



MODELAGEM E SIMULAÇÃO NUMÉRICA BIDIMENSIONAL DA DEFORMAÇÃO TÉRMICA DE UM SÓLIDO

Camila Justino Ferreira do Nascimento

Ícaro Yago Rodrigues Oliveira

Fábio Alfaia da Cunha

camila.cemi@gmail.com

icaroyrodrigues@gmail.com

fabioalfaia@unb.br

Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília, 7244-240, Gama, Brasília-DF.

Resumo. *O estudo de máquinas térmicas tem se intensificado bastante nas últimas décadas. De modo geral as máquinas térmicas sofrem dilatações durante sua operação e o entendimento do processo combinado de deformação térmica e transferência de calor torna o projeto bem mais preciso. Por conta do exposto, o presente trabalho tem por objetivo modelar e simular o processo de deformação térmica de um sólido em duas dimensões. O modelo matemático utilizado para a deformação bidimensional é derivado do equilíbrio mecânico para tensões em um volume de controle. As equações diferenciais resultantes são discretizadas pelo método de volumes de controle baseado em elementos e o conjunto de equações algébricas resultantes é resolvido no software MATLAB. O código de simulação, produto deste trabalho, é verificado através de comparações de resultados simulados e experimentais obtidos na literatura. Essa comparação foi feita por meio de dois casos testes, que envolvem problemas como restrições, aplicações de força e tensões originadas por diferença de temperatura. Os resultados encontrados foram condizentes com os dados da literatura.*

Keywords: *Simulação Numérica, Deformação Térmica, Sólido, CVFEM.*

1 INTRODUÇÃO

Projetar é uma atividade fundamental da engenharia, e no desenvolvimento de um projeto conhecer o comportamento dos sistemas físicos que se deseja utilizar é de extrema importância (FILIPPINI, 2011). Existem algumas formas de se avaliar o comportamento físico e mecânico dos sistemas, seja por meio de modelos matemáticos ou por meio de modelos físicos (geralmente dados experimentais, equações empíricas, entre outros). Os avanços científicos e tecnológicos e a comparação entre esses modelos têm motivado e contribuído para um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos, propiciando modelagens realísticas, confiáveis e de aplicações práticas na engenharia, muito mais econômicas do que os modelos físicos (SORIANO, 2013).

A análise desses modelos matemáticos pode trazer informações valiosas para o projeto. A solução das equações habitualmente requer o uso de métodos numéricos (quando encontrar a solução analítica é extremamente complexo ou impossível) (FILIPPINI, 2011). Os primeiros métodos que surgiram foram: o Método das Diferenças Finitas (FDM) e o Método dos Elementos Finitos (FEM).

O princípio fundamental do FDM é aproximar através de expressões algébricas cada termo do modelo matemático em cada nó da malha. Este método foi empregado na solução de problemas de mecânica dos fluídos (FERREIRA, 2004; FILIPPINI, 2011). Enquanto o FEM é baseado no método dos deslocamentos e/ou em modelos de equilíbrio, e é empregado usualmente em problemas de mecânica estrutural (AZEVEDO, 2003).

Por volta de 1980, o método de volumes finitos baseado em elementos foi introduzido por Baliga e Patankar com intuito de se resolver escoamentos bidimensionais descritos pelas equações de Navier-Stokes (HURTADO, 2005; VARANASI, 2006). Alguns anos depois a metodologia foi estendida para a resolução de problemas mais gerais de mecânica dos fluidos e transferência de calor. O método foi nomeado pelos autores como Control-Volume Finite Element Method (CVFEM) e será o método utilizado no presente trabalho.

Diversos estudos foram realizados dentro da área de transferência de calor, dilatação térmica e avaliação do campo de tensões. Como o de Fryer et al (1991), no qual é apresentado um método de volume de controle para resolver as equações de tensão-deformação elástica em duas dimensões em malhas não estruturadas, sendo aplicado para alguns casos envolvendo restrições, tensões aplicadas e tensões originadas de um gradiente de temperatura. O método sugerido no estudo foi comparado com um método de elementos finitos clássico, e apresentou resultados satisfatórios. Todavia, esse apresentava um tempo de execução maior, devido a quantidade de iterações realizadas. Como proposta futura sugeriu-se aplicar o método para analisar as deformações térmicas e avaliar o seu desempenho

Um estudo similar foi feito por Salinas et al. (2010), onde realizou-se uma simulação que avalia as tensões resultantes do processo de secagem de madeira, no qual são apresentados três casos: um relacionado a transporte de matéria, um relacionado a difusão de calor e tensões térmicas para a verificação do código e, por fim a aplicação do código produto em um processo de secagem da madeira.

Outro trabalho que busca mostrar a eficiência do método de volume finito com base em elementos para solução de problemas estruturais foi realizado por Filippini, Maliska e Vaz Junior (2010), e apresentou resultados satisfatórios quando comparados aos obtidos numericamente na literatura.

