



THE IMPACT OF THE PROBABILITY DISTRIBUTION FUNCTION FOR THE RANDOM VARIABLES COMPRESSIVE STRENGTH OF CONCRETE AND YIELD STRESS OF STEEL IN THE RELIABILITY ANALYSE

Osvaldo Luiz C. Souza

osvaldolui246@gmail.com

D. Sc., Professor, Department of Architecture and Urbanism, Rural Federal University of Rio de Janeiro.

BR 465, Campus Universitário- Instituto de Tecnologia, Seropédica, 23851-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

Emil S. Sánchez Filho

emilsanchez@uol.com.br

D. Sc., Full Professor, Department of Civil Engineering, Fluminense Federal University.

Rua Passo da Pátria, 156, Bloco D, Escola de Engenharia, São Domingos, 24210-240, Niterói, RJ, Brazil.

Abstract. The aim of this study is to evaluate the variation of the index of reliability β_{sist} of a reinforced concrete beam, strengthened with Carbon Fiber Reinforced Polymer – CFRP, considering two different probability distribution functions – PDF for the random variables – concrete compressive strength f_c and steel yield stress f_s , and two different configurations of reinforcement with CFRP.

In the first analyze the β_{sist} is evaluated twice, initially using the Normal PDF for the f_c and the f_s , as considered by the Brazilian code – NBR 6118:2014, afterward the same index of reliability is obtained again, this time considering the Lognormal PDF for both materials, as considered by the Joint Committee on Structural Safety – JCSS. The beam is strengthened

with longitudinal CFRP reinforcement A_{fl} and transversal CFRP reinforcement A_{ft} .

In the second analyze the efficiency of the new reinforcement is evaluated. This time the beam is strengthened with either A_{fl} or A_{ft} , and the probability distribution functions PDF for the concrete and steel are considered to be Lognormal

For the two sets of reliability analyses the beam is subjected to a torsional moment, and the methodology and reinforcement configurations are the same developed by Silva Filho (2007).

Keywords: Index of reliability, Probability of failure, Random variables

1 INTRODUÇÃO

Os projetos dos elementos estruturais devem garantir segurança, bom desempenho e durabilidade. Para o cumprimento de tais requisitos as normas atuais utilizam o método dos estados limites (E.L), que por meio de coeficientes parciais de segurança contempla as incertezas das variáveis presentes em toda sua vida útil. Esses métodos são como semi-probabilístico, por tratar indiretamente as incertezas das variáveis a partir da aplicação dos referidos coeficientes parciais de segurança.

Os valores adotados para os coeficientes parciais de segurança atribuem à estrutura um índice de confiabilidade associado a um valor máximo de probabilidade de falha p_f , definido por fatores sociais, políticos e econômicos.

As incertezas inseridas nos projetos, variáveis aleatórias, são caracterizadas pelos seus modelos probabilísticos, definidos a partir da sua função densidade de probabilidade (FDP), seu valor esperado (média), medida de dispersão (desvio padrão ou coeficiente de dispersão).

Este artigo considera analiticamente, a partir de análises de confiabilidade, as incertezas das variáveis aleatórias inseridas no dimensionamento do reforço de uma viga caixão, com compósito de fibras de carbono – CFC, a partir da metodologia de Silva Filho (2007).

Para a condução da análise de confiabilidade são consideradas cinco variáveis aleatórias, a saber: resistência à compressão do concreto f_c , tensão de escoamento do aço f_s , módulo de elasticidade do compósito de fibras de carbono E_f , cargas permanentes T_g e cargas variáveis T_q .

A NBR 6118:2014 considera a resistência do concreto e a tensão de escoamento do aço a partir de uma FDP Normal, e o JCSS a partir de uma FDP Lognormal. Esse fato direcionou a análise no sentido de avaliar a diferença nos valores obtidos para os índices de confiabilidade da viga analisada.

2 ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

O problema básico de confiabilidade estrutural pode ser formulado em termos de uma margem de segurança M , definida por

$$M = R - S \quad (1)$$

onde R e S são variáveis aleatórias independentes e representam, respectivamente, a resistência e a solicitação.

