



## ATUALIZAÇÃO ESTRUTURAL DE VIGAS METÁLICAS CONECTADAS POR ELO VISCOELÁSTICO

**Maycon Iurassek Dezan**

**Eduardo Márcio de Oliveira Lopes**

maycondezan@gmail.com

eduardo\_lopes@ufpr.br

Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Paraná - UFPR

Rua Cel. Francisco H. dos Santos, s/n – Bloco IV, 81531-980, Paraná, Curitiba, Brasil

**Marco Antônio Luersen**

luersen@utfpr.edu.br

Dep. Acadêmico de Mecânica - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Rua Deputado Heitor Alencar, 5000 - 81280-340, Paraná, Curitiba, Brasil.

***Resumo.** Modelos em elementos finitos têm sido amplamente utilizados na resolução de problemas de engenharia, porém, numa abordagem inicial, o comportamento dinâmico do modelo pode não condizer satisfatoriamente com o observado no sistema físico correspondente. A atualização estrutural é uma técnica que vem se destacando na busca de modelos numéricos em elementos finitos que apresentem melhor correlação com os sistemas físicos associados. No caso da aplicação em problemas dinâmicos, faz-se uso de dados experimentais – através das funções resposta em frequência (FRF) – de modo a obter valores mais fidedignos para os parâmetros do sistema. No presente trabalho, essa técnica é aplicada a um sistema composto por duas vigas paralelas acopladas por um elo viscoelástico submetido a tração, onde ajustam-se os parâmetros de rigidez associados às condições de contorno, bem como parâmetros específicos das vigas, tais como módulo de elasticidade, densidade, espessura e razão de amortecimento modal. Os modelos ajustados das vigas apresentaram diferenças inferiores a 3Hz para todos os modos de vibrar. A correlação física do modelo numérico é confirmada através do critério MAC (Modal Assurance Criterion).*

***Palavras chave:** Atualização estrutural, Elo viscoelástico, Modificação estrutural, Dinâmica de sistemas mecânicos, Elementos finitos.*

## 1 INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos é amplamente utilizado na engenharia, principalmente na etapa de projeto e validação virtual, etapa essa em que os componentes virtuais são submetidos a carregamentos similares aos encontrados na aplicação real. Mottershead e Friswell (1993) expõem que os modelos disponíveis até um dado momento não eram suficientemente acurados para descrever, de modo satisfatório, o comportamento dinâmico de estruturas reais. Para que um refinamento dos modelos numéricos seja possível, são necessárias informações precisas e detalhadas sobre o sistema físico. Friswell e Mottershead (1995) relacionam como principais, as seguintes fontes de erros: (1) erros de idealização, (2) erros de discretização e (3) hipóteses incorretas para parâmetros do modelo, em especial nas uniões e condições de contorno.

A atualização estrutural é uma técnica cujo objetivo principal é reduzir os erros entre sistemas físicos e modelos numéricos correspondentes. Ela pode ser classificada como direta ou indireta. A atualização direta consiste na modificação dos elementos das matrizes de massa, rigidez e amortecimento de forma direta. Por outro lado, a atualização indireta se dá através da modificação de parâmetros físicos, tais como módulo de elasticidade e densidade.

Visa-se, na atualização estrutural, tanto significado físico quanto “fidelidade” em um modelo em elementos finitos. No primeiro ponto, busca-se que o modelo numérico represente da forma mais acurada possível a distribuição de massa, rigidez e amortecimento da estrutura real, garantindo o significado físico destas matrizes. Quanto ao segundo, entende-se por “fidelidade”, ou *correctness*, a característica que permite ao modelo numérico prever computacionalmente o comportamento dinâmico da estrutura, mesmo sofrendo modificações.

Modelos numéricos podem ser sensíveis a pequenas variações nos parâmetros, justificando assim o emprego da técnica de atualização estrutural. Dentre as principais fontes de erros, acima relacionadas, esta metodologia atua primordialmente sobre a hipótese incorreta para parâmetros do sistema. As demais fontes estão presentes durante todo o desenvolvimento e devem ser abordadas previamente ao emprego da atualização estrutural.

Através de técnicas de identificação de sistemas, cuja matéria prima são as funções resposta em frequência (FRFs) experimentais, informações adicionais sobre o sistema real podem ser obtidas. Ensaios dinâmicos, contudo, apresentam informações incompletas, imprecisas e com presença de ruído, com distintas fontes de incertezas. As FRFs resultantes desses ensaios demandam, portanto, critério para sua utilização (Friswell e Mottershead 1995; Balmes, 1993).