Esse trabalho tem como intuito colaborar com a questão de modelagem e simulação numérica bidimensional da deformação térmica de um sólido.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

O modelo apresentado neste trabalho foi baseado nos modelos apresentados por Filippini (2011), Soriano e Lima (2006), Byars e Snyder (1969) e Budynas (1999).

Para os casos que serão estudados no presente trabalho algumas premissas simplificadoras foram consideradas. São elas:

- Isotropia: que é a particularidade dos materiais que possuem as mesmas propriedades físicas em todas as direções;
- O material é elástico linear (linearidade física) e os deslocamentos e as deformações são infinitesimais (linearidade geométrica);
- As forças de inércia e de amortecimento que podem ser desenvolvidas durante o carregamento da estrutura são desprezíveis;
- O material será tratado como um meio contínuo (desconsidera-se a microestrutura do material).

Devido à hipótese de meio contínuo, estabelece-se uma relação entre os deslocamentos e as deformações. Considera-se um corpo deformável (de uma geometria qualquer) e cria-se um vetor u que denotará o deslocamento de cada ponto da geometria como uma função contínua da posição inicial. Logo, para cada ponto x da peça haverá um vetor $u(x)$.

Partindo da equação de conservação do momento linear, que afirma que se a resultante das forças externas que atuam sobre um sistema for nula o momento total deste sistema se conserva, pode-se escrever que a variação do tensor tensão de Cauchy é nula, ou seja:

$$\Delta\sigma_{ij} = 0 \quad (1)$$

A variação do tensor tensão de Cauchy também pode ser escrito em forma de suas componentes, como:

$$\Delta\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx} & \Delta\sigma_{yx} & \Delta\sigma_{zx} \\ \Delta\sigma_{yx} & \Delta\sigma_{yy} & \Delta\sigma_{yz} \\ \Delta\sigma_{zx} & \Delta\sigma_{zy} & \Delta\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ainda segundo o princípio de conservação do momento linear e angular, quando o corpo não está sujeito a nenhuma interação com forças externas, o tensor tensão é simétrico, ou seja:

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ji} \quad (3)$$

Devido às hipóteses de linearidade geométrica e física pode-se utilizar a relação conhecida como Lei de Hooke Generalizada. A mesma pode ser escrita em termos do tensor tensão de Cauchy e do Tensor Deformação infinitesimal, tem-se a relação tensão-deformação:

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta\epsilon_{kl} \quad (4)$$

Sendo

$$\Delta\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(\Delta u_{kl} + \Delta u_{lk}) \quad (5)$$

Onde:

- \mathbf{u}_k é o vetor deslocamento [m] e o tensor deformação infinitesimal também é submetido as condições de simetria, ou seja:

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon_{lk} \quad (6)$$

Já o termo \mathbf{C}_{ijkl} é o tensor elástico clássico de 4ª ordem e apresenta originalmente 81 componentes. Ao aplicar a condição de simetria do tensor tensão de Cauchy o número de componentes se reduz a 36 e temos que: $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. A relação necessária para um material elástico linear é $C_{(ij)(kl)} = C_{(lk)(ij)}$, reduzindo o número de componentes independentes para 21. O número de componentes independentes também está relacionado ao número de planos de simetria. Devido a hipótese de sólido isotrópico, o tensor \mathbf{C}_{ijkl} possui 2 componentes independentes e 3 planos de simetria. Nesse caso a lei de Hooke generalizada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{xx} - C_{xy}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{xx} - C_{xy}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{xx} - C_{xy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (7)$$

simétrico

As componentes independentes serão representadas pelos parâmetros de Lamé, que são:

$$\lambda = C_{xy} \quad (8)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(C_{xx} - C_{xy}) \quad (9)$$

Substituindo os parâmetros de Lamé (μ e λ), podemos reescrever a matriz constitutiva do material:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

simétrico

Em notação indicial tem-se:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (11)$$

Sendo, δ_{mn} conhecido com delta de kronecker, onde:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (12)$$

Substituindo (10) em (4) temos:

$$\Delta\sigma_{ij} = [\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})]\Delta\varepsilon_{kl} \quad (13)$$

Resultando em:

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} \quad (14)$$

O índice mudo kk representa os eixos do sistema de coordenadas, no caso do sistema cartesiano kk assume xx, yy e zz.