As aleatoriedades inerentes à resistência e à solicitação fazem com que a margem de segurança seja, também, uma variável aleatória, igualmente representada por uma função densidade de probabilidade. A análise de confiabilidade de uma estrutura consiste na avaliação da probabilidade de falha p_f , caracterizada a partir de uma resistência R inferior a uma solicitação S e representada por meio do evento $M < 0$, quanto esta desempenhar os objetivos para os quais foi dimensionada. A expressão para a probabilidade de falha é

$$P_f = P(M = R - S \leq 0) \quad (2)$$

A avaliação da área sob a curva da função densidade de probabilidade, que representa a margem de segurança no intervalo onde $M < 0$, quantifica a probabilidade de falha da estrutura. A probabilidade de falha p_f , em termos de análise de confiabilidade, é definida a partir de um valor mínimo de índice de confiabilidade de referência β_{ref} , sendo a definição do referido índice de referência vinculada a fatores que ultrapassam o âmbito de atuação do engenheiro, tais como: fatores sociais, econômicos, políticos, *etc.*

Para a situação particular em que R e S são variáveis normais, respectivamente, $N(\mu_R, \sigma_R)$ e $N(\mu_S, \sigma_S)$, a margem de segurança M também é representada por uma variável normal $N(\mu_M, \sigma_M)$, onde:

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (3)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4)$$

A Figura 1 ilustra a função densidade de probabilidade (Normal) da margem de segurança M , onde se encontram representados a probabilidade de falha p_f e o índice de confiabilidade β para esse problema.

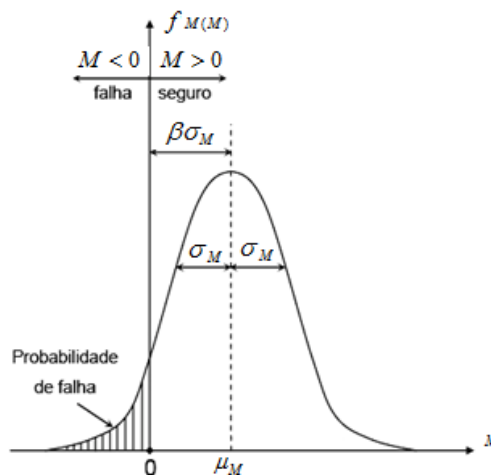


Figura 1 – Distribuição da margem de segurança; (Melchers, 2002)).

A variável normal M pode ser escrita como:

$$M = \mu_M - \beta\sigma_M = 0 \quad (5)$$

Considerando-se que a falha se dá a partir de $M = 0$, o índice de confiabilidade do problema básico β é dado por

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 - \sigma_S^2}} \quad (6)$$

Em um grande número de casos de análise de confiabilidade as variáveis aleatórias, resistência R e solicitação S são definidas a partir de variáveis aleatórias básicas, $X_1, X_2, \dots, X_n$, dependentes e com funções densidade de probabilidade não normal. Esse fato inviabiliza a obtenção do índice de confiabilidade β a partir da expressão 6 e torna a obtenção do mesmo mais complexa.

Uma vez ocorrido esse fato outros métodos de análise são utilizados para a avaliação da estrutura, a saber: a simulação de Monte Carlo e o método analítico FORM – *First Order Reliability Method*.

Para a utilização desses métodos é definida a função de falha $G(X) = 0$ que marca a passagem entre a falha e a segurança da estrutura, então.

$$M = G(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (7)$$

A simulação de Monte Carlo possibilita o cálculo da probabilidade de falha a partir da definição de uma função de estado limite e uma amostra dos possíveis valores que caracterizam a violação do estado limite analisado.

Vários valores das variáveis aleatórias envolvidas na análise são gerados a partir das suas respectivas médias, desvios padrões e função densidade de probabilidade. O experimento é simulado artificialmente por meio de soluções determinísticas do problema, utilizando-se em cada ciclo de simulação um conjunto das variáveis geradas.

A simulação consiste na solução da função de falha, utilizando-se os valores das variáveis aleatórias X_i . O número de valores menores que zero, obtidos na solução determinística da função de falha, é avaliado e a estimativa de probabilidade de falha definida pela expressão

$$p_f = \frac{N_f}{N} \quad (8)$$

onde

N_f – número de ciclos de simulação com valores negativos para a expressão de estado limite; N – total de ciclos de simulações.

O método analítico FORM – *First Order Reliability Method*, baseia-se no significado geométrico, no espaço reduzido, do índice de confiabilidade β do problema básico com variáveis normais independentes.

