



## **ANÁLISE ESTRUTURAL DE PLACAS: MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA AS TEORIAS DE REISSNER-MINDLIN E KIRCHHOFF**

**Pablo Giovanni Silva Carvalho**

pablogscarvalho@gmail.com

Aluno de mestrado em Engenharia Civil

Laboratório de Mecânica Computacional - LabMeC

Faculdade de Engenharia Civil, Unicamp

Campinas-SP, Brasil

**Resumo.** *O presente trabalho tem como foco a análise estrutural de um modelo de placa submetido a um carregamento externo hipotético. O modelo em questão será desenvolvido por meio de uma simulação computacional baseado no algoritmo do Método dos Elementos Finitos. Será proposta a comparação de duas teorias de placas: a teoria clássica de Kirchhoff e a teoria de Reissner-Mindlin. E com o intuito de possibilitar a simulação numérica e a análise gráfica dos resultados para o problema proposto, com condições de contorno de determinadas tensões e deformações, será empregado um ambiente para programação orientada a objetos (POO). Resultados obtidos para as aproximações numéricas das duas teorias serão comparados e validados pela solução analítica. Também serão discutidas as influências das deformações cisalhantes e algumas técnicas para mitigar os efeitos de travamento (shear-locking effects) no modelo deformado.*

**Palavras-chave:** *Placas. Reissner-Mindlin. Shear-locking. POO.*

## 1 INTRODUÇÃO

Placas são elementos estruturais que possuem grandes dimensões em um determinado plano e uma espessura com dimensão relativamente pequena. O estudo da flexão de placas depende principalmente desta espessura. De acordo com Reddy (2006), para placas com espessuras pequenas em relação às outras dimensões, geralmente não é necessário realizar modelos tri-dimensionais de equações de elasticidade. Teorias bi-dimensionais têm sido amplamente utilizadas para os estudos de tensões e deformações de placas.

Para o estudo de placas proposto nesse trabalho, serão consideradas e analisadas duas teorias. A primeira delas é a extensão para placas da teoria de vigas de Euler-Bernoulli e é conhecida como teoria de Kirchhoff ou teoria clássica de placas. Além desta, o estudo contemplará uma teoria posterior, desenvolvida por Reissner-Mindlin, a qual considera as deformações por cisalhamento ao longo da espessura da placa.

Ao analisar o comportamento das placas (tensões e deformações) quando estas são submetidas a carregamentos diversos, muitas vezes, as teorias de placas propostas resultam em equações diferenciais com soluções não triviais, dependendo do carregamento imposto sobre a placa. Para a resolução desse problema, soluções baseadas em séries trigonométricas foram desenvolvidas por Navier-Stokes, em 1820, e posteriormente por Lévy em 1899 (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959).

Com o desenvolvimento da informática, principalmente a partir da década de sessenta, a utilização de formulações baseadas no método dos elementos finitos se tornou crescente para o tratamento de problemas de Engenharia Civil antes considerados como de grande complexidades. Nesse contexto, facilitou-se a análise do comportamento de estruturas para diferentes tipos de materiais, possibilitando construí-las cada vez mais esbeltas, e conseqüentemente, promovendo uma economia de materiais sem comprometer a segurança.

De acordo com Becker (1981), por meio do método dos elementos finitos, é possível construir soluções aproximadas para equações diferenciais providas de uma condição de contorno, dividindo o domínio da solução em um número finito de subdomínios. O método de Galerkin é introduzido com objetivo de encontrar soluções aproximadas em um subespaço de dimensão finita, resultado da discretização do domínio. Nesse sentido, o método dos elementos finitos fornece uma técnica geral e sistemática para a construção de funções-bases, as quais são necessárias para modelar as soluções dos problemas de contorno, aproximadas utilizando o método de Galerkin.

Portanto, como objetivo deste estudo, será proposta uma abordagem que verifica as teorias de placas citadas por meio de simulações numéricas realizadas em ambiente computacional. Para a análise da teoria clássica de placas (Kirchhoff) serão feitas simulações numéricas utilizando o *software Mathematica* e para a teoria de Reisser-Mindlin, será implementado um código computacional no ambiente de programação orientada a objetos denominado PZ (DEVLOO, 1997).

## 2 Fundamentação teórica

Neste capítulo, serão apresentadas duas abordagens teóricas para o estudo do comportamento de placas submetidas a carregamentos variados. Essas teorias são formuladas a partir de

duas hipóteses cinemáticas diferentes. Enquanto que na hipótese de Kirchhoff existe uma restrição que considera as deformações transversais provocadas pelas tensões cisalhantes nulas e os respectivos giros nessas direções igualmente nulos; a teoria de Reissner-Mindlin apresenta, por outro lado, uma extensão à teoria clássica de placas, eliminando a restrição de normalidade de uma linha transversal à placa em relação à superfície indeformada e à configuração deformada.

## 2.1 Teoria de Kirchhoff para placas

De acordo com Reddy (2006), a teoria clássica de placas é baseada na hipótese de Kirchhoff, a qual é dividida em três partes:

- 1 - As linhas transversais à superfície indeformada permanecem perpendiculares a uma superfície média após a deformação da placa.
- 2 - Não há deformação no plano médio da placa, o qual permanece plano após a flexão.
- 3 - A tensão normal transversal ( $\sigma_z$ ) pode ser desprezada.

O processo de deformação de uma placa segundo a hipótese de Kirchhoff está esquematizado na Figura 1 abaixo. O deslocamento de um ponto da placa para suas três dimensões é dado pela expressão 1. Para o desenvolvimento dos cálculos dos esforços, utilizaremos a convenção da mão esquerda.