Neste trabalho, a atualização estrutural é aplicada, de forma indireta, em um sistema real de duas vigas metálicas paralelas acopladas através de um elo viscoelástico. Elos viscoelásticos são dispositivos para controle de vibrações, utilizados com o objetivo específico de introduzir amortecimento numa estrutura, sem adição demasiada de rigidez e, principalmente, de massa. Salienta-se que materiais viscoelásticos têm seu comportamento influenciado pela temperatura e pela frequência quando solicitados dinamicamente (Nashif et al., 1985; Lopes, 1998). O sistema ora investigado busca representar, numa primeira aproximação cabos aéreos conectados por espaçadores amortecedores.

O método dos elementos finitos (Fish e Belytschko, 2009) é empregado na modelagem das vigas metálicas isoladas e também na modelagem do sistema composto, constituído pelas vigas metálicas acopladas por elo viscoelástico. Já a abordagem da análise modal experimental (Ewins, 2000) é utilizada na determinação das características modais

correspondentes. Os resultados decorrentes da atualização estrutural realizada são expostos e discutidos abaixo, após a apresentação dos materiais, métodos e modelos.

## 2 MATERIAIS, MÉTODOS E MODELAGEM

Ambas as vigas são de alumínio, com 770mm de comprimento e seção transversal retangular com 43mm de largura e 2,3mm de espessura média. A Fig. 1 ilustra o arranjo experimental utilizado, enquanto a Fig. 2 ilustra esse mesmo arranjo de forma esquemática, para melhor compreensão da investigação. As estruturas de suporte empregadas não apresentam resposta significativa na faixa analisada, de 0 a 150Hz, e são fabricadas em aço carbono 1020, laminado a quente. Em testes preliminares, não foram observados efeitos significativos de transmissão de movimento através dessas estruturas.

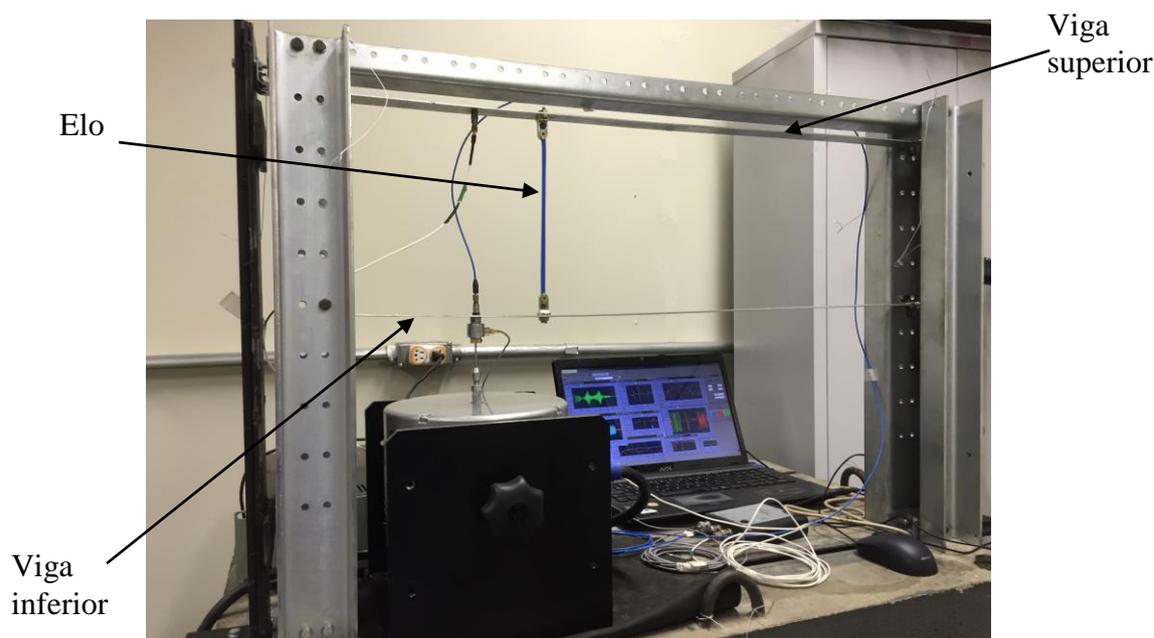


Figura 1. Arranjo experimental

Para garantir a repetibilidade das medições, um excitador eletromecânico é utilizado para fazer vibrar a viga inferior. A excitação empregada é do tipo *chirp*, e os sinais de excitação e resposta ficam totalmente contidos na janela de aquisição no domínio do tempo. Tomam-se 20 médias para cada medição, para reduzir o erro aleatório oriundo de ruído para aproximadamente 3%, quando a função coerência é de 0,99 (Ewins, 2000).