O cálculo do índice de confiabilidade do problema geral pode ser obtido com a solução do seguinte problema de programação matemática que fornece o ponto X^* e o valor de β :

$$\begin{aligned} \text{Min } \beta &= \|X\| \\ \text{s.t: } G(X) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

O algoritmo mais utilizado para resolver o problema definido na Eq.(9) é o HLRF desenvolvido por Hasofer e Lind (1974), Rackwitz e Fiessler (1978). O algoritmo possibilita o cálculo do índice de confiabilidade β a partir da transformação das variáveis aleatórias X (espaço original), podendo essas ter distribuições quaisquer e serem dependentes entre si ou não, em variáveis normais equivalentes reduzidas não-correlacionadas y (espaço reduzido), e vice-versa, em cada iteração. Uma vez feito, X^* e seu valor correspondente no espaço reduzido, y^* , a probabilidade de falha p_f é calculada com o uso da Eq (2).

Os valores obtidos para a probabilidade de falha p_f é aproximado, uma vez que esse valor corresponde à probabilidade de falha de uma função de falha linear que passa por y^* e é tangente à função de falha original nesse ponto. A Figura 2 ilustra a obtenção do índice de confiabilidade β no espaço reduzido.

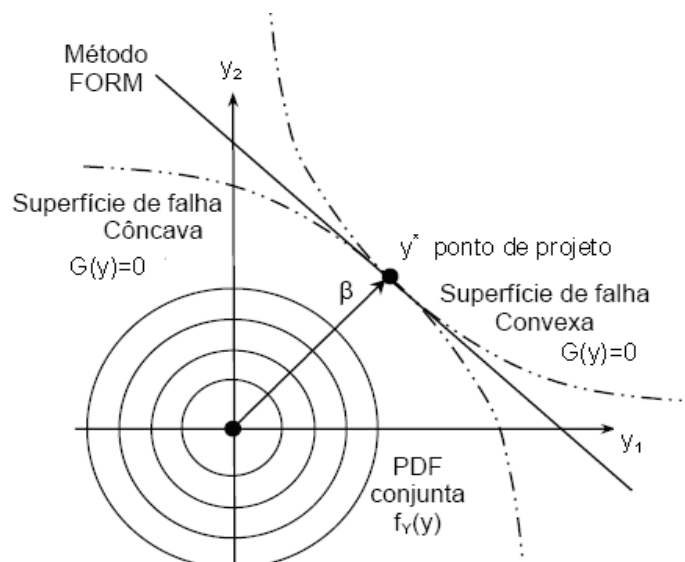


Figura 2 – Índice de confiabilidade β e superfícies de falha côncava e convexa. Choi e Youn (2001) apud Lopes (2007).

3 DESCRIÇÃO DA ANÁLISE

O objetivo deste artigo é observar a diferença nos valores dos índices de confiabilidade, referentes a cada função de falha β_i e para o sistema em série β_{sist}^5 , obtidos a partir da análise de confiabilidade de uma viga caixão reforçada longitudinalmente e transversalmente com compósito de fibras de carbono CFC, considerando-se dois diferentes modelos probabilísticos para representar as variáveis aleatórias, resistência à compressão do concreto f_c e tensão de escoamento do aço f_s .

Avalia-se também a variação dos índices de confiabilidade da viga caixão considerando-a reforçada a partir de duas configurações distintas de reforço: armadura longitudinal ou armadura transversal. A Figura 3 mostra as características geométricas e a configuração do armadura em aço e reforço em CFC da viga caixão.

