



## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS TRIDIMENSIONAIS DE ESTRUTURAS COM TRINCAS

**Silvia Corbani**

[corbani@poli.ufrj.br](mailto:corbani@poli.ufrj.br)

Universidade Federal do Rio de Janeiro/ Escola Politécnica/ DES

**André Maués Brabo Pereira**

[andremaues@id.uff.br](mailto:andremaues@id.uff.br)

Universidade Federal Fluminense/ Escola de Engenharia/ LSC

**Luiz Fernando Martha**

[lfm@tecgraf.puc-rio.br](mailto:lfm@tecgraf.puc-rio.br)

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

**Resumo.** *Este artigo tem como objetivo analisar o comportamento do campo de deslocamentos e de tensões em frentes de trincas, a partir de investigações numéricas e comparações com resultados disponíveis na literatura. Para avaliar os efeitos tridimensionais do estado de tensões nas frentes da trinca, dois estudos numéricos utilizando o método dos elementos finitos tridimensional são realizados. O método dos elementos finitos é largamente usado em problemas de mecânica da fratura. Entretanto, as malhas de volume geradas para discretizar o domínio do modelo tridimensional nem sempre é uma tarefa simples, além de sua forma influenciar nos resultados das simulações. Neste trabalho, após estudo do refinamento da malha de domínio, avalia-se os deslocamentos em uma análise linear-elástica e uma análise com comportamento elasto-plástico do material. Como o comportamento do material é estudado com abordagens diferentes, compara-se a eficiência de ambos os métodos em problemas da mecânica da fratura. As comparações são baseadas na avaliação dos deslocamentos na frente da trinca. Os resultados numéricos obtidos são confrontados com os resultados da literatura.*

**Keywords:** *Mecânica da fratura linear-elástica, Método dos elementos finitos, Mecânica da fratura elasto-plástica.*

## 1 INTRODUÇÃO

Frequentemente, estruturas de engenharia apresentam trincas devido carregamento de fadiga gerado por ações de vento e/ou de utilização, por exemplo. A vida a fadiga destas estruturas é considerada separadamente por dois períodos de iniciação de trinca e período de crescimento da trinca. Entretanto, o projeto de qualquer estrutura sob ação de carregamento de fadiga prevê inspeções em determinados intervalos de tempo. Muitas vezes, no momento da inspeção, as estruturas podem apresentar trincas ainda que pequenas e que não atravessam toda a espessura do componente. Tais trincas ainda podem se iniciar e crescer embebidas nas estruturas ou parcialmente passantes. Desta maneira, a trinca cresce sem ser detectada em inspeções, porém quando se tornar completamente passante ou mesmo durante seu processo de crescimento pode ocorrer a falha da estrutura. Portanto, simulações que envolvam crescimento de trincas são importantes em projeto de fadiga. Estas trincas demandam uma análise tridimensional do problema.

Assumindo as hipóteses de mecânica da fratura linear elástica (MFLE) em problemas bidimensionais, é possível estimar com precisão a vida das estruturas sob carregamento de fadiga. Entretanto, em problemas tridimensionais, ainda existem muitas questões que despertam interesse. Enquanto que em um problema bidimensional modela-se ponta de trinca (que corresponde a extremidade do comprimento da trinca e ligamento residual) e, conseqüentemente, o fator de intensidade de tensão é um parâmetro único associado também a geometria do componente trincado e as tensões remotamente aplicadas. Em um problema tridimensional, existe frente de trinca e, assim, existe uma distribuição de fator de intensidade de tensão ao longo de toda esta frente. Desta forma, o primeiro desafio na modelagem tridimensional pode ser a geometria da frente da trinca.

Este artigo trata de um primeiro estudo para avaliar o fator de intensidade de tensão (FIT) na frente de trincas. Como a ponta da trinca em uma modelagem bidimensional é assumida constante ao longo da espessura, faz-se esta mesma hipótese para a modelagem tridimensional. Para tanto, pretende-se calcular o FIT a partir dos resultados numéricos de deslocamentos de abertura da frente da trinca, obtidos em simulações tridimensionais distintas, considerando o comportamento elástico linear (EL) do material e comportamento elasto-plástico (EP). Assim, utiliza-se um programa de elementos finitos (EF) tridimensional, o programa Nastran In-Cad (Nastran, 2004). Finalmente, FIT obtidos por simulações numéricas são comparados com resultados disponíveis na literatura.

## 2 PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

### 2.1 Método dos elementos finitos com comportamento linear-elástico

Por ser um método de domínio, o MEF requer a discretização do domínio do problema por meio de elementos. A seguir é descrita de maneira sucinta MEF conforme Bathe (1996).

A equação de equilíbrio resultante da formulação clássica do MEF pode ser obtida por meio do princípio dos trabalhos virtuais, resultando em

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \mathbf{F} - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega = 0. \quad (1)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{F}$  denotam, respectivamente, as tensões internas, forças de volume/carregamento distribuído e forças externas aplicadas; enquanto  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$  referem-se as

funções de forma e a matriz que relaciona o campo de deformações com os deslocamentos nodais ( $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U}$ ).

