um controlador  $H_\infty$  e realiza comparações entre o controlador proposto e um PID tradicional, mostrando que o  $H_\infty$  apresenta resultados superiores ao PID principalmente no que se refere ao tempo de resposta, além de ser insensível à perturbações externas.

Em Chabaan & Wang (2001) é utilizado, também, um controlador  $H_\infty$  para fornecer estabilidade e minimizar os efeitos de perturbações no torque de assistência. Neste trabalho foi implementado um estimador que através das informações do torque no pinhão, da variável de comando e das funções de transferência do sistema é capaz de estimar o torque aplicado pelo

condutor no volante do veículo.

De fato, diferentes estratégias de controle têm sido investigadas para aplicação em sistemas de direção elétrica. Todavia, nota-se, nestes trabalhos, a ausência de discussões a cerca de diversos tópicos tais como: detalhamento claro e objetivo da dinâmica, dos parâmetros e das variáveis envolvidas nos modelos de sistemas EPAS, e também pouca informação a respeito dos parâmetros de sintonia do LQR e do Filtro de Kalman. Portanto, este trabalho aborda, com profundidade, os tópicos ausentes em trabalhos anteriores. Além de, propor uma estratégia de controle digital robusta, por meio da discretização do controlador e do observador, o que é fundamental para utilização dos sistemas em hardwares específicos.

### 3 MODELO DINÂMICO DO EPAS

O modelo da EPAS a ser utilizado neste trabalho é composto por uma coluna de direção, um sensor de torque, uma ECU, um motor elétrico DC, um sistema de engrenagens e o conjunto pinhão-cremalheira. Este modelo foi extraído do trabalho de Marouf *et al.* (2012) e é apresentado na figura 3.

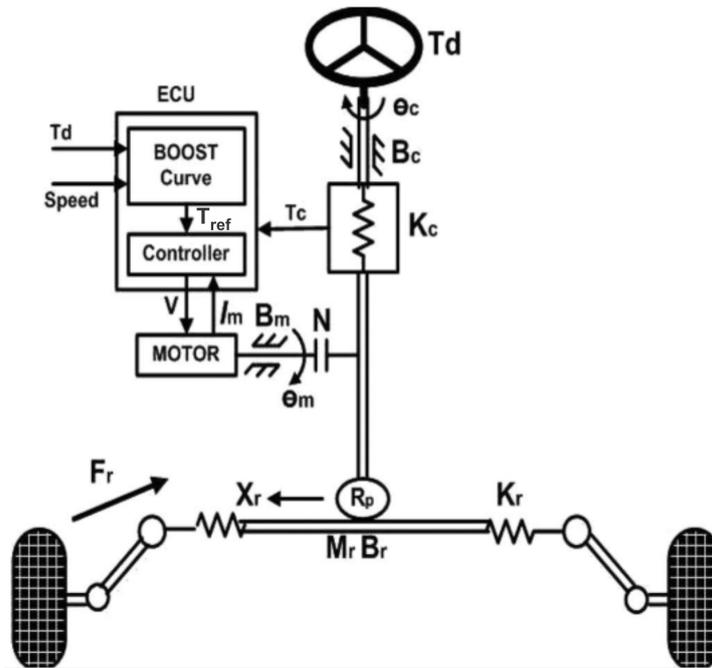


Figura 3: Modelo da EPAS. Adaptado de Marouf *et al.* (2012)

Com base no modelo apresentado, as variáveis  $\theta_c$ ,  $\theta_m$  e  $x_r$  correspondem, respectivamente, a posição angular da coluna de direção, posição angular do motor e a posição da barra de direção. Partindo das dinâmicas da coluna de direção, do conjunto pinhão-cremalheira e da dinâmica do motor elétrico, e de acordo com as leis de Newton, as equações de movimento do sistema dinâmico EPAS são definidas como:

$$J_c \ddot{\theta}_c = -K_c \theta_c - B_c \dot{\theta}_c + K_c \frac{\theta_m}{N} - F_c \text{sign}(\dot{\theta}_c) + T_d \quad (1)$$

$$J_{eq} \ddot{\theta}_m = K_c \frac{\theta_c}{N} - \left( \frac{K_c}{N^2} + \frac{K_r R_p^2}{N^2} \right) \theta_m - B_{eq} \dot{\theta}_m + K_t I_m - F_m \text{sign}(\dot{\theta}_m) - \frac{R_p}{N} F_r \quad (2)$$

em que  $J_{eq} = J_m + (R_p^2/N^2)M_r$ ,  $B_{eq} = B_m + (R_p^2/N^2)B_r$  e  $\theta_m = Nx_r/R_p$ .

O motor elétrico é acoplado à coluna de direção por meio de um sistema de engrenagens. Este componente tem a função de amplificar o torque do motor e transmiti-lo à coluna de direção resultando portanto no torque de assistência  $T_a$ . Sendo assim, a equação que descreve a dinâmica do motor elétrico é apresentada na eq. 3 em que  $U$  corresponde a tensão e  $I_m$  a corrente no motor. Os demais parâmetros utilizados nas equações são definidos na tabela 1:

$$L_m \dot{I}_m = -R_m I_m - K_t \dot{\theta}_m + U \quad (3)$$

**Tabela 1: Parâmetros das equações.**

| Nomenclatura | Descrição                                  | Valor [Unidades]        |
|--------------|--|-------------------------|
| $J_c$        | Momento de inércia da coluna de direção    | 0.04Kg.m <sup>2</sup>   |
| $B_c$        | Amortecimento viscoso da coluna de direção | 0.072N.m./(rad/s)       |
| $K_c$        | Rigidez da coluna de direção               | 115N.m./rad             |
| $F_c$        | Atrito da coluna de direção                | 0.027 N.m               |
| $M_c$        | Massa da cremalheira                       | 32Kg                    |
| $B_r$        | Amortecimento viscoso da cremalheira       | 3820N/(m/s)             |
| $R_p$        | Raio do pinhão                             | 0.007m                  |
| $K_r$        | Taxa de amortecimento do pneu              | 43000N.m/m              |
| $J_m$        | Momento de inércia do motor                | 0.0004Kg.m <sup>2</sup> |
| $B_m$        | Amortecimento viscoso eixo do motor        | 0.0032N.m./(rad/s)      |
| $F_m$        | Atrito do motor                            | 0.056N.m                |
| $K_t$        | Constante Torque-Corrente                  | 0.05N.m/A               |
| $L_m$        | Indutância do motor                        | 0.0056H                 |
| $R_m$        | Resistência do motor                       | 0.37Ω                   |
| $N$          | Relação engrenagem                         | 13.65                   |