O elo viscoelástico é fabricado com o material Isodamp® C-1002, do fabricante E-A-R Specialty Composites, e possui 5mm de largura, 165mm de comprimento e 0,762mm de espessura, atuando a partir de uma deformação inicial de 8mm em tração. O projeto do elo não é otimizado; os requisitos são de que ele não deve ser instalado em nenhum nó dos modos de vibrar na faixa de frequência de interesse e sua rigidez deve ser significativamente menor do que os valores de rigidez das vigas no ponto da instalação. No presente caso, através de cálculos preliminares, com uso de dados nominais fornecido pelo fabricante a respeito do módulo de elasticidade do material viscoelástico, constatou-se que a rigidez do elo representa, no máximo, 24% da rigidez de cada viga no ponto de instalação, quando em solitação dinâmica a 150Hz. Esses requisitos visam garantir que, de forma preponderante, apenas amortecimento seja adicionado, sem acréscimos demasiados de massa ou rigidez.

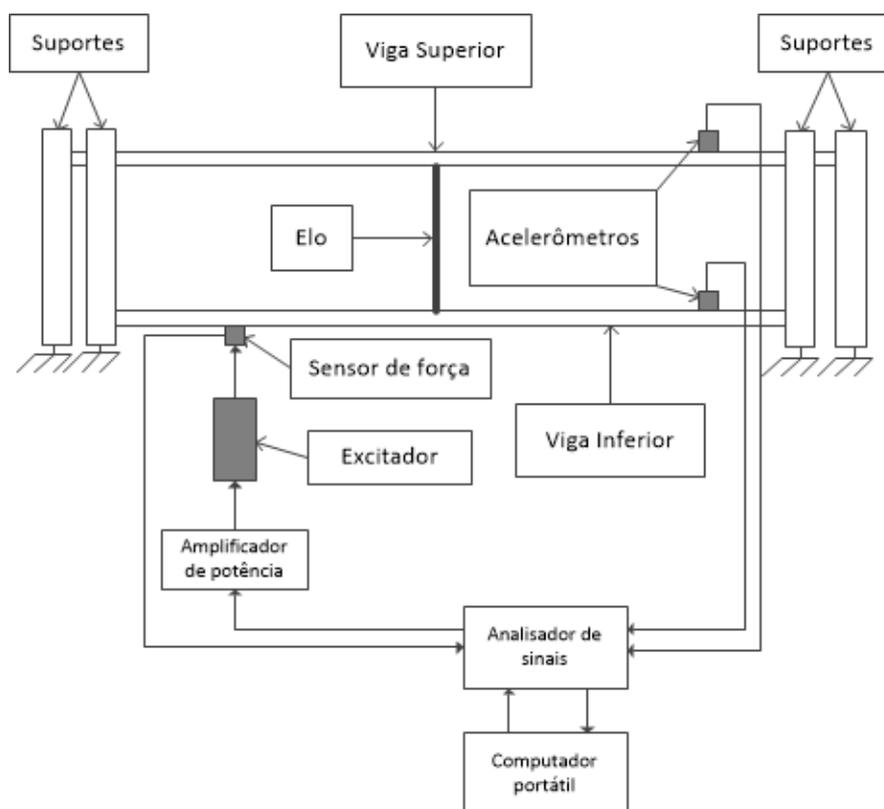


Figura 2. Arranjo experimental, esquemático

Para permitir a análise dos efeitos específicos de cada modificação, a resposta em todos os nós é medida em cada etapa, estando os nós posicionados de forma correspondente ao elaborado no modelo em elementos finitos. O modelo em elementos finitos é construído no pacote comercial Abaqus®, sendo composto por elementos 2D de viga de Timoshenko (elemento B21 do Abaqus®), com funções de interpolação lineares. A malha possui 10 elementos e 11 nós, igualmente espaçados.

Cada uma das vigas é, num primeiro momento, atualizada separadamente. Diversas condições de contorno são investigadas, conforme exposto na Tabela 1. Dentre estas, a que apresenta melhor correlação com o modelo físico é o de viga biapoiada, acrescida de molas de torção nos apoios, como ilustrado na Fig. 3.