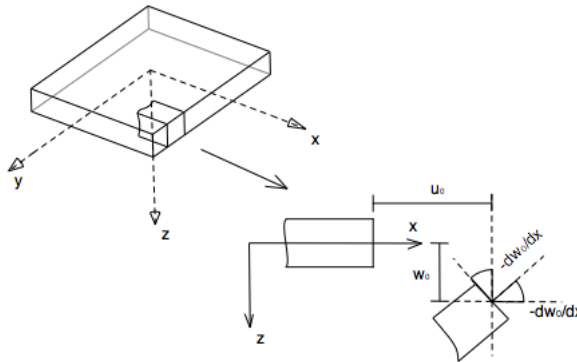


Figura 1: Esquema da deformação de uma placa, seguindo a hipótese de Kirchhoff

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \hat{\theta}_x \\ -z \cdot \hat{\theta}_y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{bmatrix} \quad (1)$$

A partir dos valores dos deslocamentos nas três direções, conseguimos construir a matriz 3x3 do Jacobiano desse deslocamento, conforme a expressão 2:

$$J = \frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Pela teoria dos pequenos deslocamentos e deformações, o tensor das deformações  $\epsilon$  pode ser obtido pela soma da matriz jacobiana com sua transposta, o resultado é dividido por 2, conforme expressão 3. Esse resultado pode ser expresso em um vetor (expressão 4), onde as componente são os valores das deformações  $\epsilon$  e das distorções  $\gamma$ :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot (J + J^T) = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Para a teoria de Kirchhoff, obtemos o tensor  $\vec{T}$  das tensões normais e de cisalhamento pela expressão 5, sendo ele apresentado em um campo vetorial bidimensional, cujas bases são  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$ .

$$\vec{T} = \sigma_x \cdot \vec{e}_x + \sigma_y \cdot \vec{e}_y + \tau_{xy} \cdot \vec{e}_y \quad (5)$$

E para o cálculo dos esforços na placa, seguindo as hipóteses de Kirchhoff, são consideradas as tensões dadas pelas expressões 6 a 11:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (6) \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (9)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (7) \quad \sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (10)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (8) \quad \sigma_z = 0 \quad (11)$$

Substituindo os valores das deformações e distorções apresentados na expressão 4 nas expressões das tensões, obtemos as seguintes formulações para o calculo dos esforços na placa:

$$M_x = -D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (12)$$

$$M_y = -D \left[ \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (13)$$

$$M_{xy} = -G \frac{t^3}{12} \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (14)$$

As seguintes notações são adotadas:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad D = \frac{E.t^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (15)$$

Sendo  $G$ , o módulo de cisalhamento do material da placa.

## 2.2 Teoria de Reissner-Mindlin para placas

A teoria de Reissner-Mindlin modifica a hipótese de Kirchhoff no que diz respeito à ortogonalidade das linhas transversais em relação ao plano da placa. Nesse caso, as linhas normais ao plano da placa não permanecem ortogonais após sua deformação, pois é agora considerada a influência das deformações de cisalhamento transversais.

De acordo com Oñate (2013), a teoria de Reissner-Mindlin apresenta vantagens em relação à teoria de Kirchhoff na aplicação do método dos elementos finitos. Enquanto que pela teoria de Kirchhoff, existe grande dificuldade para encontrar funções de forma que satisfaçam as condições de continuidade requeridas pelas flechas e rotações dos elementos; pela teoria de Reissner-Mindlin, as restrições são reduzidas, permitindo a utilização de funções de forma de classe  $C^0$ , o que elimina os efeitos de não-conformidade.

Contudo, de acordo com Shessarenko (1997), a teoria de Reissner-Mindlin pode ocasionar dificuldades numéricas na análise de placas muito finas, gerando soluções muito rígidas pela influência excessiva dos termos de força cortante. Na literatura, esse efeito é conhecido como "efeito de bloqueio" ou *shear-locking*. Para a resolução desse problema, aplica-se técnicas de integração reduzida ou utiliza-se funções de interpolação de ordens maiores que três.

A Figura 2 esquematiza a teoria, indicando a rotação  $\phi$  devida à deformação da placa. A mesma convenção de sinais utilizada para a teoria clássica de placas será adotada agora.

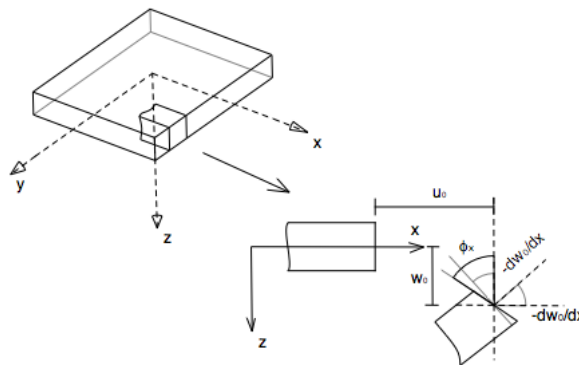


Figura 2: Esquema da deformação de uma placa, seguindo a hipótese de Reissner-Mindlin

Os deslocamentos são obtidos pelas expressão 16 e o Jacobiano desses deslocamentos é apresentado na expressão 17.

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \hat{\theta}_x \\ -z \cdot \hat{\theta}_y \\ w \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$J = \frac{\partial(u_x, u_y, u_z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} & -\theta_x \\ -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & -\theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Pela teoria dos pequenos deslocamentos e deformações, o tensor das deformações  $\epsilon$ , seguindo a teoria de Reissner-Mindlin, pode ser obtido pela soma da matriz jacobiana com sua transposta, o resultado é dividido por 2, conforme expressão 18. Esse resultado pode ser expresso em um vetor (expressão 19), onde as componente são os valores das deformações  $\epsilon$  e das distorções  $\gamma$ :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot (J + J^T) = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & -\frac{z}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\ -\frac{z}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) & -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ -z \cdot \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Para a teoria de Reissner-Mindlin, obtemos o tensor  $\vec{T}$  das tensões normais e de cisalhamento pela expressão 5, sendo ele apresentado em um campo vetorial bidimensional, cujas bases são  $\vec{e}_x$  e  $\vec{e}_y$ .

