



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS  
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING  
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

## ANÁLISE DE UM MOTOR STIRLING ATRAVÉS DE UM MODELO ADIABÁTICO E DE UM NÃO ADIABÁTICO

**Paulo Henrique de Freitas Lima**

**Ana Carolina Ávila Santos**

**Fábio Alfaia da Cunha**

**Augusto César de M. Brasil**

paulohflima@gmail.com

avila.ana@hotmail.com

fabioalfaia@unb.br

augbrasil@gmail.com

Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília, 7244-240, Gama, Brasília-DF.

**Resumo.** *Para suprir a demanda de energia em 2050 que praticamente triplicará comparada a atual, o Brasil vem tentando diversificar sua matriz energética. Uma das soluções é o Leilão de Energia Reserva a partir de biomassa, energia eólica e solar. Há várias aplicações da energia solar como fonte de energia, uma delas é o sistema de Concentração de Potência Solar. Esse sistema concentra calor proveniente da radiação solar em um ponto e pode ser acoplado a um motor de combustão externa, como é o caso de um motor stirling. Para um melhor aproveitamento desse sistema é preciso ter uma análise precisa do motor para definir padrões de temperaturas, pressões e qual tipo de gás utilizado no sistema. Assim, este trabalho apresenta a modelagem matemática adiabática e não adiabática de um motor Stirling. Previsões dos modelos de simulação são apresentadas e adequadamente analisadas.*

**Palavras-chave:** *Motor stirling, Modelo adiabático. Modelo não adiabático.*

## 1 INTRODUÇÃO

A demanda brasileira de energia atualmente está em 267 milhões de toneladas equivalentes de petróleo (tep) e quase triplicará até 2050 de acordo com EPE (2014) podendo chegar a 605 milhões tep. Ao se levar em conta os últimos acontecimentos de nível baixos das reservas das usinas hidrelétricas brasileiras e necessidade de acionamento das termelétricas – uma das mais poluentes formas de produção de eletricidade, o Brasil procura expandir a participação da fonte solar dentro da matriz energética brasileira. Um exemplo dessa postura é a aprovação dos Leilões de Energia Reserva (LER) pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) a partir de 2014, com objetivo de contratar energia reserva proveniente de fontes renováveis como solar, eólica e biomássica (ANEEL, 2014). Em 2015, já aconteceram dois LER's com energia renovável como produto, nos quais todos os projetos da fonte solar eram fotovoltaicos (EPE, 2015).

No contexto da evolução na produção de energia por fonte solar, há dois principais caminhos: Produção fotovoltaica (através de placas solares que produzem eletricidade com o princípio do efeito fotoelétrico) e a produção heliotérmica. O aproveitamento heliotérmico ocorre através da concentração da irradiação solar que transfere calor para um sistema de potência com finalidade de produção de energia cinética ou elétrica. Esse tipo de sistema é chamado de Concentração de Potência Solar (CPS) (HINRICHS, 2010).

Sobre o recurso solar, sua radiação “pode ser decomposta, para fins de análise, de diferentes formas”: Irradiação Global Horizontal (GHI), Irradiação Difusa Horizontal (DIF) e Irradiação Normal Direta (DNI). Se tratando de um sistema heliotérmico, a parcela de maior importância é a DNI. “Ela consiste na parcela que atinge o solo diretamente, sem reflexões”. Inclusive, para viabilização técnica do projeto requer-se um valor mínimo de 1900 kWh/m<sup>2</sup>. (EPE, 2012).

Uma solução para o sistema heliotérmico é a aplicação em um motor stirling. A tecnologia utilizada é composta por pratos parabólicos que concentram a radiação solar em um motor acoplado em seu foco. O sistema dribla o problema com a perda de DIF com movimentação em dois eixos, diminuindo as perdas térmicas (EPE, 2012). Esse motor é movido pela diferença de temperatura entre suas câmaras, quente (H) e fria (C), que causa diferença de pressão dentro da máquina pela expansão e contração do gás de trabalho. Esse movimento moverá pistões ligados a um rotor, gerando energia cinética, que pode ser acoplado a um gerador para geração de eletricidade. Esse tipo de tecnologia com um receptor central permite o aquecimento de um fluido em temperaturas superiores a 650°C (HINRICHS, 2010), garantindo uma grande diferença de temperatura que pode melhorar o desempenho do motor.

Quando motores stirling são comparados a motores de combustão interna (ciclo otto), apesar de este ser mais utilizado no mercado e maior rendimento elétrico, possuem maior periodicidade de manutenção devido ao acúmulo de fuligem e desgaste das peças pelo efeito da combustão que pode ser heterogênea causando recuo do pistão. Considerando emissão de poluentes, os motores de combustão interna têm emissão até 10 vezes superiores aos motores stirling (SANTOS, 2012).

Por conta do exposto, este trabalho utiliza modelagem matemática e hipóteses termodinâmicas adiabáticas e não adiabáticas para analisar o funcionamento de um motor stirling.

## 2 BASE TEÓRICA

### Gás ideal

Uma equação de estado relaciona as seguintes propriedades de uma substância em equilíbrio: Pressão (P), Temperatura (T) e volume específico ( $v$ ). A baixas temperaturas o volume de um gás é proporcional à sua temperatura (ÇENGEL, 2006):

$$Pv = RNT \quad (1)$$

Onde, R é a constante do gás. Esse valor é específico para cada tipo de gás e é determinado por:

$$R = R_u/M \quad (2)$$

Onde  $R_u$  é Constante Universal dos Gases e M representa a Massa Molar.

Quando um gás obedece a Eq. 1 ele é chamado de Gás Ideal. Entretanto há algumas restrições para o uso dessa equação. Principalmente quando sua temperatura e pressão estão perto do ponto crítico ou da zona de saturação. O desvio da situação de gás ideal é denominado Fator de Compressibilidade (Z) (ÇENGEL, 2006).

$$Z = (Pv)/(RT) \quad (3)$$

Logo, quando o gás é ideal,  $Z = 1$  e obtemos a Eq. 1 novamente. Agora, pode ser relativa a decisão do que é estar próximo do ponto crítico e da região de saturação. Para solucionar esse problema, normaliza-se a temperatura e pressão atuantes em respeito ao ponto crítico (ÇENGEL, 2006):

$$P_R = P/P_C \quad (4)$$

$$T_R = T/T_C \quad (5)$$

$P_R$  e  $T_R$  são a Pressão Reduzida e Temperatura reduzida, respectivamente. Disso, duas condições para comportamento de um gás ideal foram generalizadas (ÇENGEL, 2006):

- I. Quando em baixas pressões ( $P_R \ll 1$ ).
- II. Quando em altas temperaturas ( $T_R > 2$ ), exceto ( $P_R \gg 1$ ).

Em um motor stirling os gases utilizados normalmente são o Hidrogênio, Hélio e Ar, por possuírem temperaturas baixas no ponto crítico (aproximadamente - 240 °C , - 268 °C e - 141°C respectivamente (ÇENGEL, 2006)) e na região do motor as temperaturas variarem entre 25°C a 1000°, a condição II é satisfeita e é possível utilizar a Eq. 1 no modelo.

### 2.2 Processos termodinâmicos

Processos térmicos podem ser divididos em duas categorias: processos reversíveis e irreversíveis. Na verdade, todos os processos que ocorrem na natureza são irreversíveis. De acordo com a segunda lei da termodinâmica, todos os processos ocorrem em uma determinada direção (relacionada a qualidade da energia, uma maior temperatura é melhor que uma mais baixa por poder ser converter energia, como calor em trabalho) procurando equilíbrio - nesse contexto, depois que um certo processo aconteceu, além da mudança no sistema também há mudança ao redor dele, assim torna-se impossível para o sistema retornar às suas condições iniciais. Se isso acontecesse, o processo seria reversível (ÇENGEL, 2006).