Figura 3. Modelo de elementos finitos para cada viga com a indicação dos números dos nós

A Tabela 1 também relaciona os parâmetros sob otimização e os parâmetros de entrada, extraídos diretamente das medições experimentais. Os parâmetros em questão são os seguintes: espessura da viga ( $t$ ), densidade do alumínio ( $\rho$ ), módulo de elasticidade do alumínio ( $E$ ), rigidez mola de torção ( $K$ ),  $j$ -ésima razão de amortecimento modal ( $\zeta_j$ ),  $j$ -ésima frequência natural experimental ( $\omega_{n_j}$ ),  $j$ -ésimo modo de vibrar ( $\Phi_j$ ) e  $j$ -ésima frequência de excitação ( $\omega_j$ ). As propriedades do material são restritas a valores usuais.

A espessura entra como parâmetro sob otimização pelo fato que uma variação da ordem de 0,1mm representa uma variação de aproximadamente 1Hz no primeiro modo e superior nos demais modos. Como essa pequena variação de espessura pode ocorrer nas medições das vigas, é prudente fazer tal inclusão.

**Tabela 1. Parâmetros sob otimização e de entrada para cada modelo investigado.**

Modelo	Parâmetros sob otimização	Parâmetros de entrada (obtidos experimentalmente)
Viga biengastada	$t, \rho, E, \zeta_j$	$\omega_{n_j}, \Phi_j, \omega_j$
Viga biapoiada	$t, \rho, E, \zeta_j$	$\omega_{n_j}, \Phi_j, \omega_j$
Viga biapoiada com molas de torção idênticas	$t, \rho, E, K, \zeta_j$	$\omega_{n_j}, \Phi_j, \omega_j$
Viga biapoiada com molas de torção independentes	$t, \rho, E, K_1, K_2, \zeta_j$	$\omega_{n_j}, \Phi_j, \omega_j$

A partir dos modelos atualizados, as modificações são aplicadas e seus efeitos analisados nas respostas dos sistemas físico e numérico. As modificações consistem na adição dos elementos de fixação do elo e na inserção do elo. A localização da excitação permanece fixa no nó 3, pois, em análise prévia, verifica-se que nessa posição não há nenhum ponto de deslocamento nulo dos modos de vibrar na faixa de frequências de interesse. Os acelerômetros são posicionados nas vigas inferior e superior em vários nós, conforme os interesses de investigação.

As informações obtidas experimentalmente são utilizadas como referência para o ajuste dos parâmetros sob otimização, através de um método globalizado de otimização não linear. No presente estudo, o método globalizado de Nelder-Mead com restrições e penalização é utilizado (Luersen et al., 2004), sendo considerado como critério de parada 400 avaliações da função objetivo.

A função objetivo utilizada para atualizar os modelos em elementos finitos é uma medida de erro dada por

$$\text{Erro} = \sum_{i=1}^n \left( \left| \omega_{re_i} - \omega_{rn_i} \right| + \left| H_{3_{re_i}} - H_{3_{rn_i}} \right| \right) \quad (1)$$

onde  $n$  é o número de modos considerados, que no presente caso é igual a três,  $\omega_{rn_i}$  é a  $i$ -ésima frequência de ressonância numérica do sistema,  $\omega_{re_i}$  a  $i$ -ésima frequência de ressonância experimental do sistema, ambas em Hz,  $H_{3_{rn_i}}$  é a amplitude da FRF relacionada a  $i$ -ésima frequência de ressonância numérica e  $H_{3_{re_i}}$  é a amplitude da FRF relacionada a  $i$ -

ésima frequência de ressonância experimental, ambas em dB com referência de  $1\text{m/s}^2/\text{N}$ . Nesse caso, as FRFs são pontuais, com a excitação e resposta sendo tomadas no terceiro nó.

Com a instalação dos elementos de fixação do elo, observa-se um efeito claro sobre o comportamento dinâmico das vigas, descrito em parte pelas frequências naturais, visto que as alterações inerciais correspondentes são significativas. Para o modelo em elementos finitos, estes componentes são representados sob a forma de uma massa concentrada de 35g e uma inércia rotacional associada.

Após a instalação do elo, amortecimento e rigidez são acrescentados ao sistema composto em análise. O amortecimento é um fenômeno sobre o qual ainda se busca maior conhecimento, não havendo um modelo matemático que represente de completa e exata seus efeitos. Assim sendo, aproximações são utilizadas.