$$\vec{T} = \sigma_x \cdot \vec{e}_x + \sigma_y \cdot \vec{e}_y + \tau_{yz} \cdot \vec{e}_z + \tau_{xz} \cdot \vec{e}_z + \tau_{xy} \cdot \vec{e}_y \quad (20)$$

E para o cálculo dos esforços na placa, agora seguindo a teoria de Reissner-Mindlin, são consideradas as tensões dadas pelas expressões 21 a 26. Para o cálculo, será considerado o coeficiente de distorção transversal  $\alpha$ , obtido por meio de formulações energéticas. Em placas de espessura constante e material homogêneo, o valor de  $\alpha$  é igual à 5/6 (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (21)$$

$$\tau_{xz} = \alpha G\gamma_{xz} \quad (22)$$

$$\tau_{yz} = \alpha G\gamma_{yz} \quad (23)$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (24)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (25)$$

$$\sigma_z = 0 \quad (26)$$

As expressões dos esforços solicitantes, apresentadas a seguir, foram obtidas para uma placa de dimensão  $t$ , e com campo de tensões apresentado em 21-26.

$$V_x = \alpha.t.G. \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \quad (27)$$

$$V_y = \alpha.t.G. \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \quad (28)$$

$$M_x = -D \left[ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \nu \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] \quad (29)$$

$$M_y = -D \left[ \nu \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \right] \quad (30)$$

$$M_{xy} = D \frac{1 - \nu}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (31)$$

### 3 Estudo de uma placa retangular simplesmente apoiada

Trataremos o problema de uma placa retangular de dimensões  $a$  e  $b$ , respectivamente na direção dos eixos  $x$  e  $y$ . A placa é considerada simplesmente apoiada nas quatro bordas. A placa será submetida ao carregamento distribuído sinusoidal expresso em 32.

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (32)$$

$$w = 0 \quad e \quad M_x = 0, \quad \text{para} \quad x = -\frac{a}{2}, \quad x = \frac{a}{2} \quad (33)$$

$$w = 0 \quad e \quad M_y = 0, \quad \text{para} \quad y = -\frac{b}{2}, \quad y = \frac{b}{2} \quad (34)$$

### 3.1 Equilíbrio do sistema

A primeira etapa para a resolução do problema é realizar o cálculo do equilíbrio do sistema. Assim será possível encontrar as equações diferenciais que descrevem o deslocamentos na placa, tanto para o método de Kirchhoff, quanto para Reissner-Mindlin. O equilíbrio do sistema está esquematizado na Figura 3.

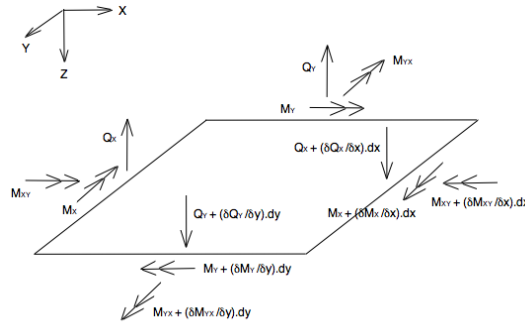


Figura 3: Equilíbrio de um elemento infinitesimal da placa

$$\sum F_{Vx} = 0 \quad \frac{dQ_x}{dx} + \frac{dQ_y}{dy} = -q \quad (35)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \frac{dM_x}{dx} + \frac{dM_{yx}}{dy} - Q_x = 0 \quad (36)$$

$$\sum M_y = 0 \quad \frac{dM_y}{dy} + \frac{dM_{xy}}{dx} - Q_y = 0 \quad (37)$$

### 3.2 Análise do problema pela teoria de Kirchhoff

A partir das equações de equilíbrio 35 a 37, obtemos a equação 38.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + q = 0 \quad (38)$$

Substituindo as expressões 12 a 16 na equação 38, obtemos a equação diferencial que descreve o deslocamento pela hipótese de Kirchhoff:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (39)$$

O carregamento  $q$  (expressão 32) foi escolhido de tal maneira que seja possível chegar a uma solução analítica para a equação diferencial enunciada e em seguida compara-la com resultados obtidos pelos métodos numéricos. O deslocamento na direção  $z$  tem como forma a expressão abaixo.



$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (40)$$

Substituindo a expressão acima na equação diferencial que descreve o deslocamento vertical pela teoria de Kirchhoff, é obtida a solução analítica do deslocamento vertical 41.

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \quad (41)$$

### Solução por Navier-Stokes

A solução analítica acima pode ser confirmada seguindo a formulação de Navier-Stokes Timoshenko (1959), onde o deslocamento provocado por uma carga  $f(x, y)$  é descrito por uma série trigonométrica cuja formulação está descrita logo abaixo:

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (42)$$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (43)$$

Para o caso estudado,  $f(x,y)=q$  e  $m=n=1$  (conforme expressão 32). Desenvolvendo a formulação para o carregamento considerado, verificamos que:  $a_{mn} = q_0$  e  $w$  pode ser obtido pela expressão 32.

### Solução pelo Método dos Elementos finitos

A expressão 41 pode ser escrito como o laplaciano ao quadrado do deslocamento vertical:

$$\Delta^2 w = f, \quad \text{onde} \quad f = \frac{q}{D} \quad (44)$$

Considerando um domínio  $\Omega \subset R^2$ , sendo  $d\mathbf{x} = dx dy$ .

De acordo com Becker (1981), construímos a formulação variacional do problema considerando uma função teste  $v$ , que é qualquer função de  $\mathbf{x}$  apropriada ao domínio, de tal modo que a integração abaixo faça sentido.

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 w) v d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v d\mathbf{x} \quad (45)$$

Em seguida, aplicamos o teorema da divergência e as condições de contorno. Obtemos a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} (\Delta^2 w) \cdot v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \Delta w \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\Omega} \Delta w \Delta v d\mathbf{x} \quad (46)$$

Para as condições de contorno do problema estudado (placa simplesmente apoiada nas bordas), o termo correspondente ao contorno vale zero:

$$\int_{\partial\Omega} \left( v \frac{\partial \Delta w}{\partial n} - \Delta w \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (47)$$

Com isso conseguimos descrever o problema variacional (formulação fraca) envolvido, ou seja:

Encontrar uma função  $w$ , definida no espaço  $H$ , tal que:

$$\int_{\Omega} \Delta w \Delta v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in H \quad (48)$$

Com  $H = H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \mid v = 0, \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$ .