Processos reversíveis são idealizações teóricas de processos irreversíveis para facilitar estudos de turbinas e motores que entregam e/ou consomem maior/menor trabalho. São considerados processos reversíveis (ÇENGEL, 2006):

I - Compressão/Expansão Isotérmica - No caso da expansão, o gás se expande, aplicando trabalho ao seu redor, enquanto isso o gás perde temperatura  $dT$  que é repostada pelo recebimento de calor de um reservatório de calor, assim a temperatura é mantida constante. Durante a expansão, o gás é comprimido pela ação de trabalho dos arredores e aumenta sua temperatura, mas ao mesmo tempo também perde calor o que mantém sua temperatura constante durante o processo.

II - Compressão/Expansão Adiabática - um processo adiabático não há perda de calor, é considerado então, que as superfícies de controle do sistema são perfeitamente isoladas, e a absorção ou entrega de trabalho promovem mudanças na temperatura do gás.

### 2.3 Princípios de carnot

Uma máquina térmica que segue o princípio do ciclo totalmente reversível de carnot - expansão isotérmica seguida por uma expansão adiabática depois compressão isotérmica e compressão adiabática - com um reservatório de alta temperatura ( $T_h$ ) doando calor à máquina e um reservatório de baixa temperatura ( $T_k$ ) recebendo calor da máquina terá a maior eficiência possível, uma vez que a eficiência de processos reversíveis é sempre maior que a eficiência de processos irreversíveis já que há perdas para as redondezas (ÇENGEL, 2006). O segundo princípio de carnot é: se duas máquinas térmicas reversíveis operam com os reservatórios em mesma temperatura, elas possuirão a mesma eficiência. A eficiência de carnot é dada por (ÇENGEL, 2006):

$$\eta_c = 1 - T_k / T_h \quad (6)$$

### 2.4 Ciclo Stirling vs Motor Stirling

No estudo da termodinâmica, é muito comum cometer o erro de confundir uma máquina térmica com o ciclo termodinâmico, assim, vamos diferenciá-los para uma melhor compreensão do que realmente acontece no objeto de estudo que é o motor stirling.

O ciclo Stirling ideal combina quatro processos, dois processos isotérmicos e dois processos de troca de calor em volume constante. Conforme o diagrama de pressão e temperatura na fig. 3. O trabalho é feito em, ou produzidos pelo ciclo, apenas durante os processos de temperatura constante, no entanto, o calor deve ser transferido durante todos os quatro processos (STINE, 2001).

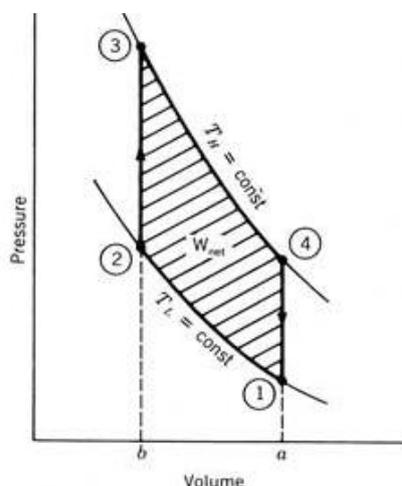


Figura 1. Diagrama P-V de um Ciclo Stirling (STINE, 2001)

O Motor Stirling foi inventado por Robert Stirling em 1816 (PARLAK, 2008) e tem o seguinte funcionamento em quatro fases (STINE, 2001):

- 1) Expansão: O gás que foi aquecido pela fonte de calor expande-se numa extremidade de condução para a frente do pistão de deslocamento.
- 2) Transferência de Calor: A maior parte do gás foi conduzido para o lado resfriado do motor, por isso perde calor.
- 3) Compressão: Como tem sido resfriado, o gás é comprimido e traz de volta o êmbolo.
- 4) Transferência de Calor: O gás comprimido absorve o calor da fonte de calor.

Na prática, os processos que ocorrem em motores não são ideais. Existem três fatores importantes que dificultam o funcionamento ideal da máquina, são eles: o movimento sinusoidal dos pistões, a regeneração imperfeita e o volume morto (STINE, 2001).

O Volume Morto é a maior causa da ineficiência do motor, e é devido a não participação de todo o volume do gás durante a operação. Parte do gás permanece parada nas câmaras do motor. A Regeneração trata-se de uma reciclagem de calor dentro do ciclo: Durante o resfriamento o fluido recém-aquecido perde calor para entrar em equilíbrio com a fonte fria, parte desse fluido é transportada pelo regenerador para a parte de aquecimento, assim, o fluido precisará de menos energia da fonte e há menos gasto energético. Esses fatores acabam arredondando o diagrama de pressão e volume do sistema, como pode ser visto na Fig. 4 (STINE, 2001).

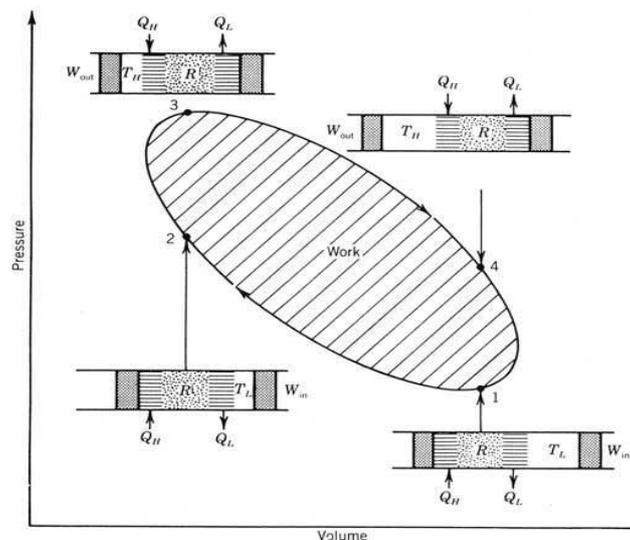


Figura 2. Diagrama P-V de um Motor Stirling (STINE, 2001)

Dentro do motor, os fluidos geralmente utilizados são ar, hidrogênio e hélio. Numa transferência de calor por unidade de queda de pressão analisada, considerando-se todos os três gases na mesma diferença de temperatura, velocidade e pressão, para o hélio a transferência é 7,5 vezes maior do que o ar. Isto se deve ao ar possuir maior peso molecular e viscosidade. A mesma análise entre o hidrogênio e o ar nos dá uma relação de 12: 1 (BINGHAM, 1994). Quando se compara o ar e nitrogênio, a proporção é em cerca de 1, uma vez que o ar é composto principalmente por nitrogênio.

Então, o que pode ser dito sobre os motores movidos a ar é que eles teriam que ser grandes e lentos, com baixa potência específica, para minimizar a queda de pressão. Mas isso iria aumentar o volume morto do motor. Entretanto, o uso de gases leves também conduz a problemas. O hidrogênio em equilíbrio tem uma pequena fração da forma atômica e sua

interação com o recipiente faz com que haja perda do fluido, além disso, o hidrogênio é altamente inflamável. Por isso, a melhor solução seria o uso de hélio, um gás inerte (BINGHAM, 1994).

Há três tipos de configurações para um Motor Stirling:

- I. Tipo Alfa, com dois pistões de movimento ligados às engrenagens.
- II. Tipo Beta, com um pistão de movimento e um deslocador em série no mesmo cilindro.
- III. Tipo Gama, com um pistão de movimento e um deslocador em cilindros diferentes.