Tem-se que a equação matricial de movimento para um sistema não girante, com  $n$  graus de liberdade, pode ser representada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + i\mathbf{H})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)e^{i\omega t} \quad (2)$$

onde o amortecimento é descrito na forma estrutural pela matriz  $\mathbf{H}$ . O elo viscoelástico é introduzido no modelo em elementos finitos sob a forma de uma mola de translação, que possui rigidez complexa em função da frequência. Assume-se que a temperatura é controlada, sendo mantida constante em  $22^\circ\text{C}$ . A rigidez do elo, em forma geral, é obtida através da expressão

$$\bar{k}(\omega, T) = \frac{A}{l} \bar{E}(\omega, T) \quad (3)$$

onde,  $A$  é a área da seção transversal do elo,  $l$ , o seu comprimento e  $\bar{E}(\omega, T)$  o módulo de elasticidade complexo do material viscoelástico. As variáveis  $\omega$  e  $T$  são, respectivamente, frequência e temperatura. Balbino (2012) apresenta parâmetros que permitem a determinação do módulo de elasticidade complexo do material empregado no elo.

### 3 RESULTADOS

A Fig. 4 apresenta os espectros de amplitude das FRFs experimentais da viga inferior, com a resposta obtida no nó 7 e a excitação no nó 3 (como já exposto). O nó 7 é selecionado pelo fato de nele se obter a maior atenuação na resposta após a introdução do elo. Na Fig. 4, pode-se distinguir os efeitos oriundos da adição do elemento de fixação do elo e da inserção do elo em si.

Nota-se, pela análise das curvas apresentadas, que a adição do elemento de fixação do elo na viga influencia claramente seu comportamento dinâmico, resultando em um deslocamento das frequências de ressonância para a esquerda, com leve redução na resposta. Já com a introdução do elo, verifica-se que na primeira frequência de ressonância não há atenuação significativa de amplitude, nem deslocamento significativo da frequência. Contudo para a segunda e terceira frequências de ressonância, há reduções de 9,22dB e 8,58dB, respectivamente, sem deslocamentos expressivos das frequências de ressonância. Ou seja, o elo de fato introduz significativo amortecimento no sistema, sem alterações demasiadas de massa e rigidez, conforme esperado.

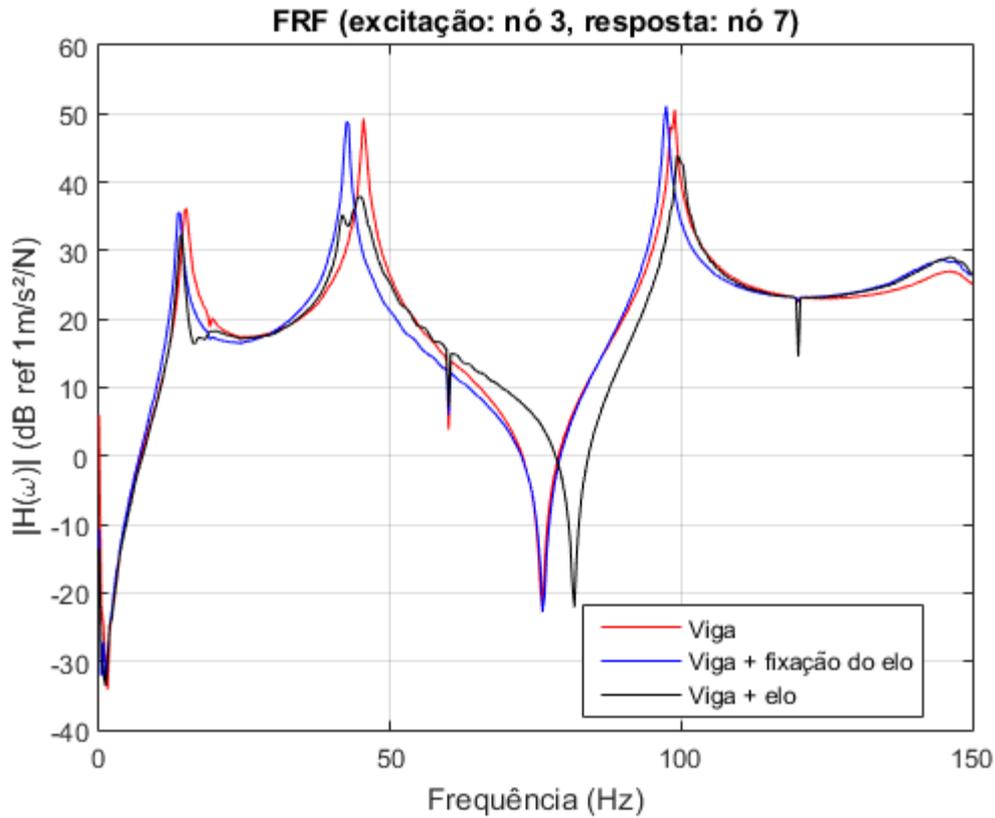


Figura 4. FRFs medidas na viga inferior (resposta nó 7)

De posse dos dados experimentais, a atualização estrutural é realizada em ambas as vigas. Os resultados para as três primeiras frequências naturais, após atualização, estão expostos na Tabela 2, juntamente com os resultados obtidos experimentalmente, o erro percentual relativo e o critério MAC (*Modal Assurance Criterion*) associado. Na tabela, o símbolo  $f_n$  indica frequência natural não amortecida.