As equações do modelo apresentadas acima podem ser descritas na forma de espaço de estados. Esta forma de representação é importante pela capacidade de representar sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (M.I.M.O) como é o caso do EPAS. Além de ser necessária, também, para o projeto do controlador que será apresentado na próxima seção. Sendo assim, o modelo linear do EPAS representado em espaço de estados pode ser definido da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5)$$

Em relação as equações apresentadas, o vetor de estados do sistema é dado por  $x = [\theta_c \ \dot{\theta}_c \ \theta_m \ \dot{\theta}_m \ I_m]^T$ , enquanto que o vetor de entradas é  $u = [U \ T_d \ T_r]^T$ , em que  $U$  corres-

ponde a tensão no terminal do motor DC,  $T_d$  o torque realizado pelo condutor e  $T_r$  o torque de reação ocasionado pelo contato pneu-pista. Por fim,  $y = [\theta_c \theta_m]^T$  consiste nos sinais medidos. As demais matrizes que definem o sistema em espaço de estados são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_c}{J_c} & -\frac{B_c}{J_c} & \frac{K_c}{J_c N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_c}{J_{eq} N} & 0 & -\left(\frac{R_p^2 K_r + K_c}{J_{eq} N^2}\right) & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_t}{J_{eq}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-K_t}{L_m} & \frac{-R_m}{L_m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{N J_{eq}} \\ \frac{1}{L_m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema de direção elétrica apresentado funciona da seguinte maneira: No instante em que o condutor aplica um movimento no volante é produzido um torque  $T_d$  (*Torque driver*) o qual é medido por um sensor de torque localizado na coluna de direção. Este torque além de atuar diretamente no esterçamento das rodas, de forma mecânica, é utilizado também como um dos parâmetros para o cálculo do Torque de Referência ( $T_{ref}$ ). O cálculo de  $T_{ref}$  é realizado a partir de um mapa que associa o torque  $T_d$  com a velocidade do veículo. Um exemplo de mapa de torque é mostrado na figura 4.

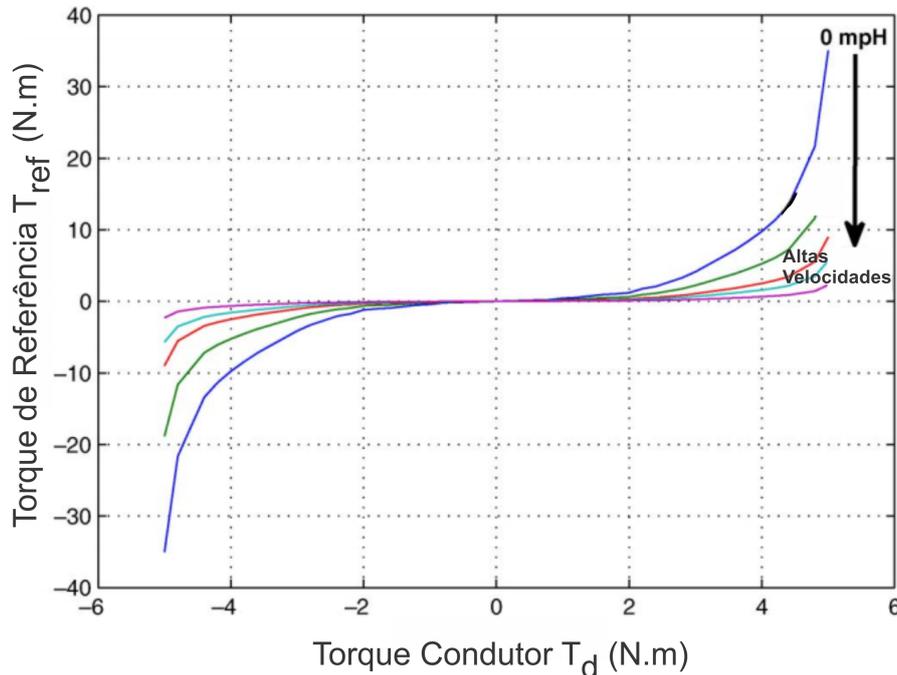


Figura 4: Mapa de torque. Adaptado de Marouf *et al.* (2012).

De acordo com o mapa, o torque de referência  $T_{ref}$  é calculado com base no torque  $T_d$  e na velocidade do veículo. Em outras palavras,  $T_{ref}$  é alto para baixas velocidades, porém com o aumento da velocidade  $T_{ref}$  diminui gradativamente. Após calculado, o torque  $T_{ref}$  é utilizado então como a referência para o torque  $T_a$  que corresponde ao torque de assistência fornecido

pelo motor elétrico. Em outras palavras, o torque  $T_a$  realizado pelo motor elétrico deve seguir o torque de referência  $T_{ref}$ .

Todavia, esta passagem de referência é realizada via corrente do motor, de modo que o torque  $T_{ref}$  é multiplicado por um ganho  $K_t$  gerando assim uma corrente de referência  $I_{ref}$ . Portanto, a corrente,  $I_m$ , do motor é regulada de modo a seguir a corrente de referência  $I_{ref}$ .

Este tipo de estratégia baseada em um mapa de torque é importante uma vez que regula o torque de assistência de acordo com as condições de condução do veículo. Por exemplo: para o veículo parado ou em baixas velocidades, situações que geralmente ocorrem ao manobrar o veículo em um estacionamento, é desejável que a maior parte do torque seja realizado pelo motor auxiliar ocasionando, deste modo, redução no esforço do condutor.