O sistema de equações globais de equilíbrio para problemas elásticos linear, em termos de deslocamentos, tem a seguinte forma:  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ ; onde  $\mathbf{K}$  é matriz de rigidez global,  $\mathbf{U}$  são os deslocamentos nodais e  $\mathbf{F}$  é o vetor de carregamentos.

A matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  é montada a partir das matrizes de rigidez dos elementos

$$\mathbf{k} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e . \quad (2)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ ) do elemento. Portanto, as tensões elásticas são determinadas pela relação:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{U}$ .

## 2.2 Método dos elementos finitos com comportamento elasto-plástico

O cálculo da resposta com comportamento elasto-plástico depende do histórico de tensões e deformações. Uma breve introdução sobre a metodologia envolvida em EF com não-linearidade do material é descrita a seguir. As referências usadas foram Borst et al. (2012) e Crisfield (2000).

Admite-se a decomposição de deformação  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}$  em duas componentes. Uma componente elástica  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}^e$  e outra componente plástica  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , tal que,  ${}^t\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^e + {}^t\boldsymbol{\varepsilon}^p$ . As tensões e deformações elásticas são relacionadas na forma incremental como  ${}^t\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}{}^t\boldsymbol{\varepsilon}$ .

As deformações plásticas ocorrem quando são verificadas as condições de escoamento, ou seja, as tensões atuantes  $\sigma_{eff}$  se igualam a tensão de escoamento  $\sigma_y$ . A hipótese usual para caracterizar materiais como aço e alumínio é comportamento elasto-plástico bi-linear do material e critério de resistência de Von-Mises é o critério que atende eficientemente as características deste material. Desta forma, as tensões efetivas  $\sigma_{eff}$  são determinadas com a expressão

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] . \quad (3)$$

onde  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as tensões principais. Assim, o comportamento plástico se inicia quando  $\sigma_{eff}$  atingir a tensão de escoamento  $\sigma_y$ .

Para determinar as deformações plásticas, é necessária uma análise incremental da resposta não-linear. Assim, o carregamento deve ser aplicado em pequenos incrementos de carga (passos) até, finalmente, alcançar a carga total aplicada.

O tratamento básico em uma solução incremental passo-a-passo assume que a solução para um instante  $t$  é conhecida e que a solução para o instante  $t + \Delta t$  é calculada, onde  $dt$  é um incremento de tempo adequado escolhido. Então, considera que no instante  $t + \Delta t$  tem-se  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Desde que a solução no instante  $t$ , pode escrever  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + \mathbf{F}$ , onde  $\mathbf{F}$  é o incremento de forças no ponto nodal correspondente ao incremento de deslocamento e tensões do elemento do instante  $t$  para o instante  $t + \Delta t$ . Este vetor pode ser aproximado usando a matriz de rigidez tangencial  ${}^t\mathbf{K}$  que corresponde as condições do material e geometria no instante  $t$ .  $\mathbf{F} = {}^t\mathbf{K}\mathbf{U}$ , onde  $\mathbf{U}$  é um vetor deslocamento nodal incremental e  ${}^t\mathbf{K} = \partial^t\mathbf{F} / \partial^t\mathbf{U}$ .

Assim, o equilíbrio é estabelecido em cada instante, usando este método incremental e estabelecendo o equilíbrio com a seguinte equação

$${}^t\mathbf{KU} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}. \quad (4)$$

e determinando  $\mathbf{U}$ , calcula-se uma aproximação do deslocamento para o instante  $t+\Delta t$ . Avaliada uma aproximação de deslocamento no instante  $t+\Delta t$ , pode-se determinar as tensões neste nós no instante  $t+\Delta t$  e seguir para o próximo instante. Entretanto, antes é necessária uma análise iterativa para se ter uma solução precisa nesta igualdade  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , aplicando a técnica clássica de Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado.

### 2.3 Mecânica da fratura linear-elástica

Na mecânica da fratura linear elástica, o fator de intensidade de tensão (FIT) é o parâmetro que controla o crescimento da trinca. Para computar o valor deste parâmetro utiliza-se o método de extrapolação do deslocamento, conforme descrito em Mohammadi (2008).

Neste caso, o componente trincado está em estado plano de deformação pois atende as seguintes restrições

$$B, a, (w-a), h \geq 2,5 \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2. \quad (5),$$

onde  $B$  é a espessura do componente,  $a$  é o comprimento da trinca,  $w$  é a largura e  $h$  é a distância entre o carregamento remotamente aplicado e a trinca.

A expressão analítica de FIT para problemas em estado plano de deformação é

$$K_I = \frac{u_y^{j-i} E}{4(1-\nu^2) \sqrt{\frac{r}{2\pi}}}. \quad (6),$$

onde  $r$  é a distância da frente da trinca e o Nó  $j-i$ . Estes nós (Nó  $j-i$ ) pertencem a face superior da trinca, onde o índice  $i$  assume valores iguais a 1 até  $n$ . Na Fig. 1 é ilustrado um esquema detalhado com o nós que compõem a face superior da trinca. Neste modelo, o Nó  $j$  é a ponta da trinca (ou frente da trinca em um modelo tridimensional). Desta forma, para se conhecer o FIT na ponta da trinca, faz-se a extrapolação dos resultados obtidos em diferentes distancias  $r$  a partir da frente da trinca. Este procedimento é ilustrado esquematicamente na Fig. 2.