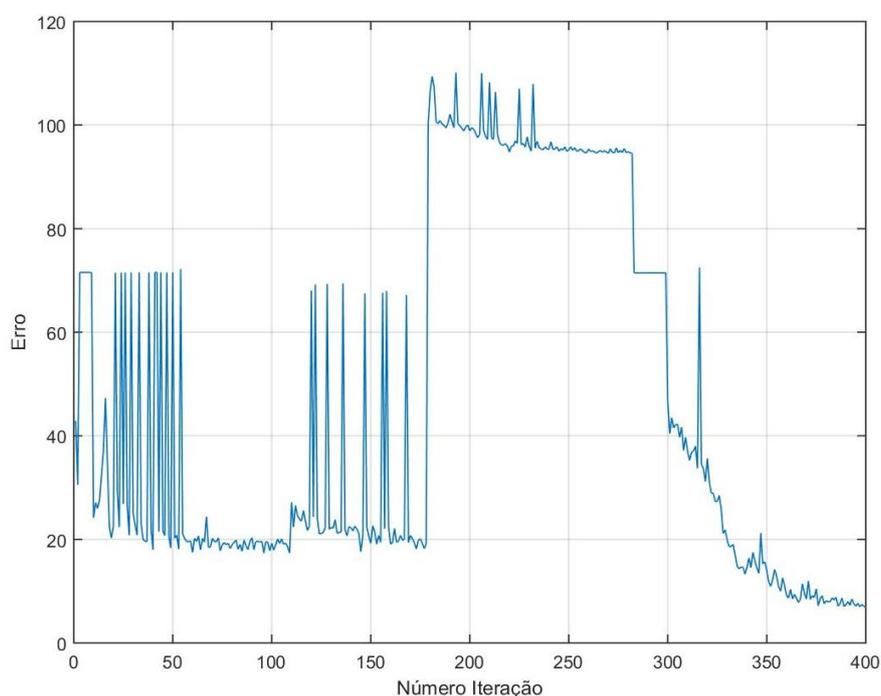
Tabela 2. Comparação entre frequências naturais do modelo numérico e experimentais

	Viga inferior				Viga Superior			
	Experimental [Hz]	Numérico [Hz]	Erro (%)	MAC	Experimental [Hz]	Numérico [Hz]	Erro (%)	MAC
$f_{n_1}$	15,29	17,77	16,22	0,98	16,49	15,04	-8,79	0,98
$f_{n_2}$	46,70	49,25	5,46	0,97	41,30	41,76	1,11	0,96
$f_{n_3}$	97,87	97,21	-0,67	0,90	81,29	82,54	1,54	0,72

O critério de confiança modal, *Modal Assurance Criterion* (MAC), permite estimar o grau de correlação (consistência) entre os modos de vibrar experimentais e numéricos (Allemang, 2003; Friswell e Mottershead, 1995). É um indicador estatístico, com a proposta de aferir o caráter da relação entre os modos de vibrar. O MAC apresenta variação entre 0 e 1; se o seu valor é 1, o significado é de que os modos são consistentes, ainda que não necessariamente corretos, e múltiplos entre si. Em oposição, se o valor é 0, o significado é que os modos não são consistentes, ou seja, são linearmente independentes.

A partir da análise das frequências naturais, verifica-se a marcante proximidade entre as respostas dos modelos numérico e experimental. Apesar do erro percentual poder ser considerado significativo para as primeiras frequências naturais, a diferença é inferior a 3Hz em todos os casos. O MAC confirma que os modos de vibrar experimentais e numéricos estão relacionados.

A Fig. 5 expõe o comportamento da função objetivo (erro) durante o processo de atualização estrutural da viga inferior. Salienta-se a grande variação ao longo do processo e a presença de diversos mínimos locais, representados pelo reinício probabilístico da busca, característico do algoritmo de otimização utilizado. O mesmo comportamento é verificado nos modelos em elementos finitos, onde apenas parâmetros materiais são modificados dentro de um intervalo de valores nominais. Na Tabela 3, são relacionados os parâmetros das vigas após atualização.