Por outro lado, nas situações em que o veículo estiver em altas velocidades, por questões de segurança, é necessário que o condutor realize um esforço maior para promover o esterçamento das rodas. Isto significa que com o aumento da velocidade do veículo, o torque de assistência produzido pelo motor elétrico deve então ser reduzido para que o condutor passe a sentir a direção mais rígida e naturalmente realize um esterçamento mais moderado proporcionando, desta forma, uma condução mais segura.

A sensação da rigidez da direção é outra característica importante dos sistemas EPAS e deve ser levada em conta no projeto do controlador (Sugitani, 1997). De maneira geral, esta sensação se refere ao quanto de informação é transmitida através sistema de direção até volante do veículo. Grande parte da rigidez aparente da direção é ocasionada devido ao contato entre o pneu e o solo. Portanto, para um correto funcionamento do EPAS é necessário que o sistema forneça ao condutor a sensação de rigidez apenas baseada no mapa de torque e seja portanto insensível a perturbações e flutuações causadas pelo contato pneu-solo.

## 4 PROJETO DO CONTROLADOR

A planta do EPAS representado em espaço de estados é utilizada para o projeto do controlador a ser utilizado. De acordo com os pares das matrizes (A, B) e (A, C) o sistema é completamente controlável e observável respectivamente. Portanto, uma estratégia de controle por realimentação e um observador de estado podem ser utilizados. Para efetuar o controle do EPAS, utilizou-se um LQG o qual é composto por um controlador LQR e um filtro de Kalman, ambos discretos no tempo.

Considerando o sistema dinâmico no formato de espaço de estados, Kannan (2007) mostra que a lei de controle ótima para o LQR discreto é dada pela Eq. 6, a qual é otimizada através da matriz de ganhos  $K$ , de forma a minimizar uma função custo (Eq. 7) através da limitação da energia dos estados e da ação de controle. Os termos  $x(k)$  e  $u(k)$  correspondem, respectivamente, aos vetores dos estados e das entradas discretas no tempo, em que  $k$  é o intervalo de amostragem do sinal.

$$u(k) = -Kx(k) \quad (6)$$

$$J = \sum_0^{\infty} (x(k)Qx(k) + u(k)Ru(k)) \quad (7)$$

Com base nas equações 6 e 7,  $Q$  corresponde a matriz responsável pela ponderação dos estados, ou seja, permite penalizar os estados de modo que tenham preferência na estratégia de

controle, em outras palavras, são mais penalizados os estados utilizados para seguir a referência. Por outro lado,  $R$  é a matriz de ponderação das entradas e possui a mesma função da matriz  $Q$  todavia com a função de penalizar as entradas. Sendo assim, essas duas matrizes são os parâmetros de sintonia do controlador.

A matriz de ganho  $K$  pode ser obtida a partir da equação 8, em que as matrizes discretas do sistema são representadas por  $A_d$  e  $B_d$ .

$$K = (R + B_d^T S(k+1) B_d)^{-1} B_d^T S(k+1) A_d \quad (8)$$

Em que  $S(k)$  pode ser obtido, analiticamente, através da solução da equação de Ricatti discreta (Eq. 9). De forma que, se o sistema é estável, existe apenas uma matriz definida positiva  $S(k)$  que satisfaça essa equação (Ogata, 2010).

$$S(k) = A_d^T [S(k+1) - S(k+1) B_d R^{-1} B_d^T S(k+1)] A_d + Q \quad (9)$$

Um aspecto restritivo do LQR é a necessidade da realimentação total dos estados. Isto significa que todas as variáveis de estados devem ser medidas ou estimadas a fim de serem utilizadas no cálculo do ganho  $K$ . Diante disso, utilizou-se um filtro de Kalman discreto para estimação dos demais estados, haja visto que, no EPAS proposto são medidos, através de sensores, apenas os sinais de  $\theta_c$  e  $\theta_m$ . A equação de estado para o filtro de Kalman discreto é dada pela Eq. 10.

$$\hat{x}(k+1) = A_d \hat{x}(k) + B_d u(k) + K_0 (y(k) - C \hat{x}(k)) \quad (10)$$

Dessa forma,  $K_0$  é a matriz de ganho do observador e  $\hat{x}(k)$  corresponde ao vetor dos estados estimados. O vetor das saídas  $y(k)$  é definido na equação 11, em que  $v(k)$  é o ruído de medida.

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad (11)$$

O filtro de Kalman, neste trabalho, é projetado para estimar os estados não medidos e também para rejeitar os ruídos que afetam os sinais medidos. O parâmetro de sintonia do filtro é a matriz de ganhos  $K_0$  a qual é calculada de forma que se obtenha um  $\hat{x}(k)$  (estados estimados) ótimo e assim minimize a equação de covariância do erro apresentada abaixo.

$$P(k) = E[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T] \quad (12)$$

A matriz de ganho  $K_0$  pode ser calculada através da equação 13. Nas equações seguintes os termos  $Q_n$  e  $R_n$  são as matrizes de covariância dos ruídos que afetam, respectivamente, os estados e os sinais medidos .

$$K_0 = P(k) C^T R_n^{-1} \quad (13)$$

Após a definição de  $\hat{x}(0)$  e  $P(0)$ , calcula-se  $M(k)$  através da equação 14 este termo corresponde ao valor propagado de  $P$ .

$$M(k+1) = A P(k) A^T + B_1 Q_n B_1^T \quad (14)$$

Em seguida utiliza-se a equação 15 a fim de atualizar a covariância do erro para o intervalo de tempo atual e por fim utiliza-se este termo para a definição do ganho  $K_0$  (Eq. 13).

$$P(k) = M(k) - M(k) C^T [C M(k) C^T + R_n]^{-1} C M(k) \quad (15)$$

Desta forma, para o cálculo do ganho  $K_0$  os parâmetros de sintonia se tornam as matrizes de covariância  $Q_n$  e  $R_n$ . Neste trabalho estas matrizes foram definidas manualmente com o objetivo de minimizar o erro entre os estados reais e os estados estimados. Contudo, isto permitiu

obter uma estratégia de controle que satisfaça os requisitos desejados.