As constantes de Lamé são usualmente escritas em função do módulo de Young E (N/m^2), que é um parâmetro mecânico que proporciona uma medida da rigidez de um material sólido, e do Coeficiente de Poisson ν , que mede a deformação transversal (em relação à direção longitudinal de aplicação da carga) de um material homogêneo e isotrópico. As constantes de Lamé podem ser reescritas como:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (16)$$

A matriz constitutiva do material pode ser reescrita em função do Módulo de Young e do coeficiente de Poisson e é conhecida como Equação constitutiva do material:

$$C_{ijkl} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Caso o corpo esteja submetido a uma variação de temperaturas a equação 14 deve ser acrescida do termo de deformações térmicas e pode ser escrita como:

$$\Delta\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\delta_{ij}\Delta\varepsilon_{kk} + \frac{E}{(1+\nu)}\Delta\varepsilon_{ij} + \beta(T - T_{ref})\delta_{ij} \quad (18)$$

Onde:

- T_{ref} é a temperatura de referência em K

- β é expresso como uma relação entre o módulo de Young, o coeficiente de Poisson e o coeficiente linear de expansão térmica α , como:

$$\beta = -\frac{E}{1-2\nu}\alpha_i \quad (19)$$

- $T-T_{\text{ref}}$ também pode ser chamado de ΔT , por representar a variação da temperatura.

Apesar de a equação 18 estar em uma forma simplificada, é importante ressaltar que a mesma pode ser encontrada em muitas aplicações e descreve muito bem o comportamento de muitos materiais.

No caso de análises bidimensionais existem dois caminhos a se seguir, o estado de deformações planas e o estado de tensões planas, que serão explicados a seguir.

2.1 Estado Plano de Tensões (ETP)

Quando a espessura de um corpo é muito pequena comparada com as outras dimensões do mesmo, pode-se utilizar a aproximação de que não ocorre variação das tensões na direção z , o que significa que as tensões σ_{zz} , σ_{xz} e σ_{yz} podem ser desconsideradas em presença das outras tensões, ou seja:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (20)$$

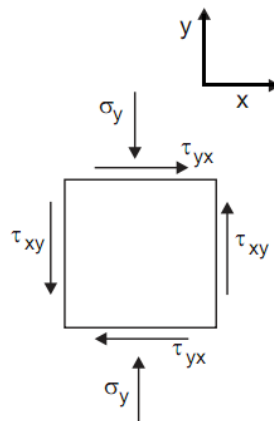


Figura 1: Estado plano de tensões (Fonte:Própria)

As tensões não nulas são funções apenas de x e y e são representadas por:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

As componentes correspondentes de deformações são:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Embora as tensões na direção z sejam consideradas nulas, a deformação na mesma não será nula e poderá ser calculada de acordo com as deformações nas direções x e y , como:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (23)$$

Por ser um material linear, elástico e isotrópico a lei de Hooke pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

3 METODOLOGIA NUMÉRICA

Conforme descrito no tópico anterior, o modelo matemático para a deformação bidimensional é originado a partir do equilíbrio mecânico aplicado em cada ponto do domínio, na ausência de forças internas do corpo, sendo assim, as seguintes equações de equilíbrio podem ser aplicadas:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

De forma vetorial pode-se escrever $\nabla \cdot \sigma_i = 0$, com i variando em 1 e 2, resultando nos esforços normais as direções x (σ_1) e y (σ_2), e os esforços tangenciais ao plano xy (τ_{xy}, τ_{yx}). Sendo que os esforços tangenciais possuem o mesmo valor, devido ao estado de equilíbrio. Então, as equações tornam-se:

$$\sigma_1 = (\sigma_{xx}, \tau_{xy})(Pa) \quad (27)$$

$$\sigma_2 = (\tau_{yx}, \sigma_{yy})(Pa) \quad (28)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} (Pa) \quad (29)$$

Este trabalho utilizará método de volumes de controle baseado em elementos para discretizar as equações diferenciais. No método todos os cálculos serão baseados nos elementos finitos. As integrais sobre os elementos são representadas por matrizes locais. A integração sobre domínio inteiro é representada por matrizes globais que são obtidas somando-se as contribuições de cada elemento, ou seja, de cada matriz local. Este procedimento facilita a obtenção da matriz global e não afeta o princípio de conservação, pois quando a contribuição de todos os elementos for contabilizada a contribuição de todos os volumes de controle também terá sido feita.

3.1 Integração das equações sobre os volumes de controle

Malha de Volumes de Controle

O primeiro passo do método para a realização de uma simulação está associado à geração da geometria do domínio e de uma malha. A malha é basicamente uma representação numérica do domínio geométrico em que se resolve o problema. Para criação da malha o domínio é dividido em elementos. Neste trabalho serão utilizados elementos triangulares (Fig. 2a). A malha de volumes de controle é obtida pelo método das medianas a partir da malha de elementos finitos. Os volumes de controle poligonais são criados ao redor de cada nó pertencente ao domínio de cálculo, ver Fig. 2(b). Em cada nó da malha a variável dependente é armazenada.