Quanto ao volume total de fluido, em uma configuração alfa o volume total do fluido de trabalho no sistema é determinado pelos deslocamentos relativos dos seus dois pistões. Já em motores do tipo beta ou gama, o volume total do trabalho fluido no motor é determinado simplesmente pelo deslocamento de um pistão, sendo que não há influência do êmbolo (CHENG, 1992).

### **Regenerador**

O regenerador tem um papel importante na eficiência do motor ao agir como um elemento de armazenamento térmico que permite que parte do calor perdido no resfriamento seja novamente aproveitado. Os regeneradores entregam, aproximadamente, seis vezes mais energia ao fluido do que é adicionado ao ciclo pela fonte (YUAN, 1993).

Há quatro tipos mais comuns de regenerador: Fenda anular, placa de malha de fios, esfera compactada e lamina gravada. Entre estes o mais utilizado é a placa de malha por proporcionar grande área para transferência de calor com baixa geração de entropia (ACKERMANN, apud ÖZBAY, 2011). Como esse tipo de regenerador é o utilizado no motor em estudo, será o único a ser abordado e é representado pela Fig. (3).

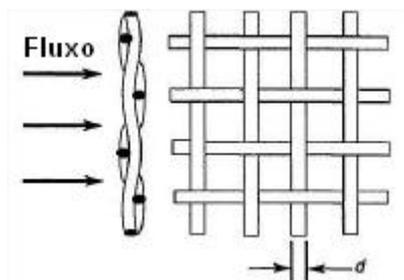


Figura 3. Geometria de uma placa de malha de fios (adaptada de ÖZBAY, 2011)

As variáveis que impactam na geometria do regenerador são: Diâmetro da tela, diâmetro do fio ( $d$ ), densidade da malha, número de telas. A partir destas, é possível se obter:

- Comprimento do Regenerador ( $L$ ): espessura da tela multiplicado pela quantidade de telas. Entretanto, já que não é possível encaixar as telas perfeitamente, pequenos gaps são formados, então corrige-se o comprimento com fator multiplicativo 1.044 obtido experimentalmente por Harvey em 1999 (apud ÖZBAY, 2011);
- Espessura da tela ( $t_s$ ): comprimento de dois diâmetros do fio ( $d$ ). Entretanto devido ao formato “de ondas” do fio, corrige-se com fator multiplicativo 1,1 obtido experimentalmente por Harvey em 1999 (apud ÖZBAY, 2011);
- Porosidade ( $\alpha$ ): Relação entre volume total de espaços vazios conectados e volume total da matriz de malhas;
- Diâmetro Hidraulico ( $d_h$ ):

$$d_h = 2\alpha/\beta \quad (7)$$

Onde  $\beta$  é a densidade de área obtida pela relação entre a área de superfície total dos espaços vazios conectados e volume total da matriz;

- Área Molhada: Área total em que ocorre transferência de calor entre o fluido e a matriz de malhas:

$$A_s = \beta A_r L \quad (8)$$

Onde  $A_r$  é a área frontal da tela;

Assim como uma esponja, a geometria do regenerador é composta por meio poroso, a fim de maximizar a área de transferência de calor entre fluido e material, minimizar a perda de pressão, a condução axial (perda de calor) e volume morto. Nem sempre todos esses parâmetros são atingidos o que não permite toda energia retornar ao fluido de trabalho (TOGHYANI, et al, 2013). A efetividade,  $\epsilon$ , representa esse processo não ideal de regeneração, e assume o valor máximo de 1 quando o é ideal (ÖZBAY, 2011):

$$\epsilon = Q_{Rreal} / Q_{Rideal} \quad (9)$$

Ao se considerar a ineficiência do regenerador, pode-se definir a perda de calor por condutividade externa por (TOGHYANI, et al, 2013) (ABBAS, 2008) (TLILI, 2012):

$$\delta Q_{RLOSS} = (1 - \epsilon) \delta Q_{Rideal} \quad (10)$$

Onde:  $\delta Q_{Rideal}$  é a energia trocada no regenerador em estado ideal.

$\epsilon$  pode ser determinado por:

$$\epsilon = NTU / (NTU + 1) \quad (11)$$

NTU ou unidade de transferência de calor é um adimensional relacionado ao tamanho de um trocador de calor e é definido por:

$$NTU = (St A_s) / (2A) \quad (12)$$

e  $St$  é o número de Staunton, definido por:

$$St = 0.46 Re^{-0.4} / Pr \quad (13)$$

$Pr$  é o número de Prandtl, parâmetro adimensional que relaciona espessura relativa da velocidade e a camada térmica de fronteira definido como (ÇENGEL, 2006):

$$Pr = \mu c_p / k \quad (14)$$

Valores típicos de número de Prandtl variam entre 0,7 a 1 para gases (ÇENGEL, 2006), admite-se para nitrogênio o valor de 0,7 a 800 K de acordo com tabela A-6 de propriedades de gases a pressão atmosférica (ÇENGEL, 2007).

O número de Reynolds ( $Re$ ) é definido por:

$$Re = \rho d_h v / \mu \quad (15)$$

### 3. MODELOS MATEMÁTICOS

#### 3.1 Hipótese Adiabática Ideal

Em um motor stirling típico há cinco compartimentos: expansão, aquecimento, regeneração, resfriamento e compressão. O primeiro e último compartimento são ambientes

de trabalho pelo movimento de pistão então as paredes das câmaras não são adequadas para troca de calor, nesse contexto, para facilitar uma análise do que ocorre no motor, considerar esses processos como adiabáticos pode ser uma boa aproximação. A modelagem adiabática foi primeiramente desenvolvida e trabalhada por Urieli em 1984 (apud ZIABASHARHAGH, 2012) e será apresentada a seguir. Outra aproximação para facilitar a análise seria considerar os processos de aquecimento e resfriamento como isotérmicos e durante a regeneração a distribuição de temperatura do gás ocorre de forma linear, com as seguintes condições de contorno: a temperatura no regenerador na conexão com o resfriador é a temperatura de resfriamento, e a temperatura no encontro com o aquecedor é a temperatura de aquecimento. Para simplificar ainda mais a análise, usaremos uma temperatura média efetiva para o regenerador. Obtida através equação de massa:

$$m = \int \rho dV \quad (16)$$

Onde:

$$dV = A dx \quad (17)$$

$$\rho = P/(RT) \quad (18)$$

Onde  $T = Tr(x)$  é o comportamento linear dependente de  $x$  e condições de contorno,  $Tr(0) = Tk$  e  $Tr(l) = Th$ , onde  $l$  é o comprimento do regenerador, portanto:

$$Tr(x) = Th - Tk/l - Tk \quad (19)$$

Ao se calcular  $m$ , compara-se com:

$$M = (PV)/(RT_{med}) \quad (20)$$

Inserindo as Eqs. (17), (18) e (19) na Eq. (16):

$$m = \int_0^l \frac{P/R}{Th} - \frac{Tk}{l} - Tk^{Adx} \quad (21)$$

Comparação Eq. (21) com a Eq. (20), considerando que  $T_{med}$  no regenerador é  $Tr$ :

$$Tr = Th - \frac{Tk}{\ln(Th/Tk)} \quad (22)$$

Recapitulando, os compartimentos estão ligados da seguinte ordem Compressão (c), Resfriamento (k), Regeneração (r), Aquecimento (h) e Expansão (e), como representado na fig. 7.