Outra particularidade do LQR é o fato dos estados serem regulados em zero no regime permanente. Todavia, para utilização deste controlador no sistema EPAS é desejado que os estados sejam rastreados segundo uma referência. Para o caso do EPAS, a corrente do motor auxiliar deve ser rastreada de acordo com a corrente de referência, portanto é necessário definir tantos os estados  $x^d$  desejados quanto a variável de comando  $u^d$  desejada, de forma a atingir a saída  $y^d$  desejada.

Os valores desejados em regime permanente de  $x^d$ ,  $u^d$  e  $y^d$  estão relacionados através das seguintes equações (Alamir, 2013).

$$x^d = A_d x^d + B_d u^d \quad (16)$$

$$y^d = C x^d \quad (17)$$

Considerando  $I$  como a matriz identidade, as equações 16 e 17 podem ser reescritas na forma:

$$\begin{pmatrix} I - A_d & -B_d \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^d \\ u^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y^d \end{pmatrix} \quad (18)$$

Dessa forma, uma vez que a saída  $y^d$  é definida, para se obter os valores de  $x^d$  e  $u^d$  basta pré-multiplicar a equação 18 pela inversa da primeira matriz do lado esquerdo, haja visto que as matrizes  $A_d$ ,  $B_d$  e  $C$  são conhecidas. A utilização da matriz  $C$  é importante para que a solução da equação 18 seja única, caso contrário seriam possíveis infinitos valores de  $x^d$  e  $u^d$ .

Por fim,  $x^d$  é utilizado como um vetor de referência para os estados e  $u^d$  como referência para o comando. Portanto, o comando  $u(k)$  utilizado para que os estados sigam a trajetória de referência,  $y^d$ , desejada é dado na equação 19, em que  $K$  é o ganho do LQR.

$$u(k) = u^d - K(x - x^d) \quad (19)$$

O diagrama de blocos da estratégia de controle utilizada no EPAS é mostrado na figura 5. Desta forma, com base no torque  $T_d$  e na velocidade do veículo, um torque de referência é calculado. Este torque é multiplicado pelo ganho  $K_t$  para então fornecer uma corrente de referência,  $I_{ref}$ , a qual deve ser seguida pelo quinto estado do modelo (corrente do motor). O erro é então definido como a diferença entre os estados desejados e os estados estimados pelo filtro de kalman, posteriormente é calculado no LQR o  $u(k)$  ideal.

Por fim, a saída do sistema é medida a fim de fornecer ao filtro de Kalman as variáveis  $\theta_c$   $\theta_m$  para estimação dos demais estados. Já a corrente obtida é multiplicada pelo inverso do ganho de forma a obter o torque assistido  $T_a$  rastreado sob uma referência. Portanto, o principal objetivo do controle é levar o torque de assistência  $T_a$  para o torque de referência  $T_{ref}$ .

## 5 RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Algumas considerações foram levadas em conta para fins de simulação. Referente a definição do torque de referência não foi utilizado, para o fornecimento do torque  $T_{ref}$ , um mapa conforme mostrado na figura 4. Sendo assim,  $T_d$  foi considerado como o próprio sinal de referência. Portanto, o torque de assistência  $T_a$  fornecido pelo motor DC deve seguir o torque  $T_d$ .

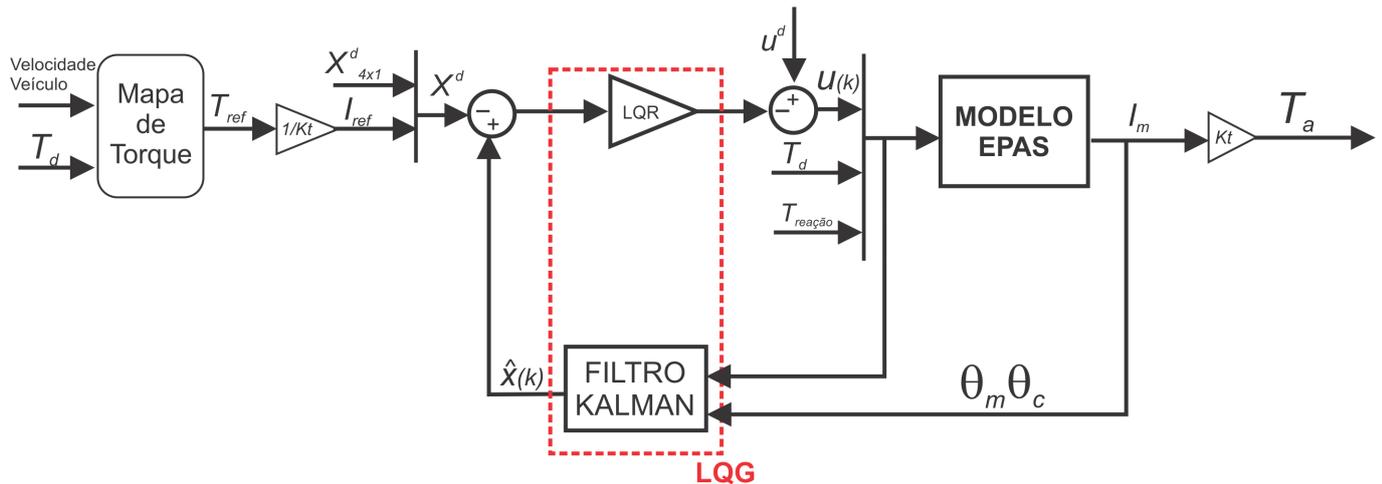


Figura 5: Diagrama de blocos da estratégia de controle LQG.

Tabela 2: Parâmetros da Simulação

| Parâmetro | Descrição                                 | Valor                         |
|-----------|---|-------------------------------|
| $Q$       | Matriz de ponderação dos estados          | $diag(1, 1, 1, 1, 10^6)$      |
| $R$       | Matriz de ponderação da entrada           | 1                             |
| $Q_n$     | Matriz de covariância do ruído do sistema | $diag 10^{-5}(1, 1, 1, 1, 1)$ |
| $R_n$     | Matriz de covariância do ruído de medida  | $diag(10, 10)$                |
| $\tau$    | Tempo de amostragem                       | 0.01 ms                       |

Uma das entradas do EPAS adotado é o torque de reação, o qual é gerado através do contato entre o pneu e a pista. De acordo com a dinâmica do sistema, a estratégia de controle empregada deve ser robusta o suficiente para que as respostas obtidas sejam insensíveis a esse torque de reação. De forma que, o torque resultante na coluna de direção seja uma composição apenas do torque  $T_d$  e do torque de assistência  $T_a$ .