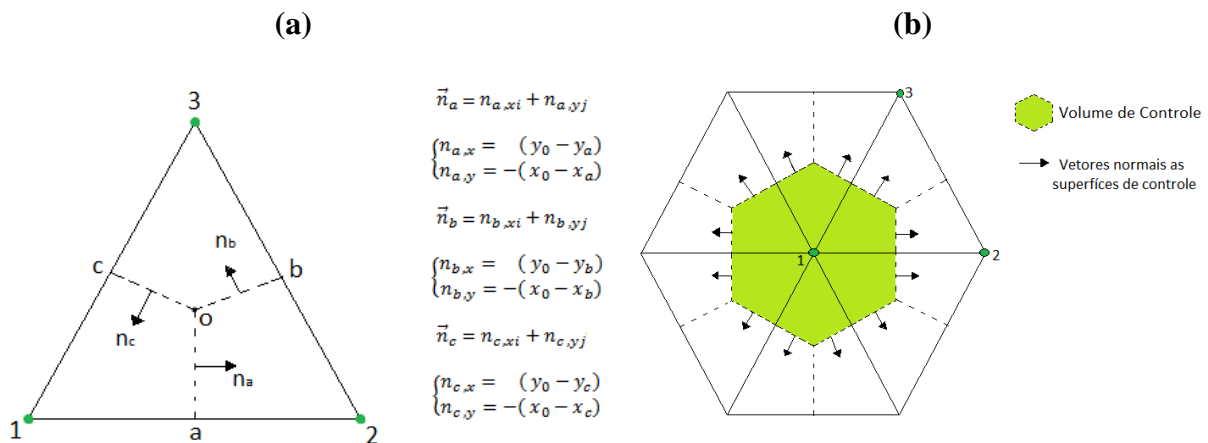


Figura 2: a) Elemento finito triangular. b) Volume de controle poligonal.

Procedimento de Integração

A integração da equação de interesse é apresentada a seguir:

$$\int_{\forall} \nabla \cdot \sigma_i d\forall = \oint_{\Omega} \sigma_i \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0 \quad (30)$$

Onde, \forall - volume de controle. Ω - contorno do volume de controle e \mathbf{n} - vetor unitário normal externo a Ω .

Analisando somente o lado direito da Eq. (30):

$$\oint_{\Omega} \sigma_i \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0, \text{ com } (i = 1,2) \quad (31)$$

As integrais devem ser realizadas sobre toda a superfície de controle associada ao volume de controle, conforme Fig. 2(b). Porém, para facilitar o desenvolvimento do método as integrais sobre as superfícies fechadas são obtidas a partir da soma de integrais sobre os segmentos internos dos elementos: segmento “a-o”, segmento “b-o” e segmento “c-o”, ver Fig. 2(a). Assim, os cálculos são baseados nas integrais sobre os segmentos internos aos elementos:

$$\oint_{\Omega_1} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \int_{\Omega_{ao}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Omega_{oc}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA \quad (32)$$

+ contribuições de outros elementos associados ao volume de controle = 0

Considerando $\Omega_{ac} = \Omega_{ac} \cup \Omega_{oc}$, $\Omega_{ba} = \Omega_{bo} \cup \Omega_{oa}$ e $\Omega_{cb} = \Omega_{co} \cup \Omega_{ob}$ e σ_i constante sobre segmentos “a-o”, “b-o” e “c-o”, tem-se:

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{ao} + \sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{oc} \quad (33)$$

$$\int_{\Omega_{ba}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} + \sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{oa} \quad (34)$$

$$\int_{\Omega_{cb}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} + \sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{ob} \quad (35)$$

Com $A_n^{ao} = A_n^{oa} = \int_{\Omega_{ao}} dA$, $A_n^{oc} = A_n^{co} = \int_{\Omega_{oc}} dA$ e $A_n^{ao} = A_n^{oa} = \int_{\Omega_{ao}} dA$.

Existe também uma condição de simetria em relação ao eixo, então nota-se que:

$$\sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{ao} = -\sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{oa} \quad (36)$$

$$\sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} = -\sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{ob} \quad (37)$$

$$\sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} = -\sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{oc} \quad (38)$$

Substituindo as equações (36), (37) e (38) em (33), (34) e (35), encontra-se:

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{ao} - \sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} \quad (39)$$

$$\int_{\Omega_{ba}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} - \sigma_{ia} \cdot \mathbf{n} A_n^{oa} \quad (40)$$

$$\int_{\Omega_{cb}} \sigma_i \cdot \mathbf{n} dA = \sigma_{ic} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} - \sigma_{ib} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} \quad (41)$$

Escrevendo de forma estendida para cada segmento interno ao elemento, tem-se as equações apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Equações estendidas para cada segmento do volume de controle