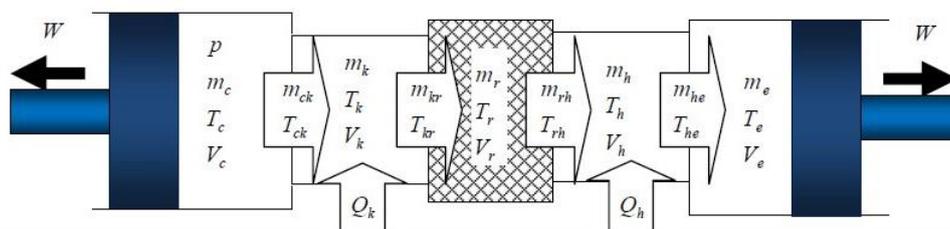


Figura 4. Modelo das Câmaras de um Motor Stirling (ZIABASHARHAGH, 2012)

Nas câmaras ‘c’ e ‘e’ o processo é adiabático, portanto as temperaturas do fluido de trabalho variam com os processos de expansão/compressão e também com a direção do fluido

( $c \rightarrow k$ ;  $k \leftarrow c$ ;  $h \rightarrow e$ ;  $h \leftarrow e$ ). Essas temperaturas transitórias do fluido serão referenciadas de  $T_{ck}$  e  $T_{he}$ , obtendo as seguintes condições ao se considerar a direção do compartimento frio para o aquecido como positiva:

- Se  $m_{ck} > 0$   $T_{ck} = T_c$  se não  $T_{ck} = T_k$
- Se  $m_{he} > 0$   $T_{he} = T_h$  se não  $T_{he} = T_e$

A massa de fluido  $M$  é constante no Sistema, além disso, não há perda de carga, sendo  $P$  a pressão instantânea por todo sistema.

$$M = mc + mk + mr + mh + me \quad (23)$$

$$dmc + dm_k + dmr + dm_h + dme = 0 \quad (24)$$

O gás, por suposição, será regido pela lei dos gases perfeitos Eq. (1), com diferencial:

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dm}{m} + \frac{dT}{T} \quad (25)$$

Resolvendo a Eq. (23) com a Eq. (20), com a intenção de conseguir uma relação da pressão do fluido com as condições de cada câmara:

$$P = \frac{MT}{V_c/T_c} + \frac{V_k}{T_k} + \frac{V_h}{T_h} + \frac{V_e}{T_e} \quad (26)$$

Em um compartimento geral temos a mudança de entalpia pelo fluxo de massa, o trabalho realizado pelo pistão ou a transferência de calor, então:

#### Quadro 1. Equação de Balanço de Energia para um CV Aberto

Taxa de calor entrando no controle de volume (cv) + taxa de entalpia entrando no cv = trabalho realizado ao redor + variação da energia interna do cv

$$dQ + (c_p T_e m_e - c_p T_s m_s) = dW + c_v d(mT) \quad (27)$$

- Fluxo de massa entre as câmaras (cv's)

$$m_{ck} = -dmc \quad (28)$$

$$m_{kr} = m_{ck} - mk \quad (29)$$

$$m_{he} = dme \quad (30)$$

$$m_{hr} = m_{he} + dm_h \quad (31)$$

- Câmaras de permutação de calor  
 $T = \text{constante}$ ;  $V = \text{constant}$ ;  $dW = 0$

Equação (25) se torna:

$$\frac{dP}{P} = \frac{dm}{m} \quad (32)$$

$$E \quad dm = dP \frac{M}{P} = dp \frac{V}{RT}$$

Da Equação (26):

$$dmc + dme + \left( \frac{Vk}{Tk} + \frac{Vr}{Tr} + \frac{Vh}{Th} \right) \frac{dP}{R} = 0 \quad (33)$$

Na equação de conservação de energia:

$$dQ + (c_p T_e m_e - c_p T_s m_s) = c_v d(mT) = V c_v dP/R \quad (34)$$

$$dQ_k = V k c_v \frac{dP}{R} - (c_p T_{ck} m_{ck} - c_p T_{kr} m_{kr}) \quad (35)$$

$$dQ_r = V r c_v \frac{dP}{R} - (c_p T_{kr} m_{kr} - c_p T_{rh} m_{rh}) \quad (36)$$

$$dQ_h = V h c_v \frac{dP}{R} - (c_p T_{rh} m_{rh} - c_p T_{hm} m_{hm}) \quad (37)$$

• Câmara compressão e expansão:

Para facilitar a análise, procura-se  $dmc$  e  $dme$  em função de  $dP$ , assim a solução da análise virá desse fator. Aplica-se a condição adiabática dos compartimentos de trabalho:

$$-c_p T_{ck} m_{ck} = dW_c - c_v d(m_c T_c) \quad (38)$$

$$-c_p T_{ck} m_{ck} = P dV_c - c_v d(m_c T_c) \quad (39)$$

$$c_p - c_v = R \quad (40)$$

$$c_p / c_v = \gamma \quad (41)$$

Onde  $c_p$  e  $c_v$  são os calores específicos do fluido de trabalho, que nesta hipótese, são considerados constantes ao longo do ciclo. E  $P V_c = m_c R T_c$ .

$$dmc = \frac{(P dV_c + V_c dP / \gamma)}{R T_c \gamma} \quad (42)$$

Similar na câmara de expansão:

$$dme = \frac{(P dV_e + V_e dP / \gamma)}{R T_e \gamma} \quad (43)$$

Substitui-se Eqs. (42) e (43) na Eq. (33):

$$dP = \frac{-\gamma P (dV_e / T_e + dV_c / T_c)}{V_c / T_c + \gamma (V_k / T_k + V_r / T_r + V_h / T_h) + V_e / T_e} \quad (44)$$

Da equação (14):

$$dT_c = T_c (dP / P + dV_c / V_c + dmc / m_c) \quad (45)$$

$$dT_e = T_e (dP / P + dV_e / V_e + dme / m_e) \quad (46)$$

As equações de trabalho nas células de expansão e compressão:

$$W = W_c + W_e \quad (47)$$

$$dW = dW_c + dW_e \quad (48)$$

$$dW_e = P dV_e \quad (49)$$

$$dWc = PdVc \quad (50)$$

Logo, para achar o trabalho e o rendimento da máquina precisamos de P instantânea Eq. (26) que depende das temperaturas instantâneas não constantes Tc e Te, que podem ser encontradas pela integração das Eqs. (45) e (46).

Agora, baseado nos estudos de ŠKORPÍK podemos também adicionar o estudo da entropia (S) do sistema utilizando novamente o balanço de energia do quadro 1, mas agora para o motor inteiro (CV fechado: mi = mo = 0).

$$\Delta S = \int_0^x dQ/T \quad (51)$$

$$\Delta S = \int_0^x d(U + W)/T = \int_0^x Mc_v dT/T + \int_0^x PdV/T \quad (52)$$

$$\Delta S = M c_v \ln(Tx/T_0) + MR \ln(Vx/V_0) \quad (53)$$

### 3.2 Modelo não adiabático

O modelo apresentado na sessão anterior considera processos perfeitos em que não há perda de calor do fluido para o meio e máquina a não ser para as fontes quente e fria. O seguinte modelo considera duas principais perdas: Perdas por regeneração imperfeita conforme Eq. (10) e por transporte (Qsht) no êmbolo:

$$dQsht = 0.4KDS^2(T_e - T_c)dt/CL \quad (54)$$

Onde K é a condutividade térmica do gás, D é o diâmetro do êmbolo, S é o curso do êmbolo, C é a folga entre o êmbolo e o cilindro e L é o comprimento do êmbolo (MARTINI, 1983).

As perdas por transporte acontecem quando o êmbolo absorve calor do cilindro pelo lado aquecido no início do seu curso e o perde para o cilindro no fim do seu curso na parte fria (TEW, 1978). Agora, assim como no primeiro modelo, aplica-se a equação do balanço de energia considerando esses novos termos das Eq. (10) e (53).