No tocante aos parâmetros de sintonia do LQR, como o objetivo do controle é fazer com que a corrente siga a referência, definiu-se uma matriz  $Q$  de forma a penalizar mais a corrente em relação aos outros estados. Desta forma, os parâmetros de sintonia utilizados no LQR e no filtro de Kalman e os demais parâmetros utilizados nas simulações são mostrados na tabela 2.

A resposta do sistema a uma entrada unitária é mostrada na figura 6. Observa-se um tempo de resposta adequado para torque de assistência quando comparado à trabalhos consolidados. Trabalho como de Chitu *et al.* (2013) que também apresenta uma proposta de controle com LQR discreto apresentam tempo de resposta semelhantes aos obtidos neste trabalho. Todavia, apresentam respostas com *overshoots*, o que não aconteceu nas simulações obtidas neste.

Outro sinal de referência é apresentado na figura 7 em que utilizou-se um sinal periódico com o objetivo de simular o esterçamento do volante no sentido horário e anti-horário. Percebe-se que o torque de assistência é completamente rastreado sobre o torque de referência.

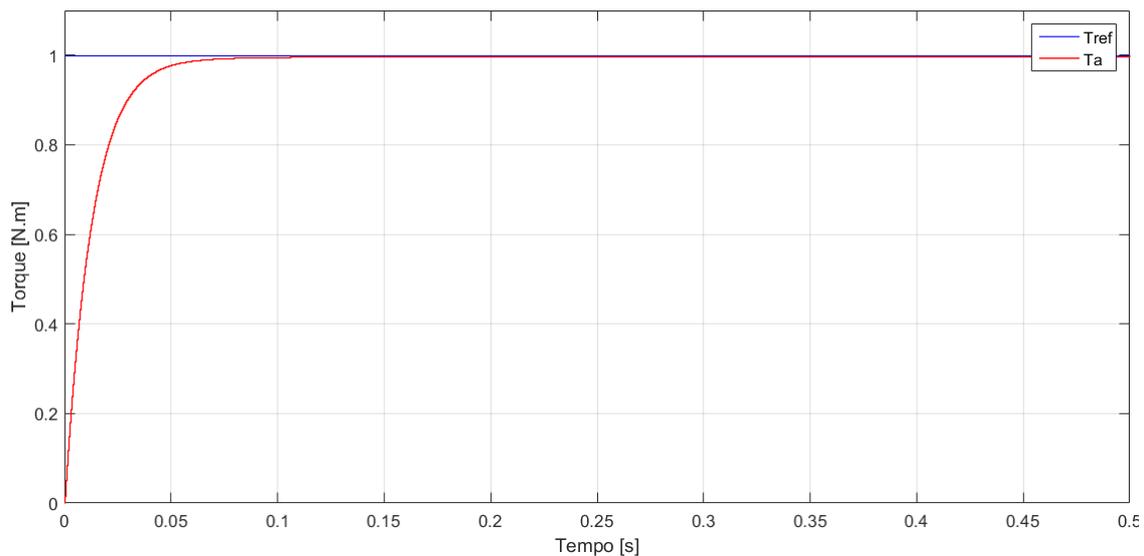


Figura 6: Resposta do sistema a uma entrada unitária.

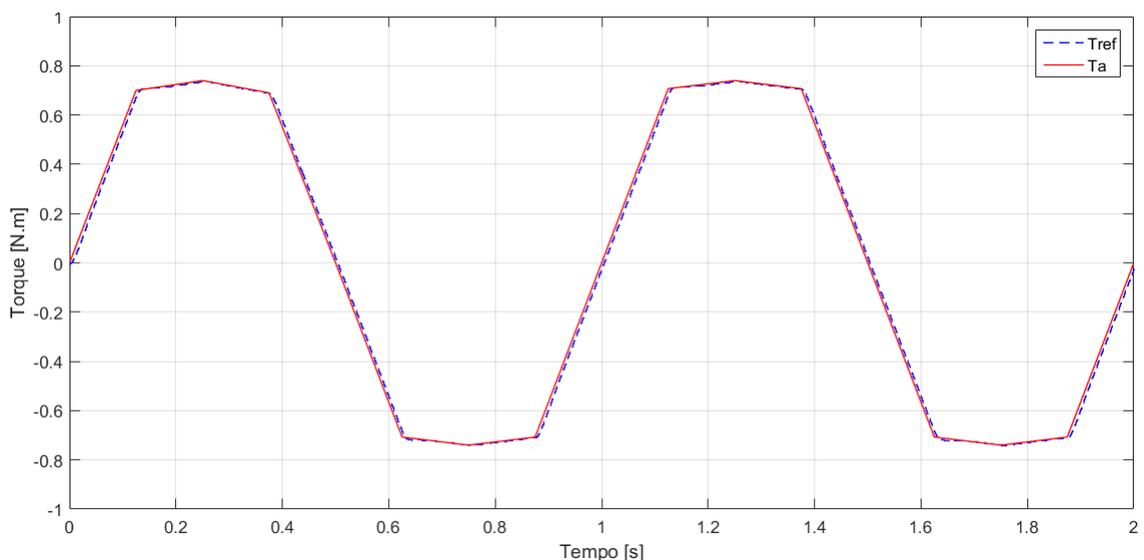
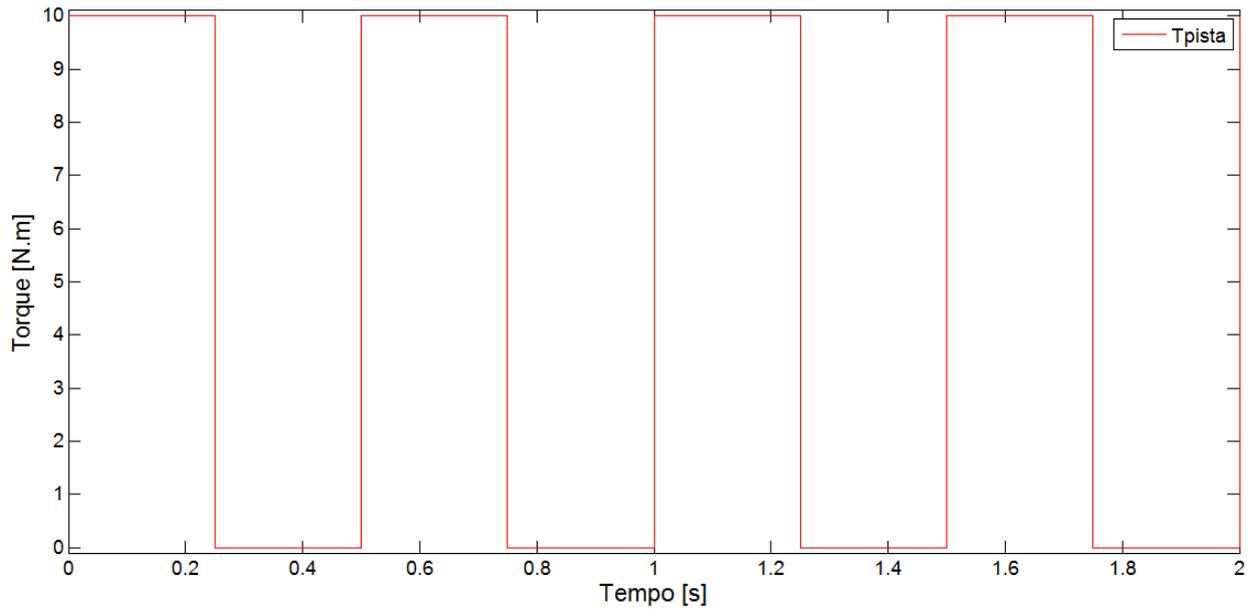