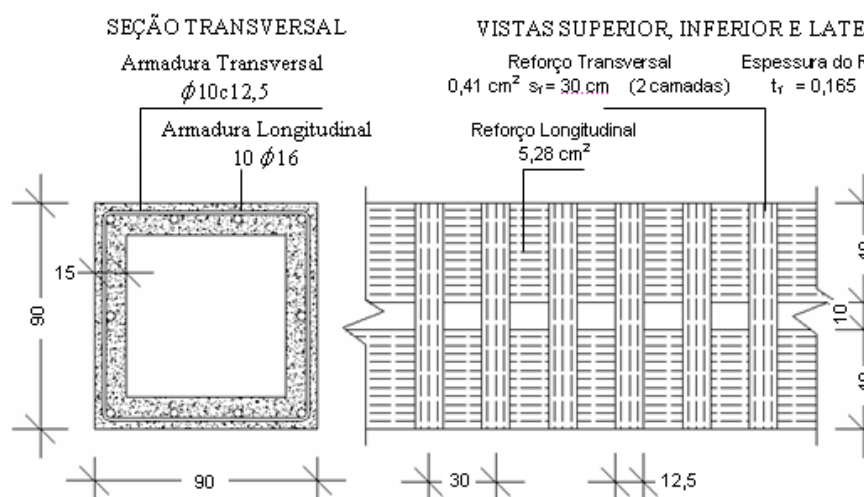


Figura 3 – Características geométricas e configuração de reforço em aço e compósito de fibras de carbono – CFC da viga analisada.

As Figuras 4 e 5 ilustram o desenvolvimento das análises.

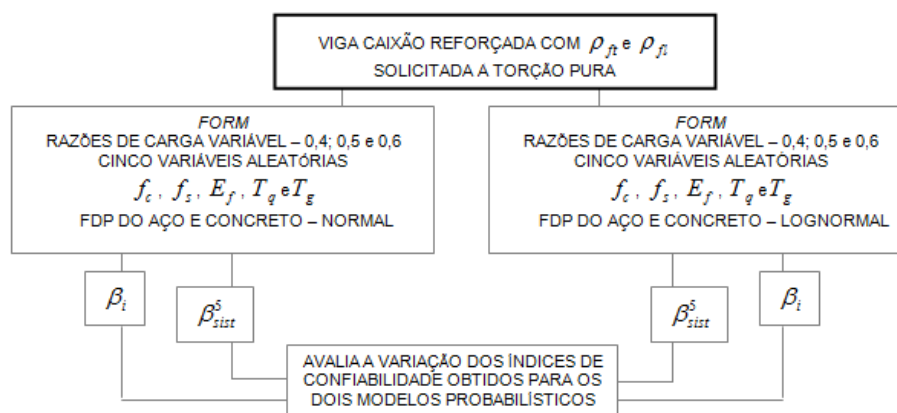


Figura 4 – Desenvolvimento da análise de confiabilidade com dois diferentes modelos probabilísticos para representar as variáveis aleatórias, resistência a compressão do concreto f_c e escoamento do aço f_s .

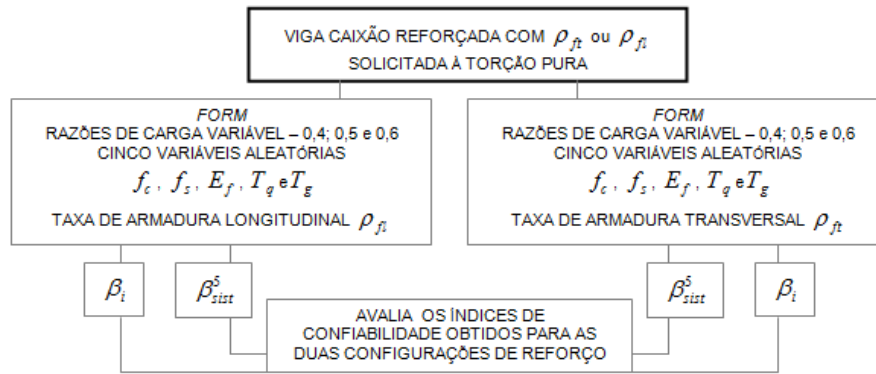


Figura 5 – Desenvolvimento da análise de confiabilidade com reforço longitudinal de compósito de fibra de carbono A_{fl} ou com reforço transversal de compósito de fibras de carbono A_{ft} .

Nessas análises é utilizada a metodologia de reforço utilizando-se compósito de fibras de carbono CFC para vigas solicitadas à torção elaborada por Silva Filho (2007). Em sua pesquisa o autor considera três hipóteses de ruptura: (a) ruína da biela flexo-comprimida de concreto; (b) escoamento da armadura longitudinal de aço e reforço de CFC; (c) escoamento da armadura transversal de aço e reforço de CFC;. A partir dessas hipóteses definiu-se três funções de falha ou funções de estado $G(X) = 0$ que determinam o limite de violação de um estado limite a partir de uma resistência R igual a uma solicitação S .