- Câmara de expansão

$$-dQsht + mhecpThe = cvd(mt)e + pdVe \quad (55)$$

Agora, a Eq. (38) é substituída por:

$$dme = ((pdVe + 1/\gamma V edp))/The + dQsht/Thecp \quad (56)$$

Substitui-se então, a Eq. (56) na Eq. (33):

$$dP = \frac{-\gamma^{\wedge}[P(dVe/The + dVc/Tck) + dQsht/RTHe]}{Vc/Tck + \gamma(Vk/tk + Vr/Tr + Vh/Th) + Ve/The} \quad (57)$$

- Trocadores de calor

Considerando regeneração imperfeita, na qual o calor perdido será repostado pelas câmaras de aquecimento e resfriamento (ARAOZ, 2014). As Eqs. (37) e (35) serão substituídas respectivamente por:

$$dQh = VhcvdP/R - (cpThmrh - chThemhe) + dQrloss \quad (58)$$

$$dQk = VkcvdP/R - (cpThmkr - chThemck) - dQrloss \quad (59)$$

Além da adição dos termos de perda, ainda é possível deixar a simulação um pouco mais real quando, algumas considerações são modificadas, como, a inconstância dos calores específicos do fluido, que são calculados instantaneamente com as Eqs. (60) e (41) para nitrogênio como fluido de trabalho:

$$c_p = 35.7 [28.9 - 0.1571 \cdot 10^{-2} T + 0.8081 \cdot 10^{-5} T^2 - 2.879 \cdot 10^{-9} T^3] \quad (60)$$

#### 4. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NUMÉRICA

O problema matemático do presente trabalho envolve equações diferenciais ordinárias que são postas em função do ângulo ( $\theta$ ) de rotação da engrenagem do pistão. São sete equações diferenciais a serem resolvidas simultaneamente: Eqs. (35), (36), (37), (45), (46), (49) e (50). Pode-se colocar todas as equações em um vetor  $dY$  e definir condições iniciais  $Y(\theta = 0)$  para iniciar uma integração em  $Y(\theta = \theta + \Delta\theta)$ , procura-se realizar a integração em vários ciclos até a obtenção de uma convergência nos valores de temperatura. Isso significa que se calcula  $Y_j$  utilizando valores de  $Y_{j-1}$  até a condição de contorno ser atendida. Esse tipo de resolução denomina-se como método de passo simples e necessita do cálculo da derivada em vários pontos (RUGGIERO, 2000). O método de passo simples de Runge-Kutta elimina os cálculos das derivadas  $dY$ , trocando-os pelos cálculos de suas integrais  $Y$ . Expande-se  $Y_j$  em Taylor em função de sua variável em  $\theta_{j-1}$  e agrupam-se os termos de mesma ordem (RUGGIERO, 2000). A expansão em 1ª ordem da série de Taylor nos dá  $y_j = y_{j-1} + h dy_{j-1}$ , onde  $h$  é o passo de nossa escolha.

Mesmo que a análise do funcionamento do motor ocorra em regime permanente, pode-se considerar que no instante onde  $\theta = 0$ , a máquina se encontra em regime transiente e só alcança o regime permanente quando as condições de contorno são atingidas. Dessa forma, podem-se estimar temperaturas iniciais para expansão e compressão que são as temperaturas de aquecimento ( $T_h$ ) e resfriamento ( $T_k$ ) respectivamente, além de que  $Q_h$ ,  $Q_r$ ,  $Q_k$ ,  $W_e$  e  $W_c$  são inicialmente 0. Como já dito, a solução avança com  $\theta$  (ângulo de movimento do pistão), logo, todas as derivadas das equações citadas acima são em função de  $\theta$ , ou seja,  $dy/d\theta$ .

##### 4.1 Estudo de caso

Para a aplicação do modelo apresentado, será usado o motor Stirling do tipo gama de um cilindro da empresa Genoastirling s.r.l. conforme a Fig. (5).

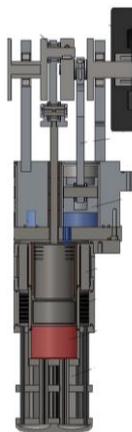


Figura 5. Motor Stirling do Tipo Gama de Genoastirling s.r.l.

O volume ( $\text{mm}^3$ ) por compartimento variável do motor em função do ângulo de rotação é dado pelas Eqs. (61), (62) e (63), como demonstrado no gráfico da Fig. (6). A curva azul representa o volume de compressão, a curva vermelha o volume de expansão, enquanto a curva preta representa o volume total do fluido dentro do motor. Com esse gráfico é possível verificar que o volume de expansão diminui enquanto o volume de compressão aumenta e vice-versa, isso demonstra que a expansão do fluido no compartimento de expansão ocorre ao mesmo tempo em que a compressão do mesmo no compartimento de compressão.

$$V_e = 3268763 - \frac{\pi}{4} 60^3 \left( 1 - \frac{1 + \cos(\theta + 1.57)}{2} \right) \quad (61)$$

$$V_c = 13508 - \frac{\pi}{4} 117978 \left( \frac{1 + \cos(\theta + 1.57)}{2} \right) + \frac{\pi}{4} 207360 \left( 1 - \frac{1 + \cos(\theta + 1.57)}{2} \right) \quad (62)$$

Onde  $V_h = 666045$ ,  $V_k = 78932$  e  $V_r = 78932$ .

$$V = V_h + V_k + V_r + V_e + V_c \quad (63)$$

As equações e os valores fixos de volume do motor foram obtidos do fabricante do motor:  $V_{\max} = 0,000618532 \text{ m}^3$ ,  $V_{\min} = 0,000525624 \text{ m}^3$  e  $V_{\text{médio}} = 0,000572078 \text{ m}^3$ .

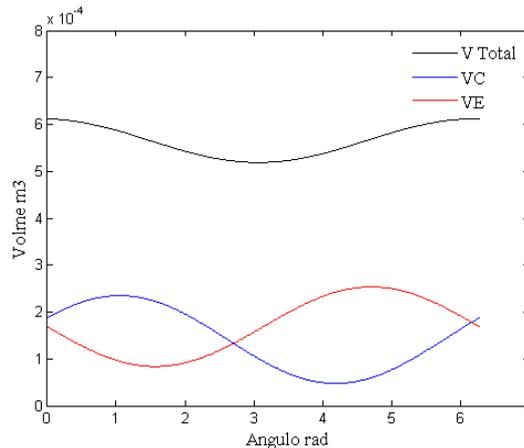


Figura 6. Volume vs Ângulo

### Definição de parâmetros

Os parâmetros a serem utilizados na análise adiabática e na não adiabática estão dispostos na tabela abaixo.

Tabela 1. Parâmetros de Trabalho.

<b>Fluido de Trabalho</b>	<b>Nitrogênio</b>
<b>Temperatura de Aquecimento</b>	1200 K
<b>Temperatura de Resfriamento</b>	300 K
<b>Pressão do Fluido</b>	800 kPa
<b>Densidade do Fluido</b>	8,9847 $\text{kg/m}^3$
<b>Massa total do Fluido</b>	0,0051 kg
<b>Diâmetro do Fio da Malha do Regenerador</b>	40 $\mu\text{m}$
<b>Passo (<math>\Delta\theta</math>)</b>	$2\pi/500$
<b>Frequência</b>	5 Hz

## 5. RESULTADOS

### 5.1 Trabalho realizado

O cálculo do trabalho realizado pelo motor pode ser calculado pela soma de  $dW$ , conforme Eq. (48). O resultado foi  $W = 46,6876$  J para simulação adiabática e  $46,3414$  J para simulação não adiabática. Outra forma de se confirmar o trabalho realizado, é através da área do gráfico PV, de acordo com Eqs. (49) e (50), esse gráfico é representado pelo gráfico da Fig. (7) e tem como trabalho  $W = 46,7363$  J e  $46,3091$  J para simulações adiabática e não adiabática. A diferença entre valores para cada simulação de acordo com método de cálculo do trabalho se dá pela quantidade de iterações que irão compor a curva. Agora, percebe-se que a diferença de trabalho realizado de acordo com as simulações é pequena.