SEGMENTO	EQUAÇÕES
A-O	$\sigma_{1a} \cdot \mathbf{n} A_n^{ao} = \sigma_{xxa} n_{ax} + \tau_{xya} n_{ay} \quad (42)$
	$\sigma_{2a} \cdot \mathbf{n} A_n^{ao} = \tau_{yxa} n_{ax} + \sigma_{yya} n_{ay} \quad (43)$
B-O	$\sigma_{1b} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} = \sigma_{xxb} n_{bx} + \tau_{xyb} n_{by} \quad (44)$
	$\sigma_{2b} \cdot \mathbf{n} A_n^{bo} = \tau_{yxb} n_{bx} + \sigma_{yyb} n_{by} \quad (45)$
C-O	$\sigma_{1c} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} = \sigma_{xxc} n_{cx} + \tau_{xyc} n_{cy} \quad (46)$
	$\sigma_{2c} \cdot \mathbf{n} A_n^{co} = \tau_{yxc} n_{cx} + \sigma_{yyc} n_{cy} \quad (47)$

Além disso, sabe-se que:

$$\sigma_{xx} = D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{xx_0} . \quad (48)$$

$$\sigma_{yy} = D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_{yy_0} . \quad (49)$$

$$\tau_{xy} = D_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{xy_0} . \quad (50)$$

Somente os procedimentos numéricos associados ao nó 1 serão apresentados daqui para frente, ou seja, somente os procedimentos associados aos segmentos “a-o” e “o-c”. Porém, estes mesmos procedimentos se aplicam a superfície associada ao nó 2, composta pelos segmentos “b-o” e “o-a”, e superfície associada ao nó 3, composta pelos segmentos “c-o” e “o-b”.

Prosseguindo, substituindo as equações (48), (49) e (50) nas equações presentes no Quadro 1, somente segmentos “a-o” e “o-c”, encontra-se:

$$\sigma_{1a} \cdot \mathbf{nA}_n^{ao} = \left(D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_a n_{ax} + \left(D_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_a n_{ay} + \left(\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay} \right)_a . \quad (51)$$

$$\sigma_{2a} \cdot \mathbf{nA}_n^{ao} = \left(D_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_a n_{ax} + \left(D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_a n_{ay} + \left(\tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay} \right)_a . \quad (52)$$

$$\sigma_{1c} \cdot \mathbf{nA}_n^{co} = \left(D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_c n_{cx} + \left(D_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_c n_{cy} + \left(\sigma_{xx_0} n_{cx} + \tau_{xy_0} n_{cy} \right)_c . \quad (53)$$

$$\sigma_{2c} \cdot \mathbf{nA}_n^{co} = \left(D_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)_c n_{cx} + \left(D_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_c n_{cy} + \left(\tau_{xy_0} n_{cx} + \sigma_{yy_0} n_{cy} \right)_c . \quad (54)$$

Aproximação das variações de u e v com base nos elementos

A aproximação da variação de u e de v é realizada sobre os elementos finitos. A aproximação de variação linear é uma escolha apropriada para este caso. Assim, para uma variável genérica ϕ tem-se:

$$\phi = Ax + By + C . \quad (55)$$

Onde: A, B e C são constantes obtidas em função dos valores nodais e u, v, x e y.

$$A = [Y_{23}\phi_1 + Y_{31}\phi_2 + Y_{12}\phi_3] / D . \quad (56)$$

$$B = [X_{32}\phi_1 + X_{13}\phi_2 + X_{21}\phi_3] / D . \quad (57)$$

$$C = [(X_2Y_3 - X_3Y_2)\phi_1 + (X_3Y_1 - X_1Y_3)\phi_2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\phi_3] / D . \quad (58)$$

$$D = X_2Y_3 - X_3Y_2 + X_3Y_1 - X_1Y_3 + X_1Y_2 - X_2Y_1 . \quad (59)$$

Onde: $Y_{ij} = Y_i - Y_j$ e $X_{ij} = X_i - X_j$.

Percebe-se que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = A$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y} = B$. Assim, as derivadas de u e v podem ser aproximadas da seguinte forma: $A_u = \frac{\partial u}{\partial x}$, $B_u = \frac{\partial u}{\partial y}$, $A_v = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $B_v = \frac{\partial v}{\partial y}$