As expressões 10 a 12 ilustram, respectivamente, as funções de falha inerentes às ruínas (a), (b) e (c) utilizadas nas análises de confiabilidade:

(a)

$$G_1 = 2 \left[0,7 \left(0,7 - \frac{f_c}{20} \right) \right] f_c \left[\frac{tA_k}{\frac{1}{tg\theta} + tg\theta} \right] - (T_g + T_q) \quad (10)$$

(b)

$$G_2 = 2A_k tg\theta \frac{A_{sl} f_s}{u_k} + \frac{A_{fl}}{u} 2bh \left[\frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f}} \sqrt{10 f_c}}{10} \right] tg\theta - (T_g + T_q) \quad (11)$$

(c)

$$G_3 = 2A_k \frac{1}{tg\theta} \frac{A_{st} f_s}{s} + \frac{\frac{A_{ft}}{s_f} 2bh \left[\frac{0,192 \sqrt{\frac{E_f}{t_f}} \sqrt{10 f_c}}{10} \right]}{tg\theta} - (T_g + T_q) \quad (12)$$

onde

- A_{fl} – área reforço longitudinal de CFC;
 A_{ft} – área reforço transversal de CFC;
 A_k – área limitada pela linha média da parede efetiva;
 A_{st} – área da armadura transversal;
 A_{sl} – área da armadura longitudinal;
 b – largura da viga;
 E_f – módulo de elasticidade CFC na direção das fibras;
 E_s – módulo de elasticidade do aço;
 f_c – resistência média a compressão do concreto;
 f_s – tensão média de escoamento do aço;
 h – altura da viga;
 s – espaçamento da armadura transversal;
 s_f – espaçamento eixo a eixo dos estribos de CFC;
 t – espessura da parede efetiva;
 t_f – espessura do reforço de CFC;
 u – perímetro da seção transversal;
 u_k – perímetro da área A_k ;
 θ – ângulo de inclinação das bielas;
 T_g – parcela de momento de torção inerente a parcela de carga permanente;
 T_q – parcela de momento de torção inerente a parcela de carga variável.

Entre as variáveis existentes nas três funções de falha acima, cinco são consideradas aleatórias: resistência à compressão do concreto f_c , tensão de escoamento do aço f_s , módulo de elasticidade do compósito de fibras de carbono E_f , cargas permanentes T_g e cargas variáveis T_q , as demais variáveis são consideradas determinísticas. A Tabela 1 mostra os dados dos modelos probabilísticos das variáveis aleatórias utilizados nas análises.

Tabela 1 – Modelos probabilísticos das variáveis aleatórias.

Variáveis Básicas	Resist. caract.	Resist. média	Módulo elast.	Desvio padrão	Coef. variação	FDP
Concreto (MPa)	25	31,6	–	4	0,13	Lognormal
						Normal
Aço (MPa)	500	560	–	30	0,0536	Lognormal
						Normal

Continuação da Tabela 1

CFC (GPa)	–	–	256,71	10,21	0,0398	Weibull
Solic. Perm.(kNm)	Var	Var	–	–	0,10	Normal
Solic. Varia. (kNm)	Var	Var	–	–	0,25	Gumbel

A Figura 6 ilustra a função densidade de probabilidade FDP do concreto nas duas hipóteses adotadas na análise.

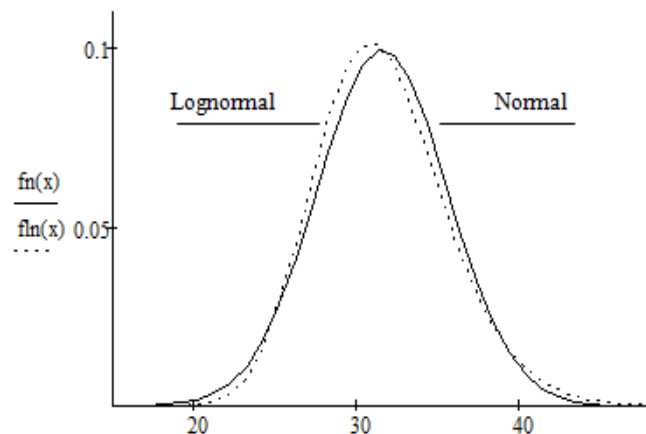


Figura 6 – FDP do concreto utilizado na análise. Lognormal e Normal

A primeira análise é conduzida com o objetivo de investigar a variação nos valores dos índices de confiabilidade das funções de falha adotadas β_i e para o sistema em série β_{sist}^5 utilizando-se na mesma para a resistência à compressão do concreto f_c , e para a tensão de escoamento do aço f_s as funções densidade de probabilidade Normal e Lognormal.