### Aproximação de Galerkin

Procura-se agora uma solução aproximada:

$$w_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (49)$$

Onde  $\phi_j$  são funções base, linearmente independentes, do espaço  $H^h$ .

A formulação variacional do problema de aproximação está em encontrar  $w_h \in H^h$ .

$$\int_{\Omega} \Delta w_h \Delta v_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v_h \, d\mathbf{x} \quad \forall v_h \in H^h \quad (50)$$

Deste modo, as funções  $v_h$  também poderão ser escritas como combinações lineares das funções base,  $\phi_j$ , do espaço  $H^h$ .

O problema acima é equivalente a resolver o sistema linear:

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \alpha_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (51)$$

A matriz de carga  $K_{ij}$  e o vetor de carga  $F_i$  estão descritos abaixo:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \Delta \phi_i(\mathbf{x}) \Delta \phi_j(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad F_i = \int_{\Omega} f \phi_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (52)$$

### 3.3 Análise do problema pela teoria de Reissner-Mindlin

Substituindo as expressões 27 a 31, relativas aos esforços, nas expressões do equilíbrio do sistema 35 a 37, obtemos um sistema com três equações diferenciais:

$$-D \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) - \alpha.t.G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) = 0 \quad (53)$$

$$-D \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} \right) - \alpha.t.G \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) = 0 \quad (54)$$

$$\alpha.t.G \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) - q = 0 \quad (55)$$

#### Solução pelo Método dos Elementos finitos

A partir das equações do equilíbrio do sistema 35 a 37, pretendemos construir a formulação variacional do problema. Agora, será preciso considerar três funções testes ( $v_1, v_2, v_3$ ) que sejam apropriadas ao domínio do problema, e possibilitem as integrações abaixo. As parcelas dos momentos foram integradas por parte para que haja simetria na matriz de rigidez do problema.

$$- \int_{\Omega} M_x \frac{\partial v_1}{\partial x} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial v_1}{\partial y} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} Q_x v_1 d\mathbf{x} = 0 \quad (56)$$

$$- \int_{\Omega} M_y \frac{\partial v_2}{\partial y} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} M_{xy} \frac{\partial v_2}{\partial x} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} Q_y v_2 d\mathbf{x} = 0 \quad (57)$$

$$\int_{\Omega} Q_x \frac{\partial v_3}{\partial x} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} Q_y \frac{\partial v_3}{\partial y} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q v_3 d\mathbf{x} = 0 \quad (58)$$

Substituindo as expressões 27 a 31, relativas aos esforços, obtemos a formulação variacional do problema:

Encontrar  $w, \theta_x, \theta_y$  pertencentes ao espaço H e que satisfaçam o sistema de equações 59-61 para  $\forall v_i \in H, i = 1, 2, 3$  e  $H = H_0^2(\Omega)$ .

$$D \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \frac{\partial v_1}{\partial x} d\mathbf{x} - D \frac{1-\nu}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \frac{\partial v_1}{\partial y} d\mathbf{x} + \alpha.t.G \int_{\Omega} \left( \theta_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) v_1 d\mathbf{x} = 0 \quad (59)$$

$$D \int_{\Omega} \left( \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \frac{\partial v_2}{\partial y} d\mathbf{x} - D \frac{1-\nu}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \frac{\partial v_2}{\partial x} d\mathbf{x} + \alpha.t.G \int_{\Omega} \left( \theta_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) v_2 d\mathbf{x} = 0 \quad (60)$$

$$\alpha.t.G \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \frac{\partial v_3}{\partial x} d\mathbf{x} + \alpha.t.G \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \frac{\partial v_3}{\partial y} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} qv_3 d\mathbf{x} \quad (61)$$

### Aproximação de Galerkin

Procura-se agora soluções aproximadas para as variáveis do problema. Com esse objetivo, escrevemos  $w, \theta_x, \theta_y$  como combinações lineares das funções base  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , conforme expressões abaixo:

$$\theta_x(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_{1j} \phi_{1j}(\mathbf{x}) \quad (62)$$

$$\theta_y(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_{2j} \phi_{2j}(\mathbf{x}) \quad (63)$$

$$w_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_{3j} \phi_{3j}(\mathbf{x}) \quad (64)$$

Dessa maneira, os elementos da matriz de rigidez  $K_{ij}$  e do vetor de cargas  $F_{i1}$  podem ser escritos:

$$K_{11} = D \int_{\Omega} \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} d\mathbf{x} - \left( \frac{1-\nu}{2} \right) D \int_{\Omega} \frac{d\phi_1}{dy} \frac{d\phi_1}{dy} d\mathbf{x} + \alpha.t.G \int_{\Omega} \phi_1 \phi_1 d\mathbf{x} \quad (65)$$

$$K_{12} = D \int_{\Omega} \nu \frac{d\phi_2}{dy} \frac{d\phi_1}{dx} d\mathbf{x} - \left( \frac{1-\nu}{2} \right) D \int_{\Omega} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_1}{dy} d\mathbf{x} \quad (66)$$

$$K_{13} = -\alpha.t.G \int_{\Omega} \frac{d\phi_3}{dx} \phi_1 d\mathbf{x} \quad (67)$$

$$K_{21} = D \int_{\Omega} \nu \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_2}{dy} d\mathbf{x} - \left( \frac{1-\nu}{2} \right) D \int_{\Omega} \frac{d\phi_1}{dy} \frac{d\phi_2}{dx} d\mathbf{x} \quad (68)$$