**Figura 5. Comportamento da função objetivo durante atualização da viga inferior**

A Fig. 6 apresenta uma comparação entre FRFs experimental e numérica, relativas à resposta no sétimo nó da viga inferior sem modificações. O modelo atualizado permitiu reproduzir com razoável acurácia a localização das ressonâncias em frequência bem como as amplitudes correspondentes.

Por fim, a Fig. 7 expõe as FRFs obtidas numericamente para a viga inferior, considerando todos os casos analisados. Nesta figura, também se verifica que as modificações efetuadas alteram significativamente seu comportamento dinâmico da viga, bem como observado no sistema real.

**Tabela 3. Parâmetros das vigas inferior e superior após atualização estrutural**

	Viga inferior	Viga Superior
Espessura ( $t$ ) [mm]	2,13	2,1
Densidade ( $\rho$ ) [kg/m <sup>3</sup> ]	2767,1	2700
Módulo de elasticidade ( $E$ ) [GPa]	63,55	60
Rigidez de mola de torção ( $K_1$ ) [N/m]	64550	40
Rigidez de mola de torção ( $K_2$ ) [N/m]	64550	4648
Razão de amortecimento modal 1 ( $\zeta_1$ )	0,015	0,015
Razão de amortecimento modal 2 ( $\zeta_2$ )	0,013	0,010
Razão de amortecimento modal 3 ( $\zeta_3$ )	0,010	0,001

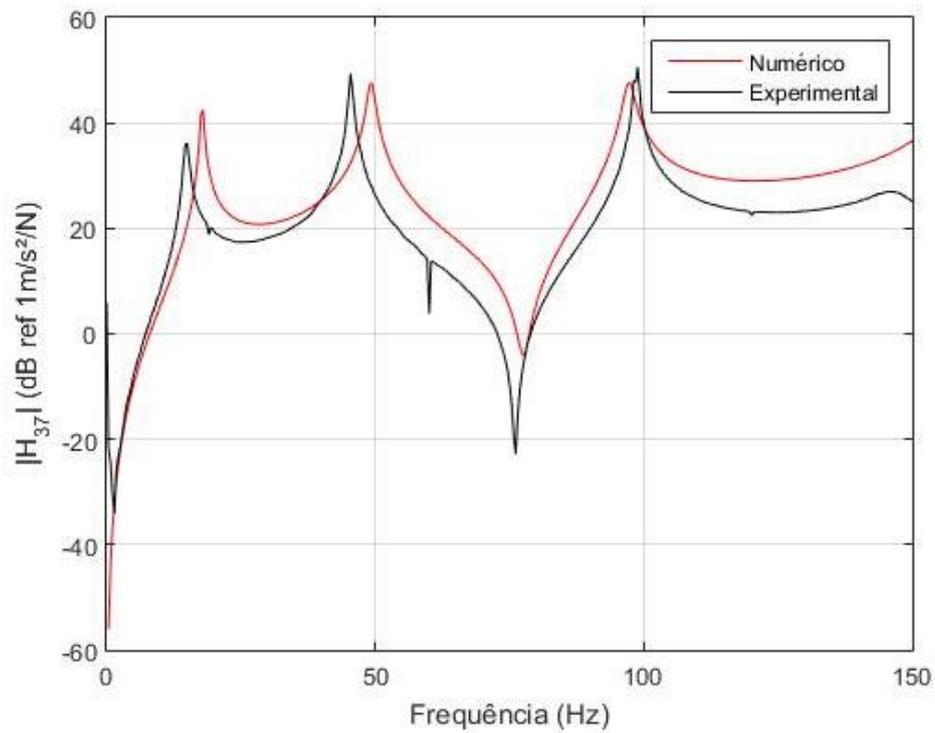


Figura 6. FRFs numérica e experimental da viga inferior sem modificações, com resposta no nó 7