Substituindo as derivadas nas equações (51), (52), (53) e (54) e isolando os valores nodais de u e v :

$$\begin{aligned} \sigma_{1a} \cdot \mathbf{n}A_n^{ao} = & \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{23} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{32} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{u1}} u_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{31} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{13} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{u2}} u_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{12} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{21} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{u3}} u_3 + \\ & \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{32} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{23} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{v1}} v_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{13} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{31} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{v2}} v_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{21} n_{ax} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{12} n_{ay} \right)}_{A_{1a}^{v3}} v_3 + (\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay})_a \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2a} \cdot \mathbf{n}A_n^{ao} = & \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{32} n_{ax} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{23} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{u1}} u_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{13} n_{ax} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{31} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{u2}} u_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{21} n_{ax} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{12} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{u3}} u_3 \\ & + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{23} n_{ax} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{32} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{v1}} v_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{31} n_{ax} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{13} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{v2}} v_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{12} n_{ax} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{21} n_{ay} \right)}_{A_{2a}^{v3}} v_3 + (\tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay})_a \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1c} \cdot \mathbf{n}A_n^{co} = & \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{23} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{32} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{u1}} u_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{31} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{13} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{u2}} u_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{11}}{D^u} Y_{12} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^u} X_{21} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{u3}} u_3 \\ & + \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{32} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{23} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{v1}} v_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{13} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{31} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{v2}} v_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{12}}{D^v} X_{21} n_{cx} + \frac{D_{33}}{D^v} Y_{12} n_{cy} \right)}_{A_{1c}^{v3}} v_3 + (\sigma_{xx_0} n_{cx} + \tau_{xy_0} n_{cy})_c \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2c} \cdot \mathbf{n}A_n^{co} = & \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{32} n_{cx} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{23} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{u1}} u_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{13} n_{cx} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{31} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{u2}} u_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^u} X_{21} n_{cx} + \frac{D_{21}}{D^u} Y_{12} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{u3}} u_3 \\ & + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{23} n_{cx} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{32} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{v1}} v_1 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{31} n_{cx} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{13} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{v2}} v_2 + \underbrace{\left(\frac{D_{33}}{D^v} Y_{12} n_{cx} + \frac{D_{22}}{D^v} X_{21} n_{cy} \right)}_{A_{2c}^{v3}} v_3 + (\tau_{xy_0} n_{cx} + \sigma_{yy_0} n_{cy})_c \end{aligned} \quad (63)$$

Substituindo os termos sublinhados pelas respectivas constantes, as equações ficam da seguinte forma:

$$\sigma_{1a} \cdot \mathbf{n}A_n^{ao} = A_{1a}^{u1} u_1 + A_{1a}^{u2} u_2 + A_{1a}^{u3} u_3 + A_{1a}^{v1} v_1 + A_{1a}^{v2} v_2 + A_{1a}^{v3} v_3 + (\sigma_{xx_0} n_{ax} + \tau_{xy_0} n_{ay})_a \quad (64)$$

$$\sigma_{2a} \cdot \mathbf{n}A_n^{ao} = A_{2a}^{u1} u_1 + A_{2a}^{u2} u_2 + A_{2a}^{u3} u_3 + A_{2a}^{v1} v_1 + A_{2a}^{v2} v_2 + A_{2a}^{v3} v_3 + (\tau_{xy_0} n_{ax} + \sigma_{yy_0} n_{ay})_a \quad (65)$$

$$\sigma_{1c} \cdot \mathbf{n}A_n^{co} = A_{1c}^{u1} u_1 + A_{1c}^{u2} u_2 + A_{1c}^{u3} u_3 + A_{1c}^{v1} v_1 + A_{1c}^{v2} v_2 + A_{1c}^{v3} v_3 + (\sigma_{xx_0} n_{cx} + \tau_{xy_0} n_{cy})_c \quad (66)$$

$$\sigma_{2c} \cdot \mathbf{n}A_n^{co} = A_{2c}^{u1}u_1 + A_{2c}^{u2}u_2 + A_{2c}^{u3}u_3 + A_{2c}^{v1}v_1 + A_{2c}^{v2}v_2 + A_{2c}^{v3}v_3 + (\tau_{xy_0}n_{cx} + \sigma_{yy_0}n_{cy})_c. \quad (67)$$

Substituindo as equações (64) a (67) na equação (39), e expandindo, encontra-se:

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_1 \cdot \mathbf{n}dA = (A_{1a}^{u1} - A_{1c}^{u1})u_1 + (A_{1a}^{u2} - A_{1c}^{u2})u_2 + (A_{1a}^{u3} - A_{1c}^{u3})u_3 + (A_{1a}^{v1} - A_{1c}^{v1})v_1 + (A_{1a}^{v2} - A_{1c}^{v2})v_2 + (A_{1a}^{v3} - A_{1c}^{v3})v_3 + (\sigma_{xx_0}n_{ax} + \tau_{xy_0}n_{ay})_a - (\sigma_{xx_0}n_{cx} + \tau_{xy_0}n_{cy})_c \quad (68)$$

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_2 \cdot \mathbf{n}dA = (A_{2a}^{u1} - A_{2c}^{u1})u_1 + (A_{2a}^{u2} - A_{2c}^{u2})u_2 + (A_{2a}^{u3} - A_{2c}^{u3})u_3 + (A_{2a}^{v1} - A_{2c}^{v1})v_1 + (A_{2a}^{v2} - A_{2c}^{v2})v_2 + (A_{2a}^{v3} - A_{2c}^{v3})v_3 + (\tau_{xy_0}n_{ax} + \sigma_{yy_0}n_{ay})_a - (\tau_{xy_0}n_{cx} + \sigma_{yy_0}n_{cy})_c \quad (69)$$