$$K_{22} = D \int_{\Omega} \frac{d\phi_2}{dy} \frac{d\phi_2}{dy} d\mathbf{x} - \left( \frac{1-\nu}{2} \right) D \int_{\Omega} \frac{d\phi_2}{dx} \frac{d\phi_2}{dx} d\mathbf{x} + \alpha.t.G \int_{\Omega} \phi_2 \phi_2 d\mathbf{x} \quad (69)$$

$$K_{23} = -\alpha.t.G \int_{\Omega} \frac{d\phi_3}{dy} \phi_2 d\mathbf{x} \quad (70)$$

$$K_{31} = -\alpha.t.G \int_{\Omega} \phi_1 \frac{d\phi_3}{dx} d\mathbf{x} \quad (71)$$

$$K_{32} = -\alpha.t.G \int_{\Omega} \phi_2 \frac{d\phi_3}{dy} d\mathbf{x} \quad (72)$$

$$K_{33} = \alpha.t.G \int_{\Omega} \left( \frac{d\phi_3}{dx} \frac{d\phi_3}{dx} + \frac{d\phi_3}{dy} \frac{d\phi_3}{dy} \right) d\mathbf{x} \quad (73)$$

$$F_{11} = F_{21} = 0 \quad (74)$$

$$F_{31} = \alpha.t.G \int_{\Omega} q\phi_3 d\mathbf{x} \quad (75)$$

### Ambiente PZ

Para a realização das análises dos esforços e deslocamentos da placa pela teoria de Reissner-Mindlin foi utilizado o ambiente computacional PZ, que se trata de um recurso de programação orientada à objetos, utilizando linguagem C++. No ambiente PZ, um conjunto de "classes", métodos e rotinas são utilizados para a simulação numérica de diversos problemas físicos pelo o Método dos Elementos Finitos (DEVLOO, 1997).

Para a resolução do problema, foi necessário implementar a malha geométrica e computacional da placa por meio de "classes", as quais armazenaram as informações relativas às coordenadas de cada nó para cada elemento considerado na divisão da placa. Na malha computacional é definido o espaço de interpolação. Nas "classes do material", são definidas as características dos materiais, a equação diferencial envolvida e as condições de contorno. Em seguida, essas informações são reunidas para a montagem da matriz de rigidez, com as funções de forma previamente definidas. Finalmente, são utilizadas classes para pós-processamento e visualização dos resultados. Para a visualização gráfica, foi utilizado o software *Paraview*.

## 4 Resultados e análise

Para uma determinada placa simplesmente apoiada e com dimensões definidas, foram realizadas simulações numéricas computacionais utilizando as teorias apresentadas no capítulo 2. Na realização de testes envolvendo a teoria de Kirchhoff, os resultados foram obtidos pelo software *Mathematica*. Em relação ao estudo da teoria de Reissner-Mindlin, os gráficos obtidos pelo software *Paraview* foram previamente gerados por meio de programação orientada à objetos no ambiente PZ.

### 4.1 Dados do problema

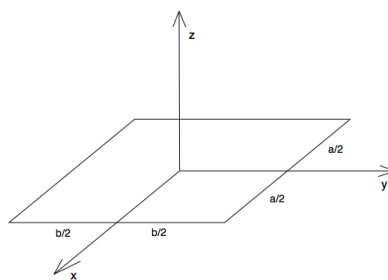


Figura 4: Orientação dos eixos utilizada no programa *Mathematica*

Dimensões da placa:  $a = 5,0m$ ,  $b = 6,0m$ ,  $h(\text{espessura}) = 0,1m$ .

Modulo de Elasticidade (Young):  $E = 2,0 \cdot 10^7 Pa$ .

Coefficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ .

Carregamento:  $q = q_0 \text{sen} \frac{\pi x}{a} \text{sen} \frac{\pi y}{b}$  onde  $q_0 = -5,0 \frac{kN}{m}$ .

## 4.2 Análise dos resultados (teoria de Kirchhoff)

### Solução analítica

A solução analítica do deslocamento, descrita pela expressão 41, pode ser verificada graficamente por meio da Figura 5. Substituindo a expressão do deslocamento nas expressões 12 a 16, obtemos as representações gráficas dos esforços na placa, ou seja, os momentos nas direções  $x$  e  $y$ , e o momento  $xy$ , respectivamente apresentados nas Figuras 6-8.

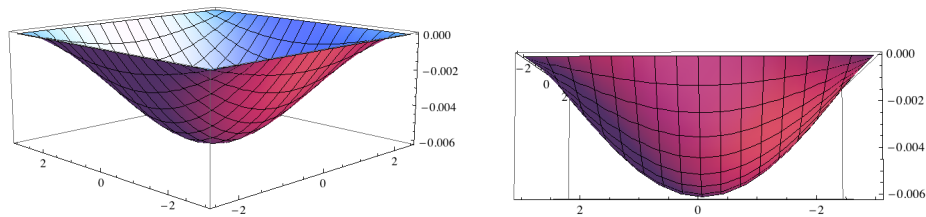


Figura 5: Deslocamento de placa simplesmente apoiada na direção  $z$  [m], utilizando a solução analítica.

O deslocamento máximo na direção  $z$  é 0,00610082m.

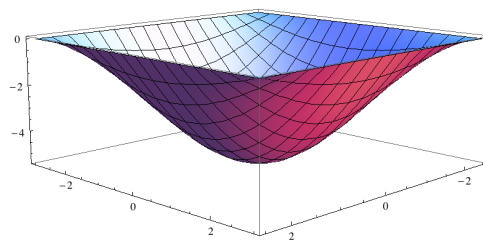


Figura 6: Momento em  $x$  [kN.m], utilizando a solução analítica .

O momento máximo em  $x$   $M_x(\text{máx.})$  é igual a 5.33019 kN.m (considerando a convenção onde o momento é positivo quando há tração nas fibras inferiores da placa).