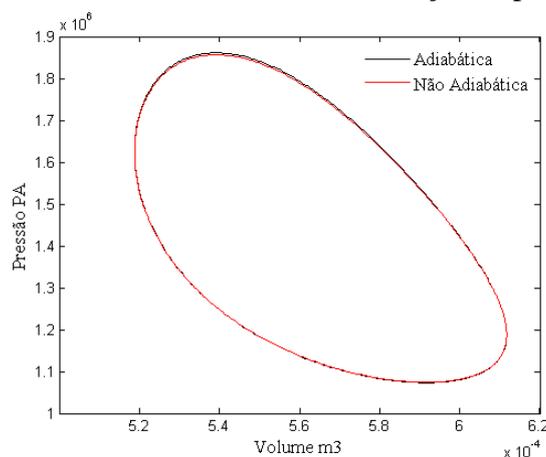


Figura 7. Diagrama PV

Percebe-se pelo gráfico da Fig. (7) também que apesar da proximidade entre a quantidade de trabalho realizado, a simulação não adiabática demonstra que a mesma opera em pressões mais baixas devido à queda de pressão durante o ciclo promovida pelas perdas, o que impacta no trabalho produzido, reduzindo-o. O trabalho de Snyman (2008) também obteve curvas próximas onde a simulação denominada 'Simple' também é uma adaptação da simulação adiabática contendo perdas por regeneração e convecção e fricção, conforme gráfico da Fig. (8).

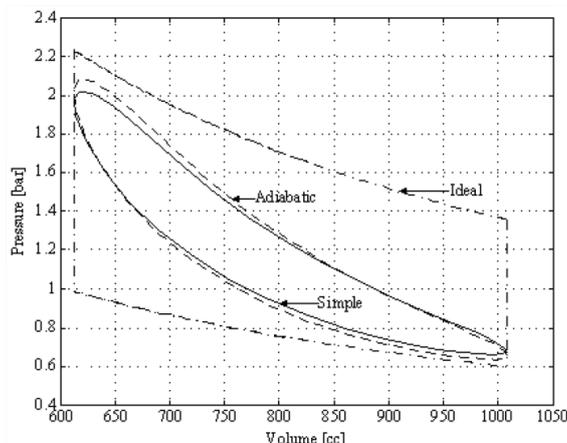


Figura 8. Diagramas PV provenientes do trabalho de Snyman 2008 (SNYMAN, 2008)

Outra análise interessante é a comparação entre o que acontece entre as câmaras de compressão e expansão. Como a câmara de expansão é ligada ao aquecimento do motor, espera-se que seja esse compartimento que produza mais trabalho já que recebe mais energia. A área do diagrama PV de expansão nos dá o calor recebido pela fonte quente ( $Q_h$ ) que originou trabalho, enquanto a área do diagrama de compressão nos dá o calor perdido ( $Q_k$ ). A diferença entre  $Q_h$  e  $Q_k$  nos dá o trabalho total realizado. Da Fig. (9) obtém-se  $Q_h = 65,5739$ ,  $Q_k = 18,8431$  J e  $W = Q_h - Q_k = 46,7363$  J para a simulação adiabática. Isso demonstra como as curvas PV de expansão e compressão geram a curva PV total. Já a simulação não adiabática resulta  $Q_h = 65,1334$  J e  $Q_k = 18,7433$  J, sendo  $W = 46,3901$  J.

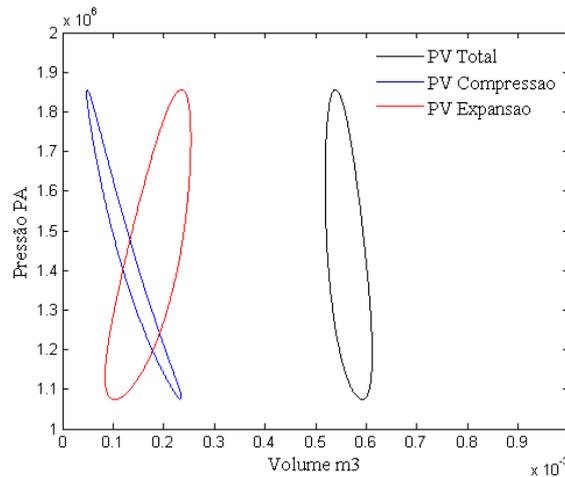


Figura 9. Diagrama PV para os Compartimentos de Expansão e Compressão - Simulação Não Adiabática

Além disso, a diferença entre as câmaras de expansão e compressão também se dá na relação de volume e pressão, como mostrado na Fig. (6), quando maior volume em uma das câmaras, menor está o volume na outra e continuando com a hipótese que não há queda de pressão ao longo da máquina, ao contrário do que se espera, no compartimento de expansão as maiores pressões acontecem quando há maior volume de fluido como pode ser visto no gráfico da Fig. (9) (curva vermelha), isso é devido também a ação da gama de temperaturas maiores que o compartimento está sujeito (Fig. (10)) já que a compressão ocorre pelo resfriamento da massa e a expansão pelo aquecimento.

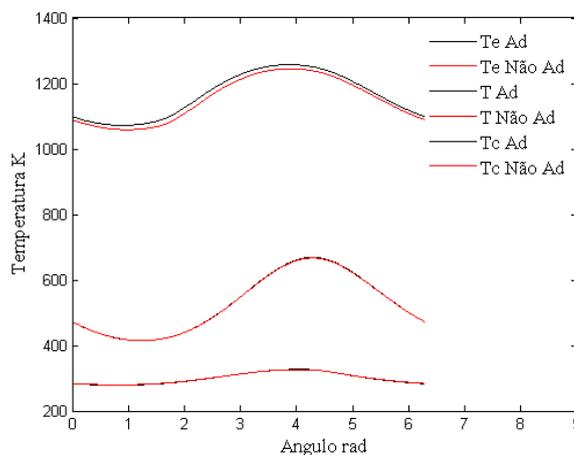


Figura 10. Temperaturas durante o ciclo, simulação adiabática.

## 5.2 Temperaturas

Ao se escolher as condições iniciais como  $T_c = T_k$  e  $T_e = T_h$ , a convergência das condições de contorno  $T_{c\text{inicial}} = T_{c\text{final}}$  atenderam à  $T_{ci} = 283,4082$  K e  $T_{ei} = 1099,4$  K, para simulação adiabática, conforme gráfico da Fig. (10) contra  $T_{ci} = 284,1331$  e  $T_{ei} = 1089,8$ . Essas temperaturas estão dentro da faixa esperada já que não se afastam muito de  $T_k$  e  $T_h$ , respectivamente. Entretanto, percebe-se que a diferença de temperatura diminuiu, já que  $T_h$  é menor e  $T_c$  é maior, o que indica uma menor eficiência da máquina.