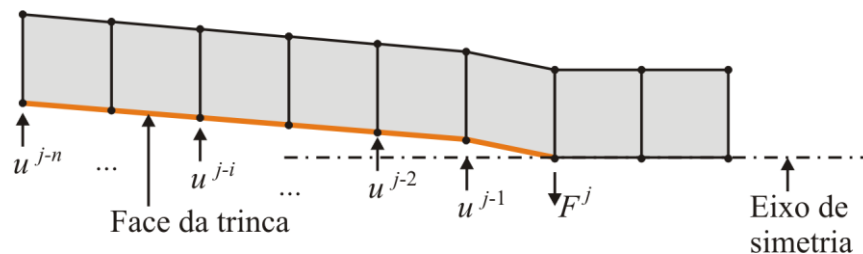


Figura 1. Esquema para cálculo do FIT (adaptado de Mohammadi, 2008).

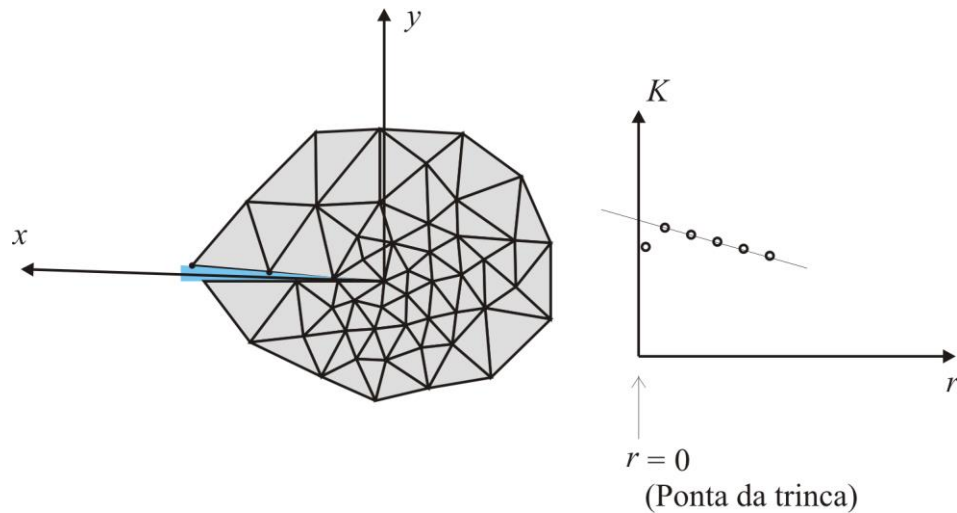


Figura 2. Extrapolação do FIT (adaptado de Mohammadi, 2008).

## 2.4 Mecânica da fratura elasto-plástica

Cottrell (1961) e Wells (1963) propuseram um critério local baseado no deslocamento da abertura (CTOD) em torno da ponta da trinca para comportamento elasto-plástico.

A primeira ordem da solução de CTOD (*Crack Tip Opening Displacement*) é baseada na solução de Irwin para Modo I de fratura, ou seja, deslocamento vertical da trinca (conforme ilustrado na Fig. 3).

$$CTOD = 2u_y \approx \frac{K_I^2}{E\sigma_y}. \quad (7)$$

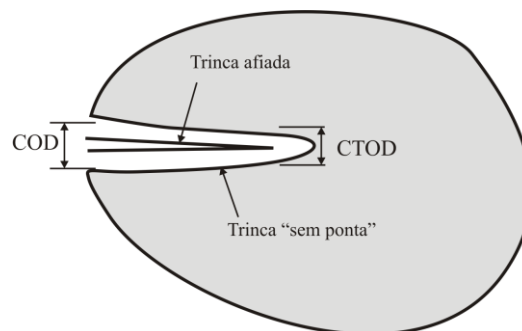


Figura 3. Estimativa do CTOD.

### 3 RESULTADOS

As análises de elementos finitos foram realizadas no programa Autodesk Nastran In-CAD (Nastran, 2004). Foram analisadas duas geometrias: um componente sob tração e um componente com uma trinca de borda. As análises são feitas considerando o comportamento linear-elástico do material e o comportamento elasto-plástico do material.

O material usado nas análises é uma liga de alumínio 7075 – T6, pois é largamente usado em aviões e em estruturas aeroespaciais. Com base em catálogo da empresa Alcoa (ALCOA Mill Products), adotou-se tensão de escoamento  $\sigma_y$  de 434 MPa, tensão última a tração  $\sigma_t$  igual a 510 MPa, módulo de elasticidade longitudinal  $E$  de 70GPa e coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0,33.

Por se tratar de geometrias com um eixo de simetria, apenas modelou-se metade do componente. Assim, foram atribuídas restrições de translação associadas a este eixo de simetria. Foram adicionadas restrições que impedissem o movimento de corpo-rígido. O carregamento de tração é aplicado remotamente. A geometria foi discretizada tridimensionalmente com elementos tetraedros (CTETRA) quadráticos (ou seja, 10 nós).