Reagrupando os termos, finalmente as deformações podem ficar em função dos seus valores nodais:

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_1 \cdot \mathbf{n}dA = D_{11}^{uu}u_1 + D_{12}^{uu}u_2 + D_{13}^{uu}u_3 + D_{11}^{vv}v_1 + D_{12}^{vv}v_2 + D_{13}^{vv}v_3 + b_1^u. \quad (70)$$

$$\int_{\Omega_{ac}} \sigma_2 \cdot \mathbf{n}dA = D_{11}^{uv}u_1 + D_{12}^{uv}u_2 + D_{13}^{uv}u_3 + D_{11}^{vv}v_1 + D_{12}^{vv}v_2 + D_{13}^{vv}v_3 + b_1^v. \quad (71)$$

As equações (70) e (71) estão associadas à superfície “a-o-c” do nó 1. Já equações associadas à superfície “b-o-a” do nó 2 e superfície “c-o-b” do nó 3 são expressas como:

$$\int_{\Omega_{ba}} \sigma_1 \cdot \mathbf{n}dA = D_{21}^{uu}u_1 + D_{22}^{uu}u_2 + D_{23}^{uu}u_3 + D_{21}^{vv}v_1 + D_{22}^{vv}v_2 + D_{23}^{vv}v_3 + b_2^u. \quad (72)$$

$$\int_{\Omega_{ba}} \sigma_2 \cdot \mathbf{n}dA = D_{21}^{uv}u_1 + D_{22}^{uv}u_2 + D_{23}^{uv}u_3 + D_{21}^{vv}v_1 + D_{22}^{vv}v_2 + D_{23}^{vv}v_3 + b_2^v. \quad (73)$$

$$\int_{\Omega_{cb}} \sigma_1 \cdot \mathbf{n}dA = D_{31}^{uu}u_1 + D_{32}^{uu}u_2 + D_{33}^{uu}u_3 + D_{31}^{vv}v_1 + D_{32}^{vv}v_2 + D_{33}^{vv}v_3 + b_3^u. \quad (74)$$

$$\int_{\Omega_{cb}} \sigma_2 \cdot \mathbf{n}dA = D_{31}^{uv}u_1 + D_{32}^{uv}u_2 + D_{33}^{uv}u_3 + D_{31}^{vv}v_1 + D_{32}^{vv}v_2 + D_{33}^{vv}v_3 + b_3^v. \quad (75)$$

3.2 Sistema global de equações algébricas

Um dos passos mais importantes do método consiste na montagem do sistema global de equações algébricas associadas aos nós da malha, ou seja, associadas aos volumes de controle.

Como base nos D_{ij}^{uu} , D_{ij}^{uv} , D_{ij}^{vv} e D_{ij}^{vu} , das equações (70) a (75) baseado nos elementos, deve-se montar quatro matrizes dos coeficientes globais “ A^{uu} ”, “ A^{vu} ”, “ A^{uv} ” e “ A^{vv} ”, baseadas nos volumes finitos. Assim um sistema de equações é derivado na forma:

$$AU = B$$

Onde A é a matriz dos coeficientes, $A = \begin{bmatrix} A^{uu} & A^{vu} \\ A^{uv} & A^{vv} \end{bmatrix}$, as deformações estão associadas ao vetor $U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, e o vetor $B = \begin{bmatrix} B^u \\ B^v \end{bmatrix}$ armazena os termos independentes.

A solução do sistema algébrico é facilmente obtida no Matlab, $U = A \setminus B$, e fornece os deslocamentos nas posições dos nós da malha. Como apresentado, os deslocamentos nas duas direções são determinados simultaneamente, de forma acoplada.

4 RESULTADOS

O código de simulação foi verificado em dois casos diferentes. As malhas utilizadas neste trabalho foram criadas no software GAMBIT 2.4.6. O computador utilizado para o teste de sensibilidade espacial tinha um processador INTEL CORE i5, 2,2 GHz, 8 GB RAM e sistema operacional Windows 10.1 Home. A versão do MATLAB foi a 8.0.0.783, R2012b.

4.1. Tensões concentradas em um furo-caso 1

Este primeiro exemplo verifica a precisão do código de simulação para o problema de tensões puramente mecânicas. O problema trata de uma placa quadrada plana que é sujeita a uma tensão de tração uniforme na borda direita. No centro da placa existe um pequeno furo circular (Fig. 3a). Devido à simetria do problema, será considerado apenas um quarto da placa (Fig. 3b). A placa possui dimensões 200x200 mm, espessura de 10mm e um furo no meio com diâmetro igual a 20mm. A tensão aplicada na borda direita é de 1N/mm^2 .