Ressalta-se o fato de que a FDP Lognormal mostra-se mais apropriada por eliminar a possibilidade de valores negativos, fato esse inerente às referidas variáveis aleatórias f_c e f_s .

A segunda análise tem o propósito de averiguar a eficiência dos reforços longitudinal e transversal com CFC, A_{fl} e A_{ft} , para tal a viga é reforçada longitudinalmente ou transversalmente.

A FDP Lognormal é utilizada para a resistência à compressão do concreto f_c , e para a tensão de escoamento do aço f_s . A taxa geométrica de armadura longitudinal ρ_{fl} é igual à taxa geométrica de armadura transversal de reforço, igual $\rho_{ft} = 0,1\%$, sendo as demais características geométricas e mecânicas mantidas inalteradas em relação ao estudo anterior.

A viga mostrada na Figura 3 é solicitada por um momento de torção cujo valor característico é 280 kN.m , sendo esse momento constituído por uma parcela inerente à ação permanente T_{kg} e outra inerente à ação variável T_{kq} , definidas segundo as razões de carga variável r_q adotadas nessa análise, a saber: 0,40; 0,50 e 0,60.

A NBR 8681:2014 considera o valor característico do momento de torção inerente à ação permanente T_{kg} igual ao seu valor médio μT_g , e o valor característico do momento de torção inerente à ação variável T_{kq} igual ao valor cuja probabilidade de ser excedido esteja entre 25% e 35%. Este artigo considera essa probabilidade igual a 35%. A Tabela 2 mostra os valores característicos e médios dos momentos de torção utilizados nas análises.

Tabela 2 – Valores médios e característicos dos momentos de torção (kN.m) .

r_q	T_{kg}	μT_g	T_{kq}	μT_q
0,4	168	168	112	105,88
0,5	140	140	140	132,35
0,6	112	112	168	158,82

4 RESULTADOS OBTIDOS

A Tabela 3 mostra os valores dos índices de confiabilidades dos modos de falha β_i e do sistema em série β_{sist}^5 obtidos a partir das análises de confiabilidade realizadas por meio do método analítico *FORM*: a) resistências do concreto e do aço representadas a partir da FDP Normal; b) resistências do concreto e do aço representadas a partir da FDP Lognormal.

Tabela 3 – Índices de confiabilidade.

Funções de Falha	r_q	(a) β_i Normal	(a) β_{sist}^5 Normal	(b) β_i Lognormal	(b) β_{sist}^5 Lognormal	$\frac{\beta_i \text{ Log}}{\beta_i \text{ Nor}}$	$\frac{\beta_{sist}^5 \text{ Log}}{\beta_{sist}^5 \text{ Nor}}$
Biela G ₁	0,40	6,00	4,41	6,57	4,41	1,10	1,00
A.Long.G ₂		4,57		4,57		1,00	
A.Tran.G ₃		4,41		4,41		1,00	
Biela G ₁	0,50	5,90	3,93	6,55	3,93	1,11	1,00
A.Long.G ₂		4,08		4,08		1,00	
A.Tran.G ₃		3,93		3,93		1,00	
Biela G ₁	0,60	5,67	3,49	6,46	3,57	1,14	1,02
A.Long.G ₂		3,71		3,71		1,00	
A.Tran.G ₃		3,57		3,57		1,00	

A partir dos resultados obtidos nas análises de confiabilidade, Tabela 3, onde as variáveis aleatórias, resistência à compressão do concreto f_c e tensão de escoamento do aço f_s são representadas pelas funções densidade de probabilidade FDP Normal e Lognormal, observa-se que para os modos de falha onde a resistência de escoamento do aço é considerada, G_2 e G_3 , os índices de confiabilidade β_2 e β_3 permanecem inalterados, não obstante a maior parcela de carga variável considerada.