## 5.3 Entropia

Outro aspecto de interesse no estudo tem a ver com variação de entropia durante o ciclo. Isto pode nos levar a como o calor é convertido em trabalho ou energia interna. Quando um determinado processo definido por um caminho 1 a 2 é considerado e inverte-se a integral da Eq. (50) obtém-se a energia, em forma de calor, associada a um processo reversível, ou no caso, internamente reversível, já que a fonte de aquecimento e o reservatório frio se mantêm constantes. A área do diagrama de Temperatura por Entropia (gráfico na Fig. (11)) de um ciclo termodinâmico fornece o trabalho reversível produzido pelo sistema (ÇENGEL, 2006). Para o estudo de caso foi obtido  $W = 46,74$  J para simulação adiabática e  $W = 46,43$ , confirmando os resultados anteriores e garantindo que as equações foram adequadamente resolvidas. Pode-se ver também que mais entropia foi gerada na simulação não adiabática.

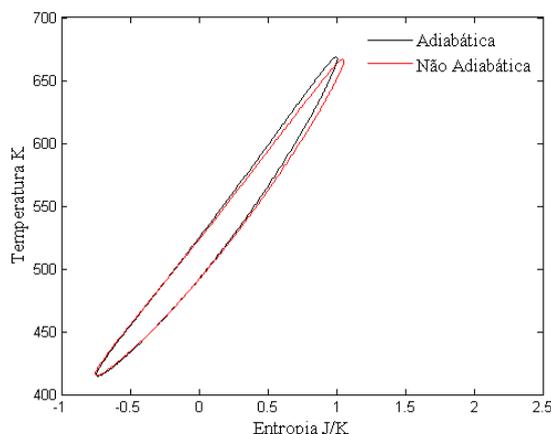


Figura 11. Diagrama TS

## 5.4 Transferência de calor

O gasto energético para gerar trabalho na máquina ocorre na câmara de expansão e compressão. Ele ocorre devido ao aquecimento do fluido nestes compartimentos pelo calor recebido ( $Q_h$ ) nas câmaras de troca de calor e também devido ao resfriamento devido a perda de calor ( $Q_k$ ) para o reservatório frio.

Dos cálculos aplicados no código, foram obtidos:  $Q_h = 64,7468$  (o sistema recebeu 64,7468 J),  $Q_k = -18,4545$  J (o sistema perdeu 18,7435 J). Já a simulação não adiabática resulta  $Q_h = 74,8406$  J e  $Q_k = -18,2774$  J, sendo  $Q_h - (-Q_k) = 56,5632$  J o calor total líquido recebido durante o ciclo. Entretanto nem todo calor recebido foi transformado em trabalho, portanto, considerando a simulação adiabática como ideal,  $Q_{\text{perdas}} = 56,5632 - 46,2923 = 10,2709$  J.

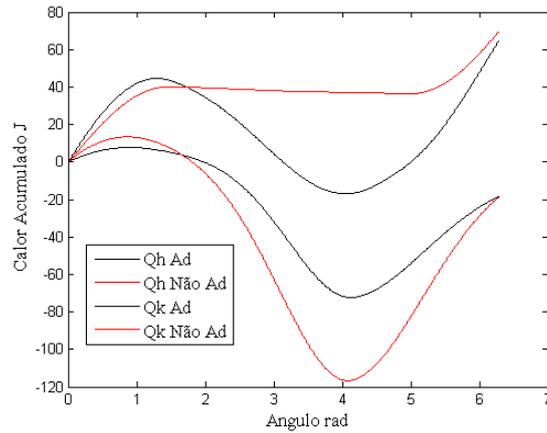


Figura 12. Troca de Energia Durante o Ciclo

Como a perda durante resfriamento perde mais calor na simulação não adiabática, a fonte de calor continua a fornecer calor a máquina para compensar essa perda. A Fig. (13) representa o calor acumulado em cada uma das câmaras de troca de calor ao longo do ciclo da simulação não adiabática

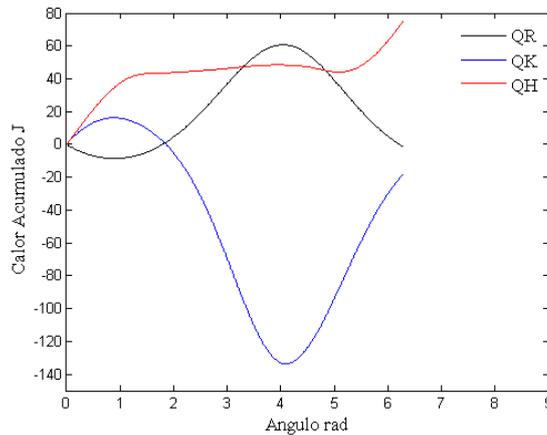


Figura 13. Calor Acumulado durante Ciclo Não Adiabático

Percebe-se que durante a perda de calor na câmara de resfriamento, a energia fornecida do regenerador para o fluido aumenta, caracterizando o processo de reciclagem. Aroaz, 2014 apresentou curvas parecidas, para sua máquina movida a hidrogênio, a 2,76 MPa e 3600 rpm, conforme gráfico da Fig. (14).

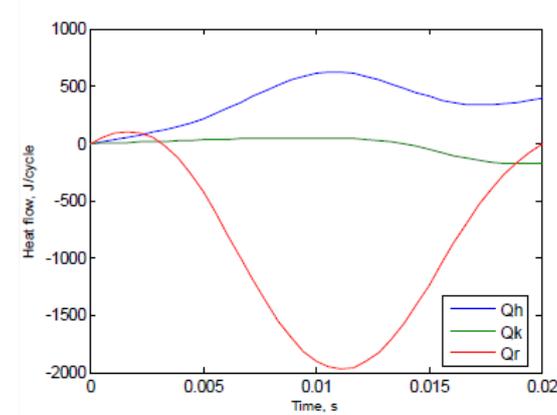


Figura 14. Calor Acumulado na Simulação de Aroaz (Aroaz, 2014)

## 5.5 Eficiência

A eficiência ( $\eta$ ) de uma máquina é determinada pela razão da energia obtida na forma de trabalho pela energia recebida na forma de calor. Para a máquina térmica considerada no presente trabalho o seguinte valor foi obtido na simulação adiabática:  $\eta_a = 72,11\%$ . A eficiência é bastante alta, mas não atinge o valor da eficiência carnot (75%) para a mesma diferença de temperatura, resultado esperado por não se tratar de uma máquina térmica totalmente reversível (primeiro princípio de carnot). Logo, a aplicação do modelo nos aproxima, mesmo que pouco, da realidade. Já a simulação não adiabática nos fornece a seguinte eficiência:  $\eta_n = 61,99\%$ .

## 5.6 Análises paramétricas

A vantagem de uma simulação numérica é a possibilidade de se alterar os parâmetros possíveis sem custos financeiros extras e poder comparar seus resultados para buscar a melhor configuração de trabalho da máquina de acordo com as possibilidades de recursos e limitações do motor.

### Diferença de temperatura

A Tabela (2) resume os resultados de saída quando se altera a temperatura da fonte quente, mantendo a temperatura de resfriamento em 300 K (26,85 °C) que é aproximadamente a temperatura de condições padrão no Brasil. A partir dos resultados percebe-se que as melhores condições de operação de um motor stirling se dão com maiores diferenças de temperatura. Com isso podemos traçar um gráfico (Fig. (15)) prevendo a eficiência simulada de acordo com a temperatura de aquecimento e ainda comparar com a eficiência carnot Eq. (6) para as mesmas temperaturas.

Tabela 2. Resultados para diferentes Th.