#### 3.1 Corpo-de-prova tracionado

Em uma primeira análise, modelou-se um componente tracionado com seção transversal variável. O carregamento aplicado é igual a 50 kN. A seção transversal no eixo de simetria é 10mm x 10mm, enquanto que na superfície do carregamento é 10mm x 30mm. São realizadas duas análises diferentes: na primeira análise, assume-se o comportamento linear-elástico do material; na segunda análise, o comportamento do material é elástico perfeitamente plástico com comportamento plástico a partir das tensões calculadas pelo critério de resistência de Von Mises alcançarem tensão de escoamento igual a 434 MPa. Na Fig. 4 é apresentada a malha de elementos finitos modelada até seção de simetria e com restrições de deslocamento aplicadas nesta seção para garantir a simetria e evitar movimento de corpo-rígido.

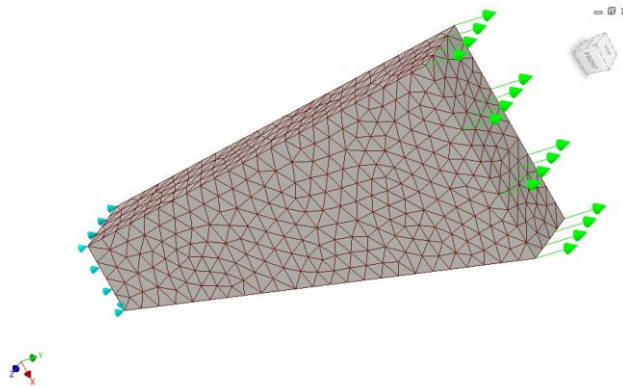


Figura 4. Malha gerada para modelagem de componente sob tração.

Na Fig. 5 são apresentados os resultados de tensões de Von Mises obtido em cada análise. Na Fig. 6 e Fig. 7 são mostrados os resultados de deslocamentos total e deslocamentos na direção do carregamento aplicado (direção  $y$ ), respectivamente.

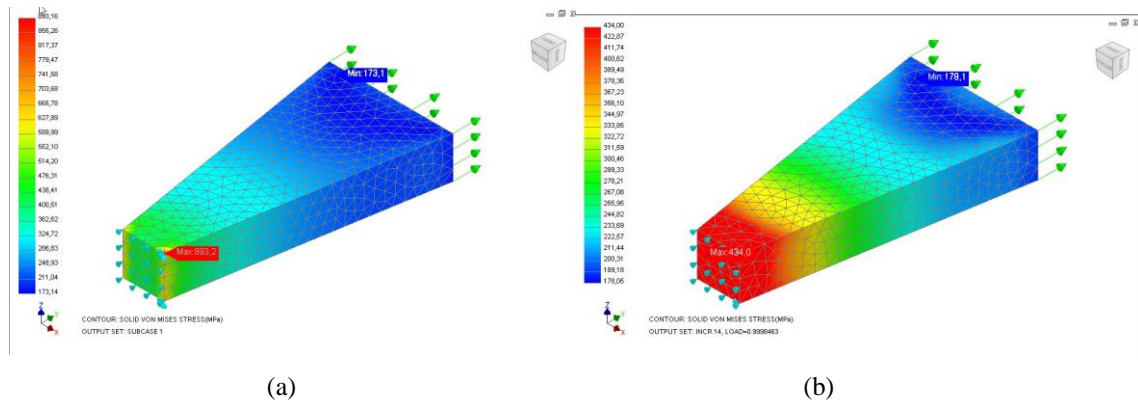


Figura 5. Tensões de Von Mises: (a) Elástico linear e (b) Elasto-plástico.

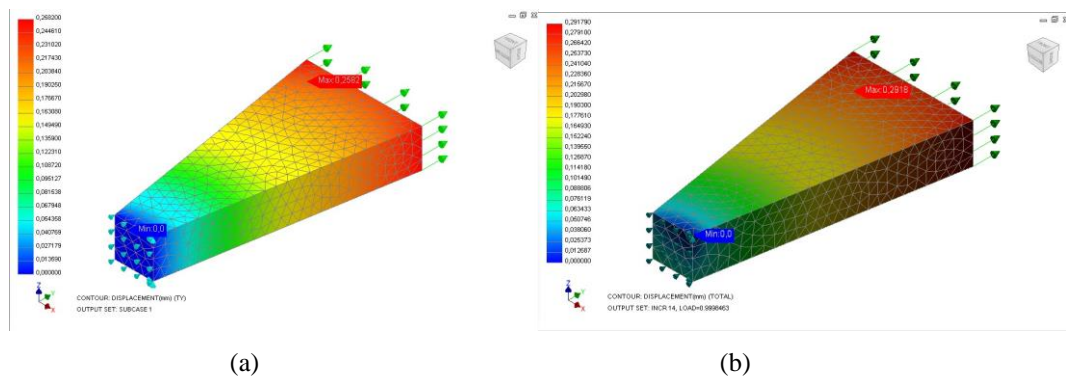


Figura 6. Deslocamento total: (a) Elástico linear e (b) Elasto-plástico.