Para o modo de falha onde a resistência à compressão do concreto f_c é considerada, G_1 , a variação entre os índices de confiabilidade β_1 é mais significativa, chegando a um valor máximo de 14% para a maior razão de carga r_q analisada. Nessa mesma análise, para o sistema considerado em série, onde a falha de um dos componentes do mesmo provoca a sua ruptura, constatou-se que o valor do índice de confiabilidade β_{sist}^5 , considerando-se as funções de falhas G_1 , G_2 e G_3 , manteve-se praticamente inalterado. A Figura 7 ilustra a variação do índice de confiabilidade do sistema em série β_{sist}^5 em função da razão de carga r_q .

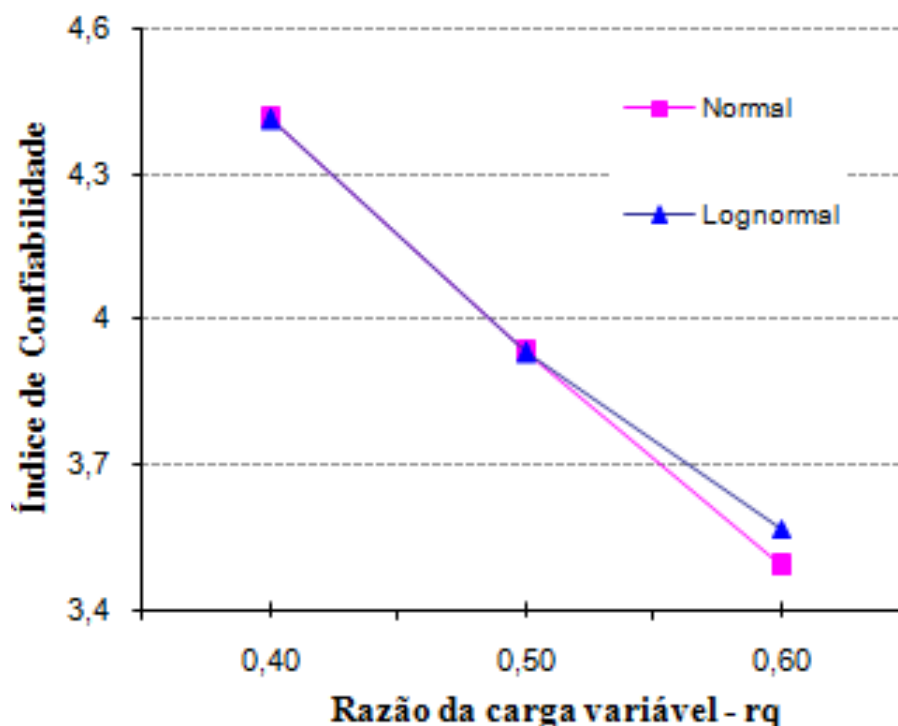


Figura 7 – Variação do índice de confiabilidade do sistema em série β_{sist}^5 : Normal e Lognormal.

A Tabela 4 mostra os valores dos índices de confiabilidades dos modos de falha β_i e do sistema em série β_{sist}^5 , obtidos a partir das análises de confiabilidade realizadas por meio do método analítico *FORM*, onde a viga é reforçada longitudinalmente ou transversalmente com CFC, e a resistência a compressão do concreto e tensão de escoamento do aço são representadas a partir da função densidade de probabilidade FDP Lognormal.

Tabela 4 – Índices de confiabilidade dos modos de falha e do sistema em série

Funções de Falha		r_q	β_i	β_{sist}^5	β_i	β_{sist}^5
G_i			(A_{fi})	(A_{fi})	(A_{fi})	(A_{fi})
Biela	GU ₁	0,40	6,55		6,54	
A. Long.	GU ₂		4,09	3,02	3,20	3,19
A. Tran.	GU ₃		3,02		3,99	
Biela	GU ₁	0,50	6,43		6,40	
A. Long.	GU ₂		3,63	2,69	2,85	2,85
A. Tran.	GU ₃		2,69		3,55	
Biela	GU ₁	0,60	6,42		6,42	
A. Long.	GU ₂		3,45	2,59	2,73	2,73
A. Tran.	GU ₃		2,59		3,37	

Observa-se a partir dos dados da Tabela 4 o decréscimo do índices de confiabilidade do sistema em série β_{sist}^5 com a Acréscimo da razão de carga variável r_q , ressaltando-se, no entanto maior valor para os mesmos quando a viga é reforçada transversalmente. Esse fato realça maior eficiência para o reforço transversal. A Figura 8 ilustra a variação do índice de confiabilidade do sistema em série β_{sist}^5 em função da razão de carga r_q .