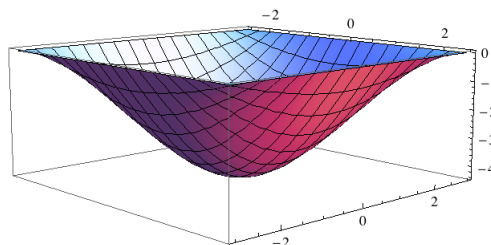


Figura 7: Momento em  $y$  [kN.m], utilizando a solução analítica .

O momento máximo em  $y$   $M_y(\text{máx.})$  é igual a 4.38668 kN.m, (considerando convenção onde o momento é positivo quando há tração nas fibras inferiores da placa).

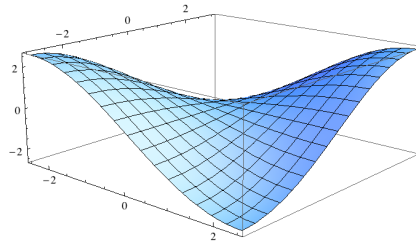


Figura 8: Momento xy [kN.m], utilizando a solução analítica .

### Aproximações numéricas utilizando Elementos Finitos

A aproximação pelo Método dos Elementos Finitos foi feita utilizando funções de forma polinomiais cuja expressão geral é apresentada logo abaixo:

$$\phi = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right)\left(y + \frac{b}{2}\right)x^i y^j \quad (76)$$

Sendo  $i$  e  $j$  as ordens polinomiais escolhidas para a aproximação do problema. Nesse estudo serão estudadas duas variações para as ordens polinomiais do problema. No primeiro caso, construiremos polinômios cujas ordens variam de 0 a 2; e no segundo caso, com ordem variando de 0 a 3. Apresentaremos o procedimento de cálculo detalhado para o primeiro caso; no segundo, indicaremos apenas os resultados obtidos.

Verificação para ordens polinomiais  $i$ , de 0 a 2, e  $j$ , de 0 a 2.

Após isso, é feito o cálculo do laplaciano ( $\Delta\phi$ ) das funções base obtidas em 76.

A matriz de rigidez ( $K$ ) e o vetor de carga ( $F$ ) são calculados de acordo com a expressão 52. Para a obtenção dos deslocamentos na direção  $y$ , utilizamos a expressão 77 que multiplica as funções de forma pelos coeficientes  $\alpha$  da interpolação . Os resultados obtidos são apresentados na Figura 9.

$$w_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(\mathbf{x}) \quad (77)$$

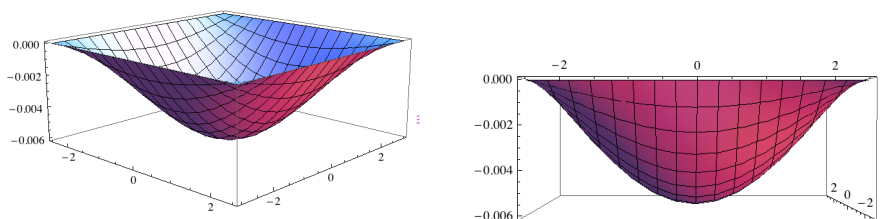


Figura 9: Deslocamento de placa simplesmente apoiada na direção z [m], pela teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de interpolação  $i,j$  de 0 a 2.

O deslocamento máximo está localizado no centro da placa e seu valor é -0.00606681m.

O gráfico da Figura 10 imprime a diferença entre o resultado do deslocamento em  $z$  obtido pela solução analítica (Figura 5) e aquele obtido pela aproximação (Figura 9).

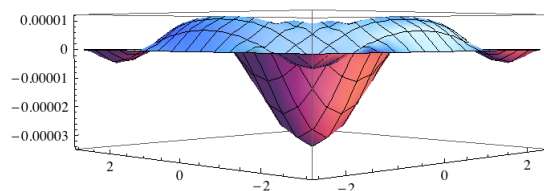


Figura 10: Diferença entre deslocamentos obtidos analiticamente e pelo método dos elementos finitos utilizando a teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de interpolação  $i,j$  de 0 a 2.

A diferença máxima apresentada ocorre no centro da placa e seu valor é  $-0.00003401\text{m}$ . A diferença relativa ao deslocamento obtido analiticamente é de  $0,56\%$ .

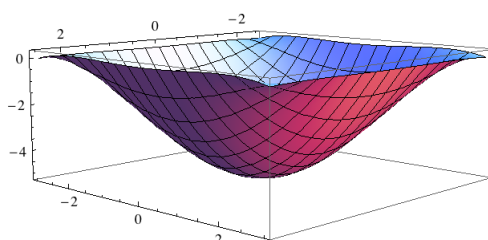


Figura 11: Momento em x [kN.m], pela teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de 0 a 2.

O momento máximo em x  $M_x(\text{máx.})$  é igual a  $5.18395\text{ kN.m}$  (considerando a convenção onde o momento é positivo quando há tração nas fibras inferiores da placa).

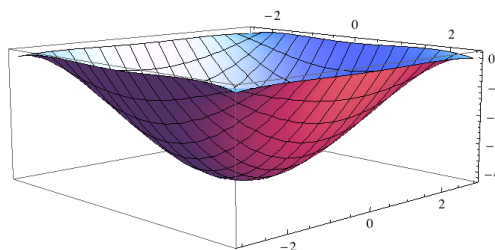


Figura 12: Momento em y [kN.m], pela teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de 0 a 2.

O momento máximo em y  $M_y(\text{máx.})$  é igual a  $4.26652\text{ kN.m}$ , (considerando convenção onde o momento é positivo quando há tração nas fibras inferiores da placa).

A Figura 13 apresenta o gráfico do momento  $xy$  da placa.