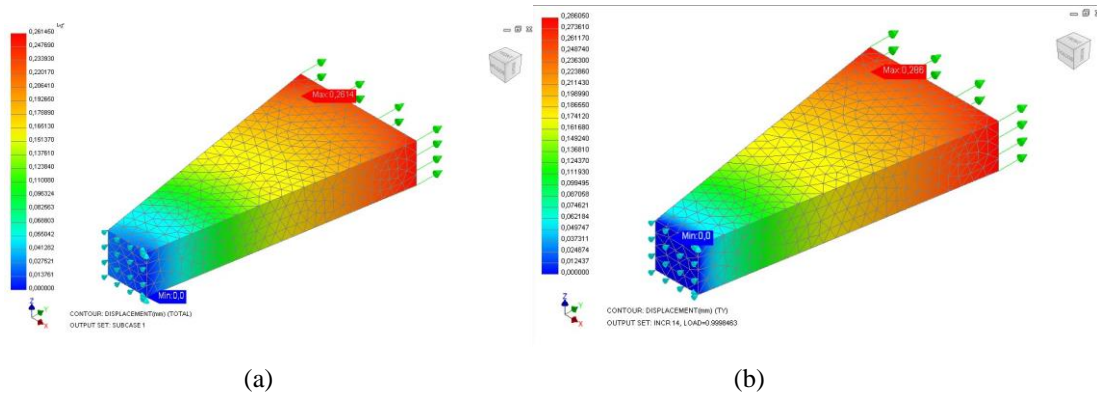


Figura 7. Deslocamento na direção y: (a) Elástico linear e (b) Elasto-plástico

### 3.2 Trinca passante

O componente de alumínio com largura  $w$  de 50 mm e uma trinca de borda de comprimento  $a$  igual a 17,5 mm tem 25 mm ( $B$ ) de espessura, conforme ilustrado na Fig. 8. Como existe um eixo de simetria, aplicou-se restrições de simetria neste eixo. O carregamento de tração remotamente aplicado é igual a 33,3 kN, que corresponde a tensões de tração remotas  $\sigma$  iguais a 26,6 MPa.



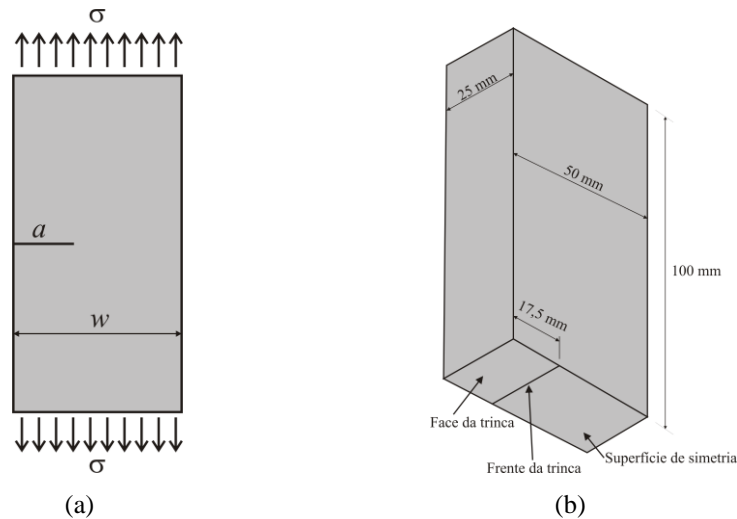


Figura 8. Geometria do componente com uma trinca de borda (a) esboço e (b) geometria 3D até superfície de simetria.

A expressão aproximada de fator de intensidade de tensão (Tada *et al.*, 2000) é

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \beta. \quad (8)$$

onde  $\sigma$  são as tensões remotamente aplicadas,  $a$  é comprimento da trinca passante e  $\beta$  é um parâmetro função da geometria, que para esta geometria específica é

$$\beta = 0,265 \left(1 - \frac{a}{w}\right)^4 + \frac{\left(0,857 + 0,265 \frac{a}{w}\right)}{\left(1 - \frac{a}{w}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (9)$$

Assim, assumindo as hipóteses da Mecânica da fratura linear elástica, o FIT obtido pela Eq. (8) é 11,6 MPa m<sup>0,5</sup>.

Após a verificação do refinamento da malha de EF, utilizou-se a malha ilustrada na Fig. 9 com 10000 elementos na frente da trinca. Analisou-se o modelo com comportamento elástico linear e comportamento elástico perfeitamente plástico, conforme descrito previamente na seção 3.1.

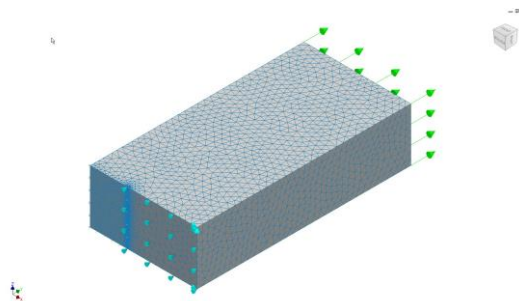


Figura 9. Modelo com 10000 elementos na frente da trinca.