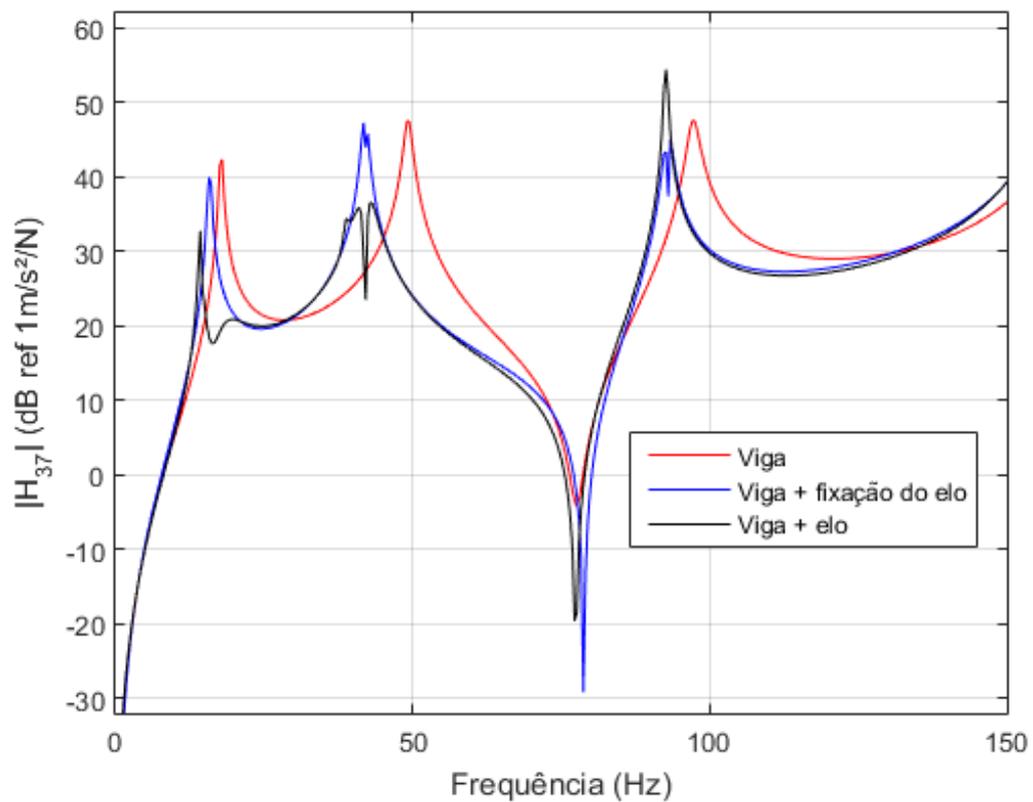


Figura 7. FRFs regeneradas através do modelo em elementos finitos, com resposta no nó 7.

## 4 CONCLUSÕES

Através da análise do comportamento da função objetivo durante o processo de minimização do erro entre a resposta do modelo numérico e a experimental, nota-se que a atualização estrutural é uma ferramenta útil para a melhoria da representação do comportamento dinâmico de modelos numéricos. A grande variação da função objetivo utilizada, por vezes superior a 600%, mesmo com o uso de valores nominais para parâmetros do material, e a presença de diversos mínimos locais, indicam a complexidade de se obter um modelo adequado sem o uso de uma metodologia estruturada.

O modelo numérico em estudo apresenta um alto grau de simplificação. Todavia, é possível alcançar uma boa representação do comportamento dinâmico de interesse, mesmo após as modificações inseridas. Isso é particularmente constatado em relação à localização das frequências de ressonância, mesmo com o elo instalado. Ou seja, mostra-se que um modelo simplificado atualizado pode ser representativo o suficiente para incorporar modificações estruturais por elo viscoelástico e apresentar resposta, de forma geral, consistente à experimentada pelo sistema físico correspondente.

## AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Paraná (UFPR), pela cessão de instalações e equipamentos utilizados na aquisição de dados experimentais.

## REFERÊNCIAS

Allemang, R. J., 2003, The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Journal of sound and vibration*, v. 37, n. 8, pp. 14-23.

Balbino, F. O., 2012, *Análise estatística de dados experimentais na caracterização dinâmica de materiais viscoelásticos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Paraná.

Balmes, E., 1993, A finite element updating procedure using frequency response functions - Applications to the MIT/SERC interferometer testbed. *11<sup>th</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Kissimmee, FL. pp. 176-182.

Ewins, D. J., 2000, *Modal testing: theory, practice and application*. Research Studies Press Ltd.

Fish, J; Belytschko, T., 2009, *Um primeiro curso de elementos finitos*. LTC, Rio de Janeiro.

Friswell M., Mottershead, J. E., 1995, *Finite element model updating in structural dynamics*. Springer Science & Business Media.

Lopes, E. M. O., 1998, *On the experimental response reanalysis of structures with elastomeric materials*. Tese de Doutorado. University of Wales Cardiff, UK.

Luersen, M. A., Le Riche, R., Guyon F., 2004, A constrained globalized and bounded Nelder–Mead method for engineering optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol 27, n. 1, pp. 43-54.

Mottershead, J. E., Friswell, M. I., 1993, Model updating in structural dynamics: a survey. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, n. 2, pp. 347-375.

Nashif, A. D., Jones, D. I. G., Henderson, J. P., 1985, *Vibration Damping*, John Wiley & Sons.