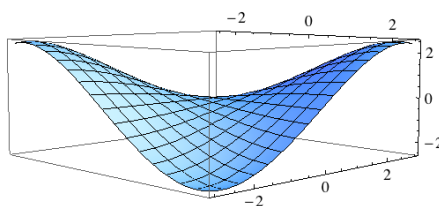
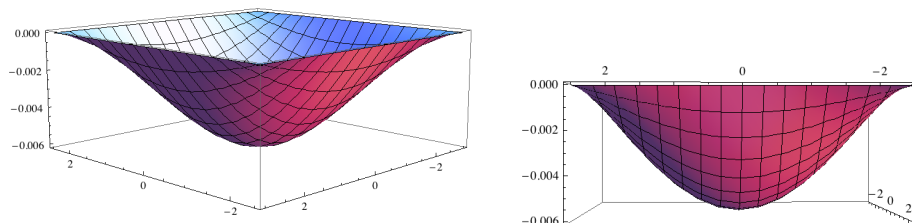


Figura 13: Momento  $xy$  [kN.m], pela teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de 0 a 2.



Verificação para ordens polinomiais  $i$ , de 0 a 3, e  $j$ , de 0 a 3.

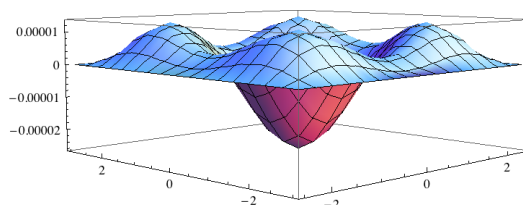
O processo descrito na última seção foi repetido para uma ordem polinomial superior. Foram consideradas dezesseis funções base com os índices do polinômios de interpolação da equação 76 variando entre 0 e 3.



**Figura 14:** Deslocamento de placa simplesmente apoiada na direção  $z$  [m], pela teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de interpolação  $i,j$  de 0 a 3. .

O deslocamento máximo está localizado no centro da placa e seu valor é  $-0.00607491\text{m}$

O gráfico da Figura 15 imprime a diferença entre o resultado do deslocamento em  $z$  obtido pela solução analítica (Figura 5) e aquele obtido pela aproximação (Figura 14).



**Figura 15:** Diferença entre deslocamentos obtidos analiticamente e pelo método dos elementos finitos utilizando a teoria de Kirchhoff e ordem polinomial de interpolação  $i,j$  de 0 a 3.

A diferença máxima apresentada ocorre no centro da placa e seu valor é  $-0.00002591\text{m}$ . A diferença relativa ao deslocamento obtido analiticamente é de 0,42%.

Para a aproximação considerada, os momentos máximos obtidos foram:  $M_x(\text{máx.}) = 5.21959\text{kN.m}$  e  $M_y(\text{máx.}) = 4.29688\text{kN.m}$ .

### 4.3 Análise dos resultados (teoria de Reissner-Mindlin)

O estudo do comportamento da placa pela teoria de Reissner-Mindlin e utilizando o ambiente computacional PZ foi feito para dois refinamentos de malha. O primeiro caso analisa a placa dividindo o espaço de aproximação em cinco elementos (sendo  $n_{el}$ , o número de elementos) e considera ordem de interpolação polinomial igual a 3 (sendo  $p_{ordem}$ , a ordem polinomial). No segundo caso,  $n_{el} = 9$  e  $p_{ordem} = 5$ .

A utilização do programa PZ se fez necessária para a otimização do tempo de processamento da resolução do sistema de equações diferenciais (expressões 59-61) para ordens polinomiais superiores a três. As ordens de aproximação foram estudadas para evitar a ocorrência do travamento do sistema ou *shear locking*.

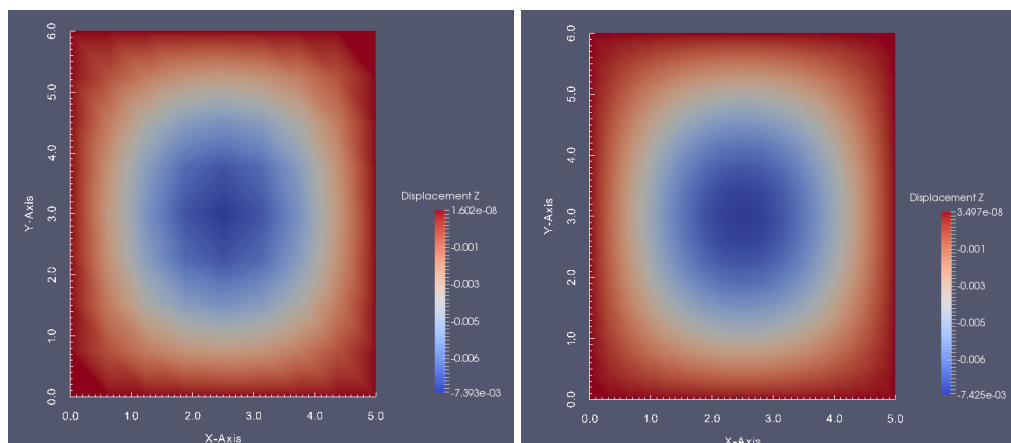


Figura 16: Deslocamento de placa simplesmente apoiada na direção z [m], pela teoria de Reissner-Mindlin. Esquerda:  $n_{el} = 5$  e  $p_{ordem} = 3$ . Direita:  $n_{el} = 9$  e  $p_{ordem} = 5$ .

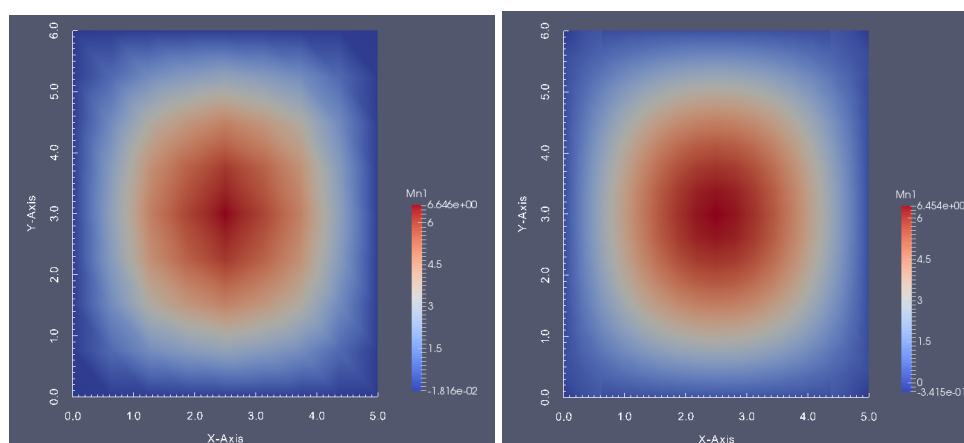


Figura 17: Momento em x [kN.m], pela teoria de Reissner-Mindlin. Esquerda:  $n_{el} = 5$  e  $p_{ordem} = 3$ . Direita:  $n_{el} = 9$  e  $p_{ordem} = 5$ .