Na Fig. 10 são apresentados os resultados de tensões de Von Mises obtido em cada análise. Na Fig. 11 e Fig. 12 são mostrados os resultados de deslocamentos totais e deslocamentos na direção do carregamento aplicado (direção y), respectivamente.

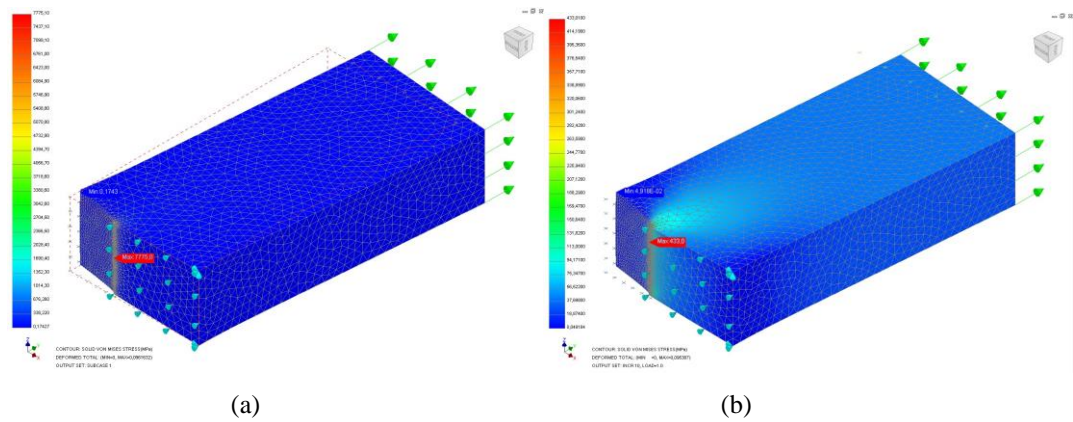


Figura 10. Distribuição das tensões de Von Mises: (a) Elástico-linear e (b) Elasto-plástico.

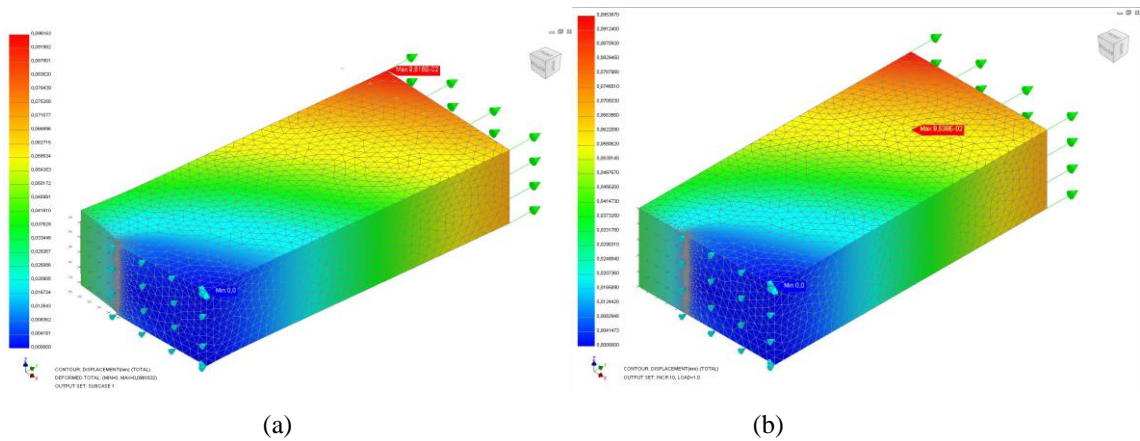


Figura 11. Deslocamentos totais: (a) Elástico-linear e (b) Elasto-plástico.