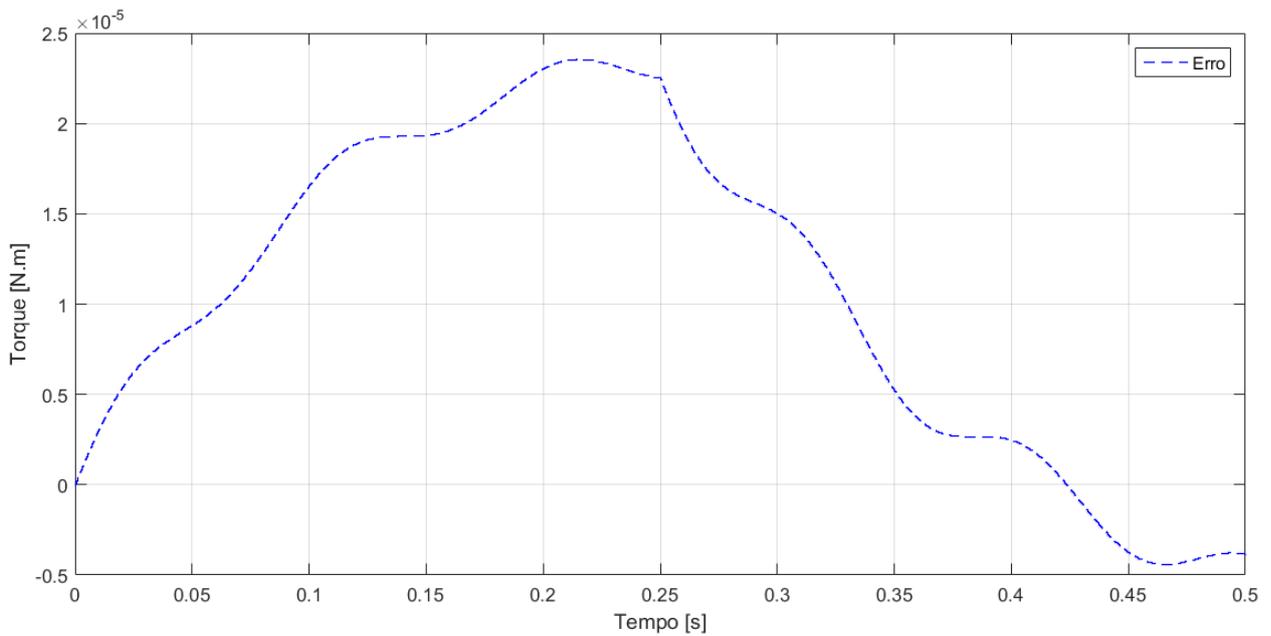
Figura 7: Resposta do sistema ao sinal periódico.

De modo a verificar o comportamento do sistema na presença do torque de reação, realizou-se a simulação do sistema com e sem a presença dessa entrada. Para fins de simulação utilizou-se como torque de reação uma onda quadrada apresentada na figura 8.

Desta forma, a figura 9 apresenta uma curva do erro entre a resposta do sistema na presença do torque de reação e sem o torque de reação. Observa-se que, a resposta do sistema não é comprometida quando na presença do torque de reação, o que confirma que mesmo na presença do torque de reação, o torque resultante na coluna se mantém como uma composição do torque  $T_d$  e o torque de assistência  $T_a$ , demonstrando a robustez da estratégia de controle empregada.