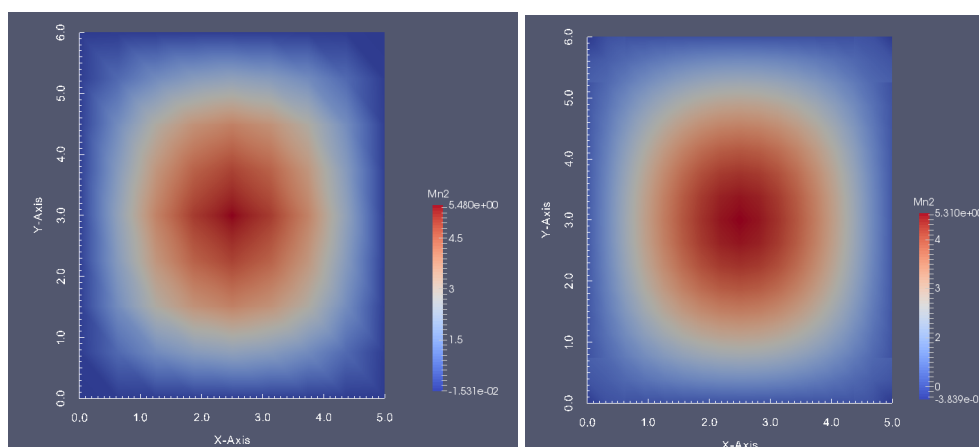
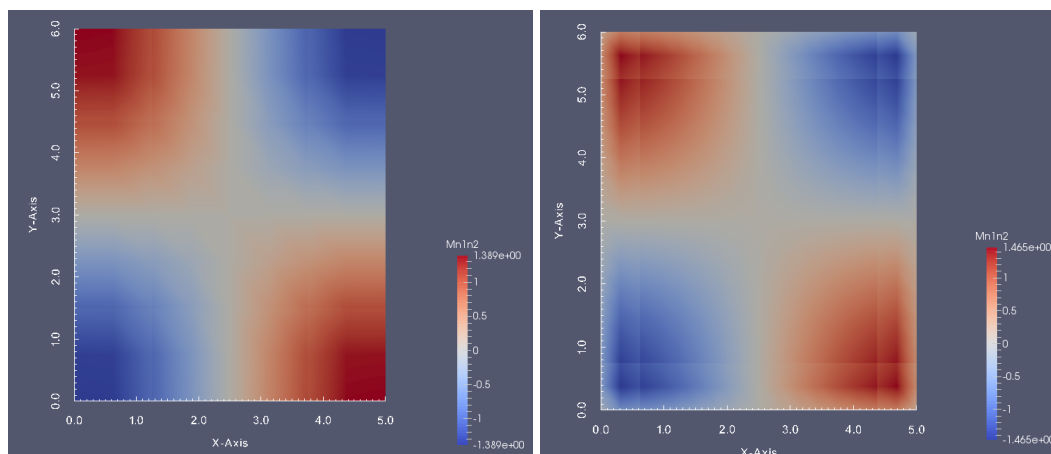


Figura 18: Momento em y [kN.m], pela teoria de Reissner-Mindlin. Esquerda:  $n_{el} = 5$  e  $p_{ordem} = 3$ . Direita:  $n_{el} = 9$  e  $p_{ordem} = 5$ .



**Figura 19:** Momento  $xy$  [kN.m], pela teoria de Reissner-Mindlin. **Esquerda:**  $n_{el} = 5$  e  $p_{ordem} = 3$   
**Direita:**  $n_{el} = 9$  e  $p_{ordem} = 5$ .

## 5 Conclusão

O trabalho realizado possibilitou a comparação de duas teorias e suas aplicações para um caso particular. A teoria de Reissner-Mindlin considera a influência das deformações de cisalhamento transversais nos cálculos e consequentemente, uma nova configuração de rotações, modificando a hipótese de ortogonalidade das normais feita por Kirchhoff.

Os resultados obtidos pela teoria de Reissner-Mindlin apresentaram valores superiores e que são explicados pela influência das deformações de cisalhamento transversais e o aumento do ângulo de rotação após a deformação da placa. O cálculo obtido prevalece em favor da segurança.

Este trabalho também permitiu o estudo e aplicação de um algoritmo numérico baseado no Método dos Elementos Finitos, condizente com a solução analítica do problema. Este método também aparece como ferramenta matemática imprescindível para cálculos mais complexos, com geometria e carregamentos variáveis, e cujas soluções não são triviais.

## 6 REFERÊNCIAS

- Becker, E., 1981. *Finite elements*. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.
- Devloo, P. R. B. Pz: An object oriented environment for scientific programming, 1997. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 150, n. 1, p. 133 - 153.
- Oñate, E., 2013. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 2: Beams, Plates and Shells*. Springer Science & Business Media.
- Reddy, J. N., 2006. *Theory and analysis of elastic plates and shells*. Boca Raton, Fla. London: CRC Taylor & Francis distributor.
- Slhessarenko, 1997, F. *Análise tridimensional de edifícios por elementos finitos utilizando programação orientada a objetos*. Tese de mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas/Campinas.

Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S., 1959. *Theory of plates and shells*. McGraw-hill New York.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., 2000. *The finite element method: Solid mechanics*. Butterworth-heinemann.