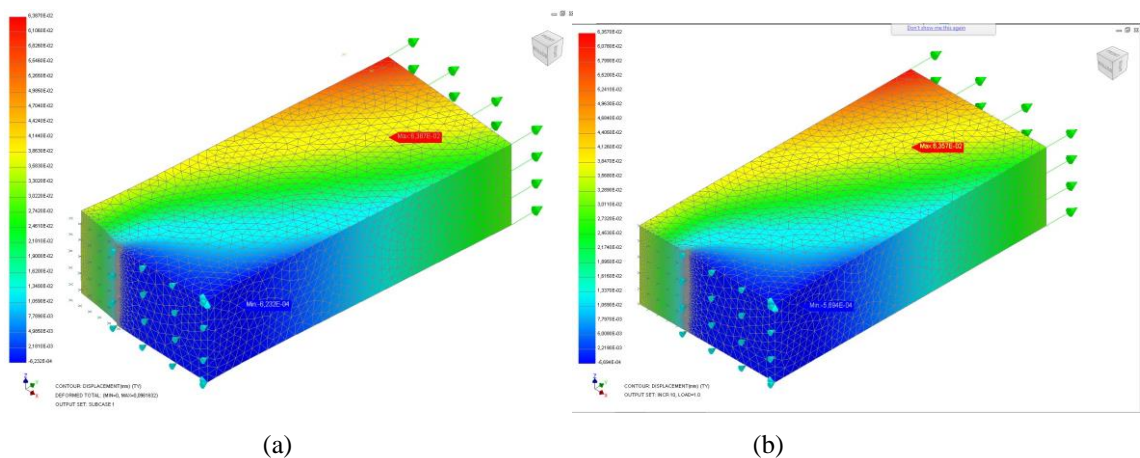
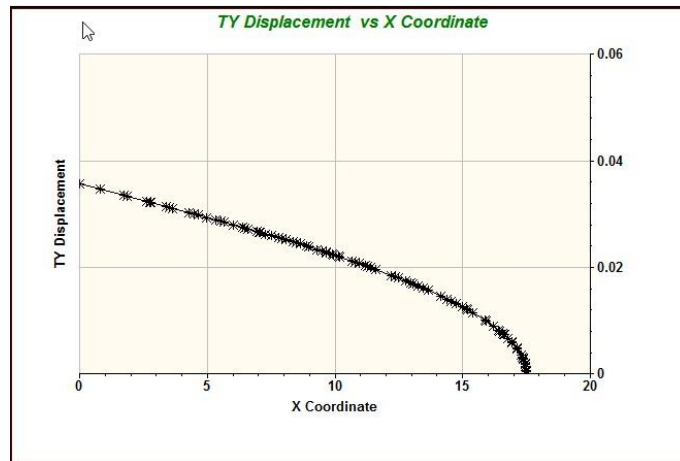
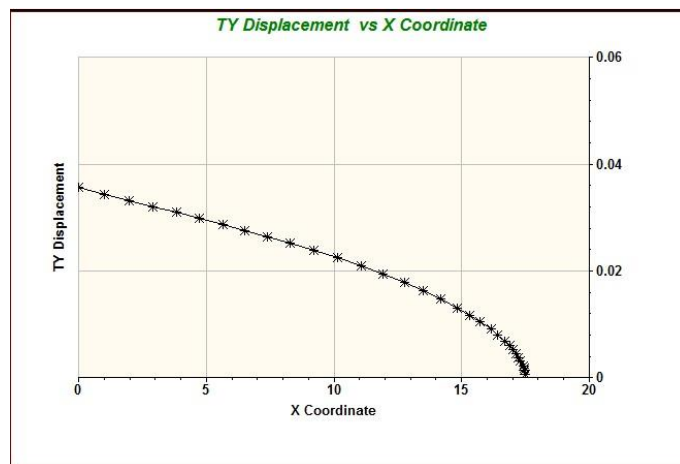


Figura 12. Deslocamentos na direção Y: (a) Elástico-linear e (b) Elasto-plástico.

Na Fig. 13 (a) são ilustrados os deslocamentos na direção  $y$  em relação a coordenada  $x$  na análise com comportamento linear-elástico do material. Estes deslocamentos são utilizados no cálculo do FIT com método de extrapolação do deslocamento para estado plano de deformação. Nesta estimativa de FIT são usados os deslocamentos nos nós pertencentes interseção da face da trinca com a superfície do material e nos nós localizados aproximadamente a metade da espessura do componente trincado. Com base na Eq. (6), determina-se o FIT na análise com comportamento elástico linear do material nestas duas diferentes localizações ao longo da espessura (direção  $z$ ). Os resultados obtidos são ilustrados na Fig. 14.

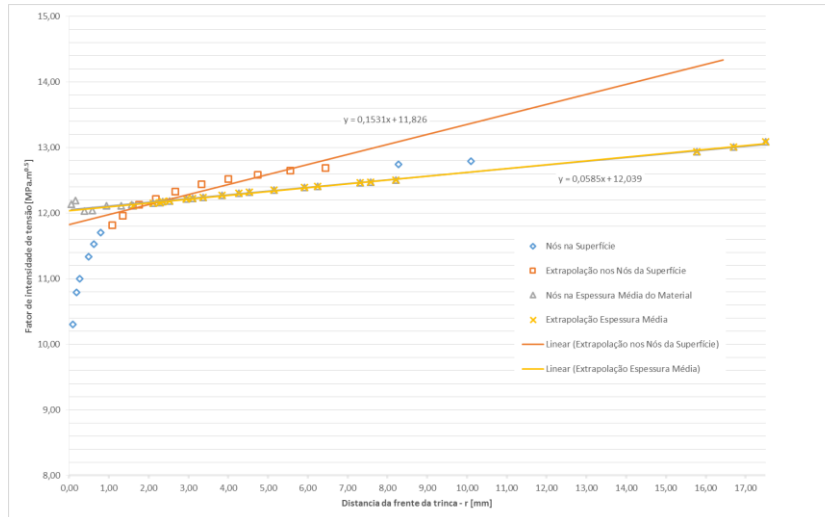


(a)