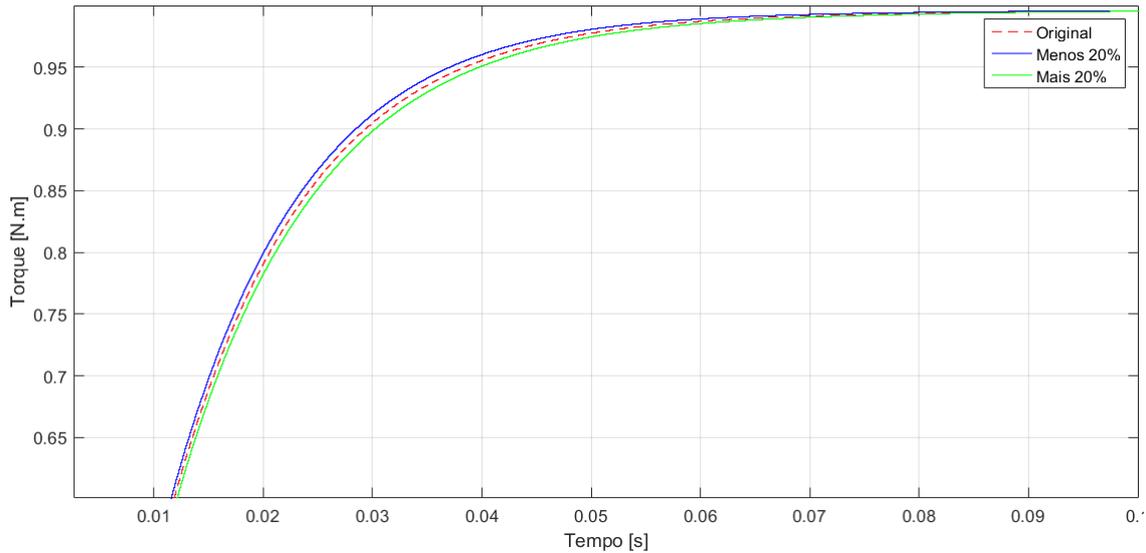
**Figura 8:** Onda quadrada representando o torque de reação.



**Figura 9:** Erro do torque de assistência para o sistema com e sem o torque de reação.

Outra simulação foi executada a fim de demonstrar a robustez do LQR quando sujeito à incertezas nos parâmetros do modelo. Para isso, realizou-se a variação dos parâmetros mostrados na Tabela 1 em +20% e -20%. O resultado desta simulação é mostrado na figura 10.

Observa-se que, a variação nos parâmetros do sistema não influenciou, de forma expressiva, a resposta do torque de assistência, mantendo o mesmo comportamento em regime permanente e mesmo tempo de resposta obtido com os parâmetros originais. Este resultado mostra uma boa performance da estratégia de controle e demonstra a característica de robustez do controlador projetado.

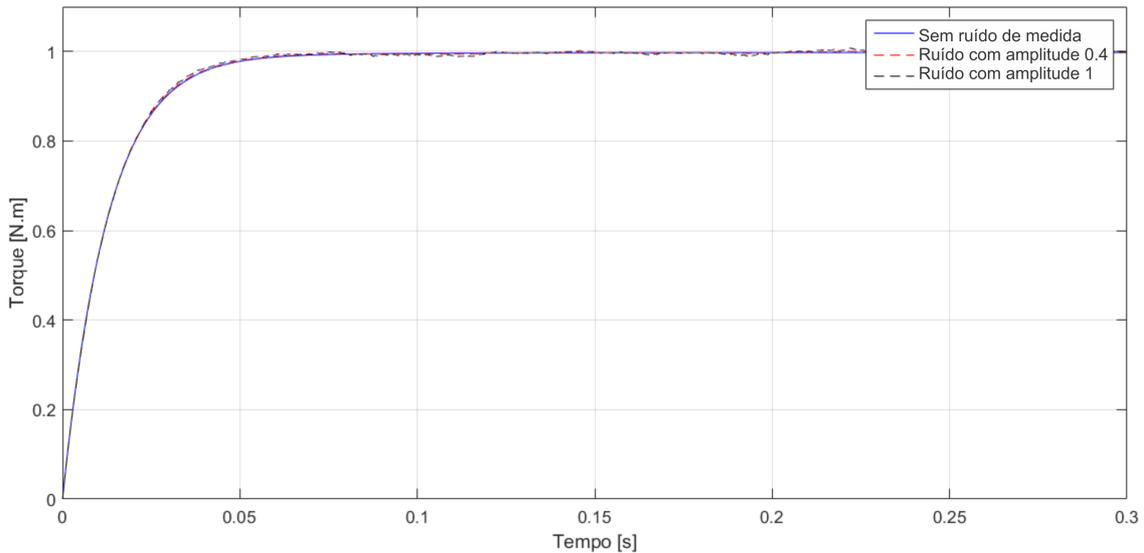


**Figura 10: Resposta do sistema para variações nos parâmetros.**

A fim de ilustrar a robustez do controlador na presença de ruídos de medição, outra simulação foi realizada adicionando ruídos brancos, com diferentes amplitudes, nas variáveis  $\theta_c$  e  $\theta_m$ . Desta forma, a saída do sistema mostrada na equação 5 passa a obter a forma da equação 20, em que  $v$  corresponde ao ruído de medida:

$$y(t) = Cx(t) + v \tag{20}$$

O resultado desta simulação é mostrado na figura 11, a figura 12 mostra a mesma simulação, porém com uma aproximação (*zoom*) na curva. Observa-se que mesmo com a perturbação nos sinais medidos a resposta do sistema não foi comprometida significativamente o que demonstra mais uma vez a robustez da estratégia proposta.