Th [°C]	Sim. Adiabática				Sim. Não Adiabática			
	W[J]	Qe [J]	Pmax [MPa]	$\eta$ [%]	W[J]	Qe [J]	Pmax [MPa]	$\eta$ [%]
<b>926.85</b>	46,69	64,75	1,86	72,11	46,34	74,84	1,85	61,99
<b>800</b>	41,77	60,45	1,77	69,11	41,48	69,26	1,76	59,66
<b>700</b>	37,56	56,73	1,69	66,20	37,30	64,53	1,68	57,57
<b>650</b>	35,32	54,75	1,65	64,51	35,09	62,03	1,64	56,31
<b>500</b>	28,05	48,25	1,51	58,14	27,88	53,93	1,50	51,42

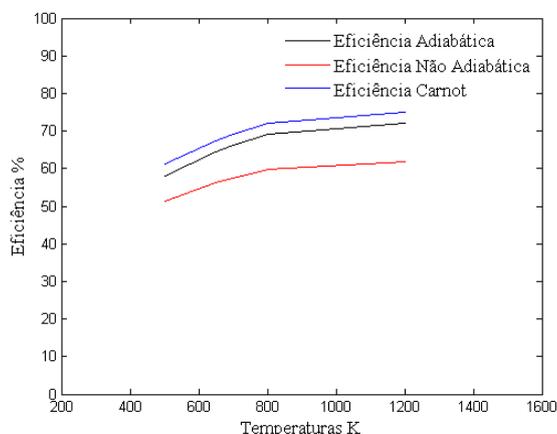


Figura 15. Comparação entre as eficiências simuladas e eficiência Carnot

Pode-se ver no gráfico da Fig. (15) que as curvas Carnot e adiabática são bem parecidas, entretanto a curva desta simulação é deslocada para baixo caracterizando as perdas em processos que não são totalmente reversíveis, enquanto a curva não adiabática é ainda mais deslocada e possui um perfil um pouco diferente quanto ao crescimento da diferença de temperatura por considerar mais processos irreversíveis (regeneração imperfeita e perda por transporte).

## 6. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento de uma modelagem adiabática para avaliação de um motor stirling. Esta modelagem foi aprimorada, estabelecendo termos de perda recorrentes na literatura: perda por transporte e por regeneração imperfeita.

Os modelos apresentados se mostraram bastante didáticos, já que demonstraram claramente os princípios da termodinâmica e como suas leis poderiam ser provadas por diferentes caminhos, que pode ser achado pela área do diagrama PV, pela área do diagrama TS e também pela diferença entre o calor recebido e perdido pelo sistema.

Com a aplicação do modelo não adiabático foi possível perceber a mudança de comportamento na pressão, temperatura e calor acumulado durante o ciclo, principalmente na câmara de expansão em que a diferença entre sua temperatura era maior que nas outras câmaras e câmara de aquecimento já que o acionamento da fonte de aquecimento também era maior.

Por fim, foi possível alterar alguns parâmetros de funcionamento do motor stirling e apresentar uma comparação entre as eficiências simuladas (adiabática e não adiabática) e a eficiência Carnot. A modelagem não adiabática previu uma eficiência menor e mais próxima da observada em motores reais.

## REFERÊNCIAS

- Abbas, M., 2008. *Thermal analysis of Stirling engine solar driven*, Revue des Energie Renouvelables, vol 11, n. 4.
- Aneel., *Informações Técnicas: Edital do Leilão de Energia de Reserva nº 8/2014 é aprovado pela Agência*. Disponível em <[http://www.aneel.gov.br/aplicações/noticias/Output\\_Noticias.cfm?Identidade=8146&id\\_area=90](http://www.aneel.gov.br/aplicações/noticias/Output_Noticias.cfm?Identidade=8146&id_area=90)>. Acesso em: 30 de setembro 2014.
- Araoz, J., et al., 2014. *Non-Ideal Stirling Engine Thermodynamic Model Suitable for the Integration into Overall Energy Systems Applied Thermal Engineering*, vol. 73, issue 1.
- Bingham, E., 1994. *The Stirling Alternative – Power systems, Refrigerants and Heat Pumps*. Gordon and Breach Science Publishers. Alberta - Canada.
- Chen, N., 1983. *A Review of Stirling Engine Mathematical Models*. U.S. Department of Energy. Oak Ridge National Laboratory, Tennessee.
- Cheng, C., 2011. Optimization of geometrical parameters for Stirling engines based on theoretical analysis, *Applied Energy Journal*, ELSEVIER.
- Csp world., Disponível em: <<http://www.cspworld.org/cspworldmap/e-cube-energy-dish-pilot-plant>>. Acesso em 24 nov 2015.
- Çengel, Y., 2006. *Thermodynamics: An Engineering Approach. Fifth Edition*. McGraw Hill.
- EPE - Empresa de Pesquisa Energética., 2014. Nota Técnica DEA 13/14: Demanda de Energia 2050. Ministério de Minas e Energia .Rio de Janeiro.
- EPE - Empresa de Pesquisa Energética., 2015. *2º Leilão de Energia de Reserva viabiliza investimento de R\$ 6,8 bi*. Rio de Janeiro.

- EPE EPE - Empresa de Pesquisa Energética., 2012. *Análise da Inserção da Geração Solar na Matriz Elétrica Brasileira*. Nota Técnica. Ministério de Minas e Energia. Rio de Janeiro.
- Hinrichs, R. A., Kleinbach, M., & Reis, L. B., 2020. *Energia e Meio Ambiente*, Tradução da 4a edição americana. Cengage Learning.
- Martini, W. R., 1983. *Stirling Engine Design Manual*. Second Edition. NASA.
- Nrel, *Concentrating Solar Power Projects*. Disponível em: <[http://www.nrel.gov/csp/solarpaces/project\\_detail.cfm/projectID=58](http://www.nrel.gov/csp/solarpaces/project_detail.cfm/projectID=58)>. Acesso em: 1 de outubro 2014.
- Özbay, S., 2011. *Thermal Analysis of Stirling Cycle Regenerators*. Master of Science in Mechanical Engineering Thesis, Middle East Technical University.
- Ruggiero, M. A. G., 2000. *CÁLCULO NUMÉRICO – Aspectos Teóricos e Computacionais*. Departamento de Matemática Aplicada – IMECC – UNICAMP, Ed. 2. Editora Pearson. São Paulo.
- Santos, M. R. C., 2012. *Estudo de um sistema de cogeração com motor Stirling e concentrador solar*. Relatório de projeto final em Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia. Universidade do Porto.
- Snyman, H., et al., 2008. Design Analysis Methods for Stirling Engines. *Journal of Energy in Southern Africa*, vol. 19, n. 3.
- Stine, W., 2001. *Power From The Sun*. Disponível em: <<http://www.powerfromthesun.net/book.html>>. Acesso em 16 de outubro 2014.
- Škorpík., 2012. *Energy Balance of Stirling Engine Cycle*, Disponível em: <[http://www.transformacni-technologie.cz/en\\_energeticka-bilance-obehu-stirlingova-motoru.html](http://www.transformacni-technologie.cz/en_energeticka-bilance-obehu-stirlingova-motoru.html)>. Acesso em 10 de novembro 2014.
- Tew, R., et al., 1978. *A Stirling Engine Computer Model for Performance Calculation*, U.S. Department of Energy.
- Tlili, I., & Musmar, S. A., 2013. *Thermodynamic evaluation of a second order simulation for Yoke Ross Stirling Engine*. Energy Conversion and Management, Elsevier, vol. 68.
- Uss., *The Solar Dish, United Sun Systems*, Disponível em <<http://www.unitedsunsystems.com/the-solar-dish/>>. Acesso em: 25/10/2015.
- Ziabasharhagh, M., 2012. Numerical Solution of Beta-type Stirling Engine by Optimizing Heat Regenerator for Increasing Output Power and Efficiency. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*.