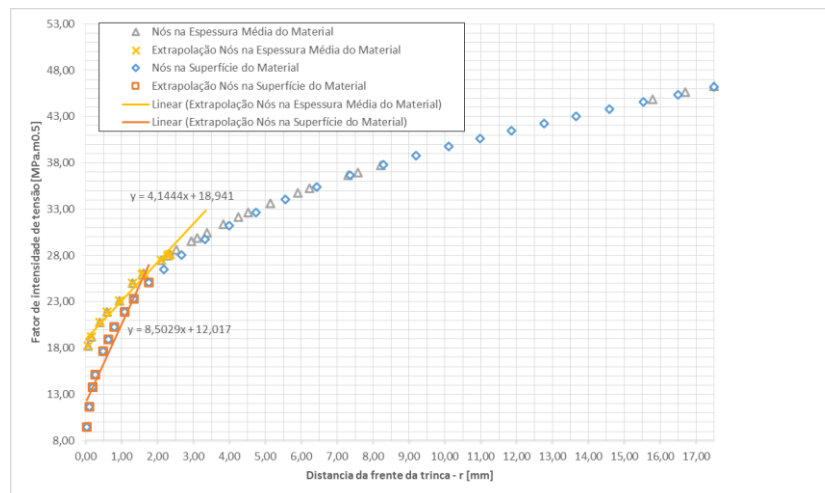
(b)

Figura 13. Deslocamentos na direção  $Y$  vs. Coordenada  $x$  do Nó (a) LE e (b) EP.



**Figura 14. Cálculo do FIT com comportamento LE.**

De maneira análoga ao procedimento descrito para comportamento linear-elástico, o procedimento do FIT com método de extrapolação do deslocamento utiliza os deslocamentos na direção  $y$  mostrados na Fig. 13 (b) para comportamento elasto-plástico do material. Estes deslocamentos são utilizados no cálculo do FIT para estado plano de deformação nas mesmas duas localizações ao longo da espessura (direção  $z$ ). Com base na Eq. (7), determina-se o FIT na análise com comportamento elasto-plástico do material. Os resultados obtidos são ilustrados na Fig. 15. Finalmente, o resumo dos valores de FIT calculados é apresentado na Tabela 1.



**Figura 15. Cálculo do FIT com comportamento EP.**

**Tabela 1. Comparação do fator de intensidade de tensão.**

	$K_I$ [MPa m <sup>0.5</sup> ]	Erro [%]
Eq. (8)	11,6	-
Modelo 2 – EL – Nós no Meio da Espessura	12,0	3,4
Modelo 2 – EL – Nós na Superfície do material	11,8	1,7
Modelo 2 – EP – Nós no Meio da Espessura	19,0	63,8
Modelo 2 – EP – Nós na Superfície do material	12,0	3,4

## 4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, avaliou-se um componente trincado. O comportamento do material foi assumido inicialmente linear-elástico e, em uma segunda análise, utilizou um comportamento elasto-plástico do material. O comportamento elasto-plástico é uma abordagem mais realista do problema e, assim, esperava-se que nesta análise os resultados de FIT fossem mais precisos. Entretanto, o fator de intensidade de tensão obtido com comportamento elasto-plástico alcançou erro de 63,8% quando estimado em nós localizados na espessura média do material. Este erro pode ser atribuído hipótese inicial da geometria da trinca. Neste caso, foi assumido que o comprimento da trinca é constante ao longo da espessura do material.

Sabe-se que materiais dúcteis tendem a uma frente de trinca curva. Assim, em trabalhos futuros, deve-se estudar uma geometria curva para representar a frente da trinca. Com base nesta geometria, deve-se avaliar o FIT em diversos nós contidos na frente da trinca. Uma vez que, em uma análise tridimensional, o FIT depende da geometria da frente da trinca.

## REFERÊNCIAS

- ALCOA Mill Products. Alloy 7075 Plate and Sheet. Disponível em: <[https://www.alcoa.com/mill\\_products/catalog/pdf/alloy7075techsheet.pdf](https://www.alcoa.com/mill_products/catalog/pdf/alloy7075techsheet.pdf)>. Acesso em: 10 ago 2016.
- Aliabadi, M. H., & Brebbia, C. A., 1996. Boundary element formulations in fracture mechanics: a review. *Transactions on Engineering Sciences*, 13.
- Bathe, K. J., 1996. *Finite Element Procedures*. 2<sup>nd</sup> Edition. Prentice-Hall: New Jersey.
- Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J. C., Verhoosel, C. V., 2012. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2<sup>nd</sup> Edition. John Wiley & Sons: United Kingdom.
- Crisfield M.A., 2000. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Essentials*. Vol.1. John Wiley & Sons: New York.
- Mohammadi, S., 2008. *Extended finite element method for fracture analysis of structures*. Blackwell Publishing Ltd: UK.
- NASTRAN, M. S. C., 2004. Quick reference guide. MSC. SOFTWARE, v. 1.
- Schijve, J., 2009. *Fatigue of Structures and Materials*. 2<sup>nd</sup> Edition. Springer: Dordrecht.
- Tada, H.; Paris, P.C.; Irwin, G.R., 2000. *The Stress Analysis of Cracks Handbook* (ASME Press, New York).
- Wells, A., 1961. Unstable Crack Propagation in Metals - Cleavage and Fast Fracture: *Cranfield Crack Propagation Symposium*, Vol. 1, September, p. 210.