**Figura 11: Simulação com ruído adicionado às variáveis medidas.**

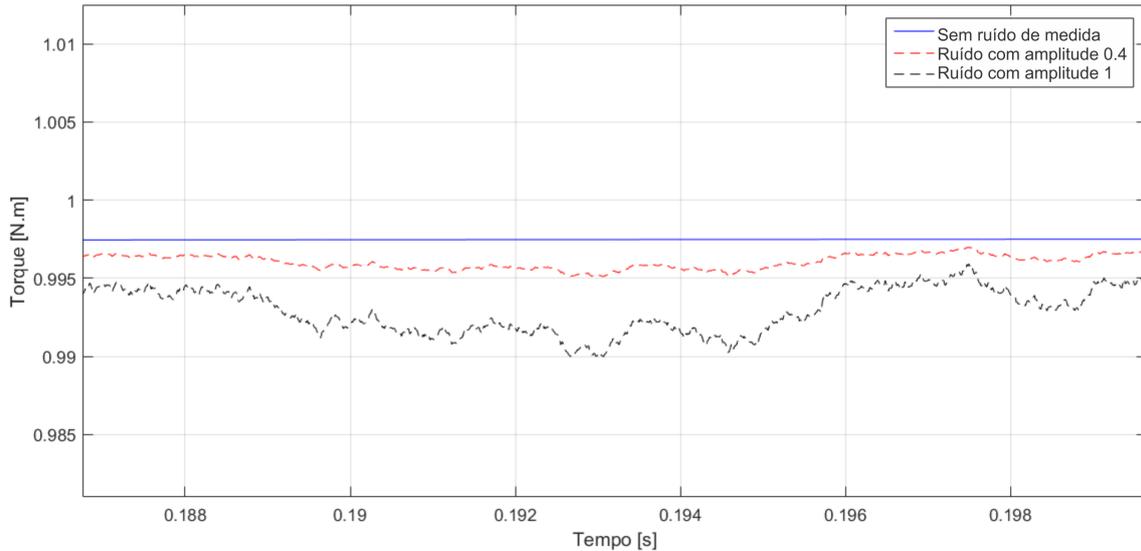


Figura 12: Simulação com ruído adicionado às variáveis medidas (figura ampliada).

## 6 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi apresentado uma estratégia de controle para um sistema de direção elétrica assistida. Utilizou-se um controlador do tipo LQG, constituído por um LQR discreto e um filtro de Kalman também discretizado para estimação dos estados. Os resultados mostraram que a estratégia definida apresentou estabilidade e robustez, uma vez que na presença de ruídos de medidas e variações de parâmetros as respostas permaneceram próximas as simulações ideais. Como sugestão para trabalhos futuros, pretende-se analisar a variável de comando do sistema, isto é a tensão do motor DC. Isto é de fundamental importância já que, em aplicações práticas, esse sinal deve obedecer às restrições físicas do dispositivo. Uma das maneiras de atingir estas restrições é através da utilização de um Controlador Preditivo Baseado em Modelos (MPC) o qual permite restringir tantos os estados quanto os comandos do sistema sob determinadas faixa de operação.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a FAPDF (Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal) pelo fomento.

## REFERÊNCIAS

- Alamir, M. 2013. *A Pragmatic Story of Model Predictive Control: Self-Contained Algorithms and Case-Studies*. CNRS-University of Grenoble.
- Badawy, A., Zuraski, J., Bolourchi, F., & Chandy, A. 1999. Modeling and analysis of an electric power steering system (No. 1999-01-0399). *SAE Technical Paper*.
- Blake, D., & Leader, A. 2005. *Embedded systems and vehicle innovation*. Automotive Engineering International, 42.
- Chabaan, R. C., & Wang, L. Y. 2001. Control of electrical power assist systems:  $H_\infty$  design, torque estimation and structural stability. *JSAE review*, pp. 435-444.

- Chitu, C., Lackner, J., Horn, M., Waser, H., & Kohlböck, M. 2011. A robust and optimal lqr controller design for electric power steering system. *In Proceedings of the Joint INDS'11 & ISTET'11* pp. 1-5. IEEE.
- Chitu, C., Lackner, J., Horn, M., Srikanth Pullagura, P., Waser, H., & Kohlböck, M. 2013. Controller design for an electric power steering system based on LQR techniques. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, pp. 763-775.
- Coulon D. Whatever the Future of the Automotive Industry, Electronics is the Key, 2014. Disponível em: < <http://www.ttiinc.com/object/me-coulon-20140909.html> />. Acesso em: 07 de julho de 2016.
- Day, J. TRW launches EPS column drive in China, 2013. Disponível em: < <http://johndayautomotiveelectronics.com/trw-launches-eps-column-drive-in-china/> />. Acesso em: 24 de julho de 2016.
- Dong, L., Kandula, P., Gao, Z., & Wang, D. 2010. Active disturbance rejection control for an electric power assist steering system. *International Journal of Intelligent Control and System*, pp. 18-24.
- Kannan, M. M. 2007. *Digital Control*, Ed Wiley, pp. 508-511 .
- Kim, J. H., & Song, J. B., 2002. Control logic for an electric power steering system using assist motor. *Mechatronics*, pp. 447-459.
- Levine, W. S. (Ed.). 1996. *The control handbook*. CRC press.
- Marouf, A., Djemai, M., Sentouh, C., & Pudlo, P. 2012. A new control strategy of an electric-power-assisted steering system. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, pp. 3574-3589.
- Ogata K. 2010. *Modern Control Engineering*. 5 Edição, Pearson, pp. 793.
- O'Reilly, J. 1987. *Multivariable control for industrial applications*, IET, pp. 166.
- Parmar, M., & Hung, J. Y. 2004. A sensorless optimal control system for an automotive electric power assist steering system. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, pp. 290-298.
- Parvathy, R., & Daniel, A. E. 2013. A survey on active disturbance rejection control. *In Automation, Computing, Communication, Control and Compressed Sensing, 2013 International Multi-Conference on*, pp. 330-335. IEEE.
- Ren, W., Chen, H., & Song, J. 2008. Model-based development for an electric power steering system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, pp. 1265-1269.
- Song, J., Boo, K., Kim, H. S., Lee, J., & Hong, S. 2004. Model development and control methodology of a new electric power steering system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, pp. 967-975.
- Stella, G. N. D. 2015. Aplicação do Método de Desenvolvimento Baseado em modelos para uma Função de Software Automotivo. Dissertação de Mestrado. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná*. Ponta Grossa. Paraná. Brasil.

- Sugitani, N., Fujuwara, Y., Uchida, K., & Fujita, M. 1997. Electric power steering with  $H_\infty$  control designed to obtain road information. *In American Control Conference, 1997. Proceedings of the 1997* (Vol. 5, pp. 2935-2939). IEEE.
- Yang, X., & Marjanovic, O. 2011. LQG control with extended Kalman filter for Power Systems with unknown time-delays. *IFAC Proceedings Volumes*, pp. 3708-3713.
- Zang, H., & Liu, M. 2007. Fuzzy neural network PID control for electric power steering system. *In 2007 IEEE International Conference on Automation and Logistics*, pp. 643-648.
- Zhao, W. Z., Li, Y. J., Wang, C. Y., Zhao, T., & Gu, X. Y. 2013.  $H_\infty$  control of novel active steering integrated with electric power steering function. *Journal of Central South University*, pp. 2151-2157.