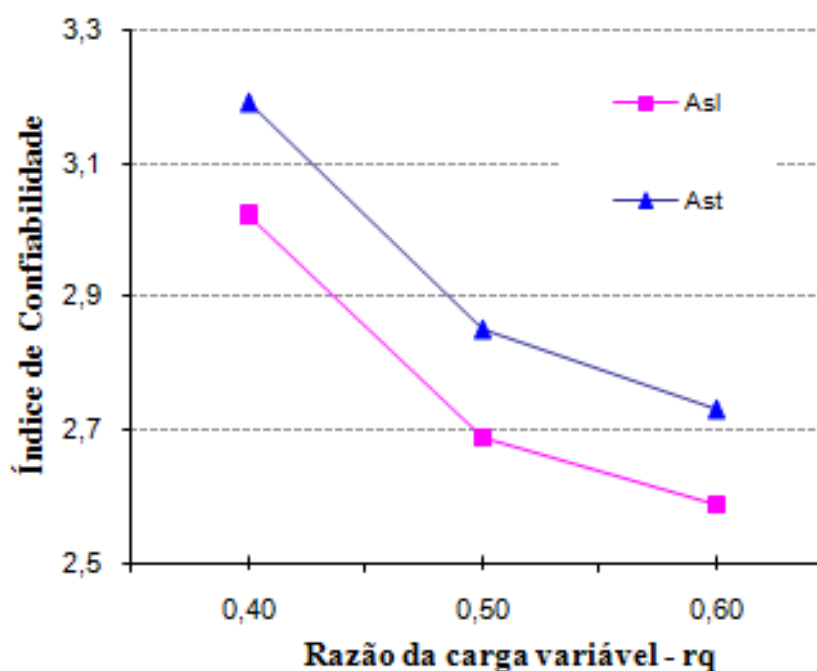


Figura 8 – Variação do índice de confiabilidade do sistema em série β_{sist}^5

5 PRINCIPAIS CONCLUSÕES

Conclui-se, a partir dos valores existentes na Tabela 3, ser indiferente o tratamento das variáveis aleatórias, resistência à compressão do concreto e tensão de escoamento do aço, através das funções densidade de probabilidade Normal ou Lognormal.

Outrossim, conclui-se, a partir da Tabela 4, que a metodologia de dimensionamento elaborada por Silva Filho (2007) para reforço de vigas solicitadas a torção, mostra-se mais eficiente quando aplicada a reforço transversal.

Nas duas Tabelas constata-se o decréscimo dos índices de confiabilidade quando acrescida a de carga variável, este fato deve-se ao alto valor do coeficiente de variação desta variável aleatória.

REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. *Projeto de Estrutura de Concreto – Procedimentos*: NBR 6118. Rio de Janeiro, Brasil, 2014.

_____. *Ações e Seguranças nas Estruturas – Procedimento*: NBR 8681. Rio de Janeiro, Brasil, 2014.

Halder, A.; Mahadevan, S. Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis. John Wiley & Sons. 2000.

_____. Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design. John Wiley & Sons. 2000.

Hasofer, A. M., and Lind, N. C., *Exact and Invariant Second Moment Code Format*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 100, No EM1, pp 111-121, 1974.

Hart, G. C. Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering. Prentice – Hall, New Jersey, 1982.

Joint Committee on Structural Safety. JCSS: *Probabilistic Model Code*. 2001.

Lopes, M. T. A. *Análise de Confiabilidade de Estruturas Aplicada ao Projeto de Reforço à Força Cortante de Vigas em Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.

Melchers, R. E. *Structural Reliability Analysis and Prediction*. New York, John Wiley & Sons. 2002.

Paliga, C. M.; Campos Filho, A.; Real, M. V.; Diniz, S. M. C. Métodos de Análise de Confiabilidade Aplicado a Viga de Concreto Armado Recuperado com PRFC, Teoria e Prática na Engenharia Civil, n.17, p.57-66, Maio, 2011.

Rackwitz, R.; Fiessler, B., *Structural Reliability under Random Load Sequences*, Computers and Structures, vol. 9, No 5, pp 484-494, 1978.

Silva Filho, J. J. H. *Reforço à Torção de Vigas de Concreto Armado com Compósito de Fibras de Carbono*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2007.