Quatro malhas diferentes foram criadas para as simulações, descritas na Tabela 1. A malha grossa e a malha fina são apresentadas na Fig. 4. A malha finíssima só difere da malha fina por apresentar um refinamento de malha na região próxima do furo.

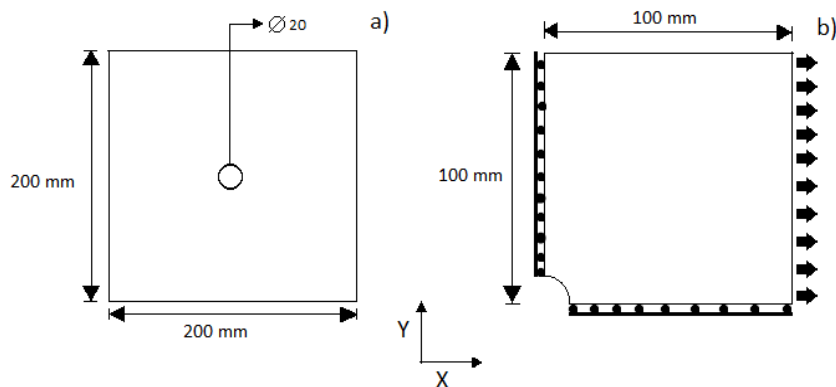


Figura 3: a) Placa plana com pequeno furo no centro. b) 1/4 do domínio devido a simetria do problema.

Tabela1: Parâmetros das malhas utilizadas no caso 1

Malha	Descrição	Nº de nós	Nº de Elementos
1	Grossa	496	910
2	Média	773	1444
3	Fina	1316	2498
4	Finíssima	1566	2962

As propriedades do material estão resumidas no Quadro 2 e as condições de contorno no Quadro 3.

Quadro 2: Propriedades do material

Módulo de Young (E)	210000 n/mm ²
Coefficiente de poisson (ν)	0,29
Coefficiente de expansão térmica (α)	0

Quadro 3: Condições de contorno

$v = 0$	$y = 0$
$u = 0$	$x = 0$

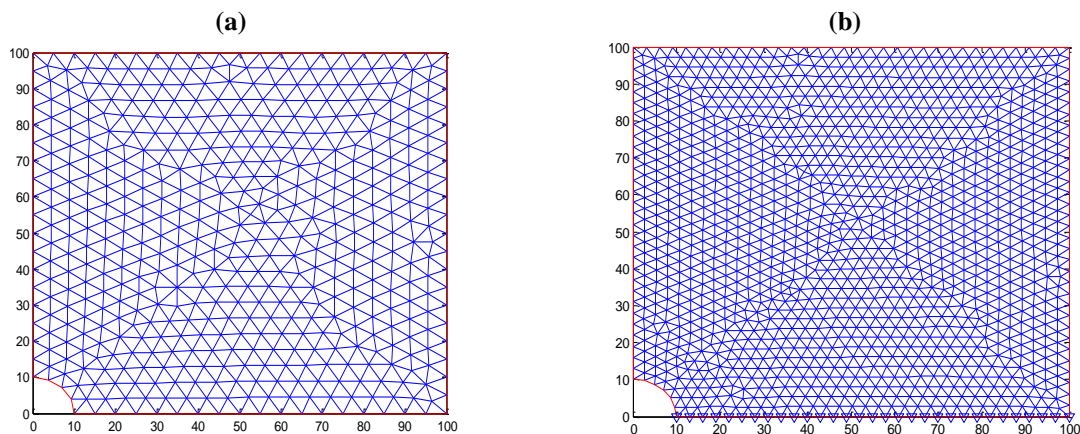


Figura 4: a) Malha grossa e b) Malha fina.

Uma solução clássica para este problema é apresentada por Timoshenko e Goodier (1951), utilizando coordenadas polares e cilíndricas, e será utilizado para verificação dos resultados obtidos no presente trabalho. Os resultados serão comparados também aos resultados apresentados por Voller (2009).

A partir da Fig. 5 é possível observar que o resultado encontrado torna-se mais preciso com o refinamento da malha, e ao observar o tempo de execução entre as malhas, nota-se que o tempo de execução aumentou em cerca de 5% da malha Grossa para a Média, em de 10% da Média para a Fina e em 30% da Fina para Finíssima, então para estudos mais complexos e com mais passos, conclui-se que a malha Fina é a que se torna mais viável por apresentar resultados satisfatórios em relação à precisão e ao tempo de execução.

Tabela 2: Tempos de processamento – Caso 1

Tipo de Malha	Tempo de Execução
Grossa	2,252s
Média	2,370s
Fina	2,646s
Finíssima	3,430s

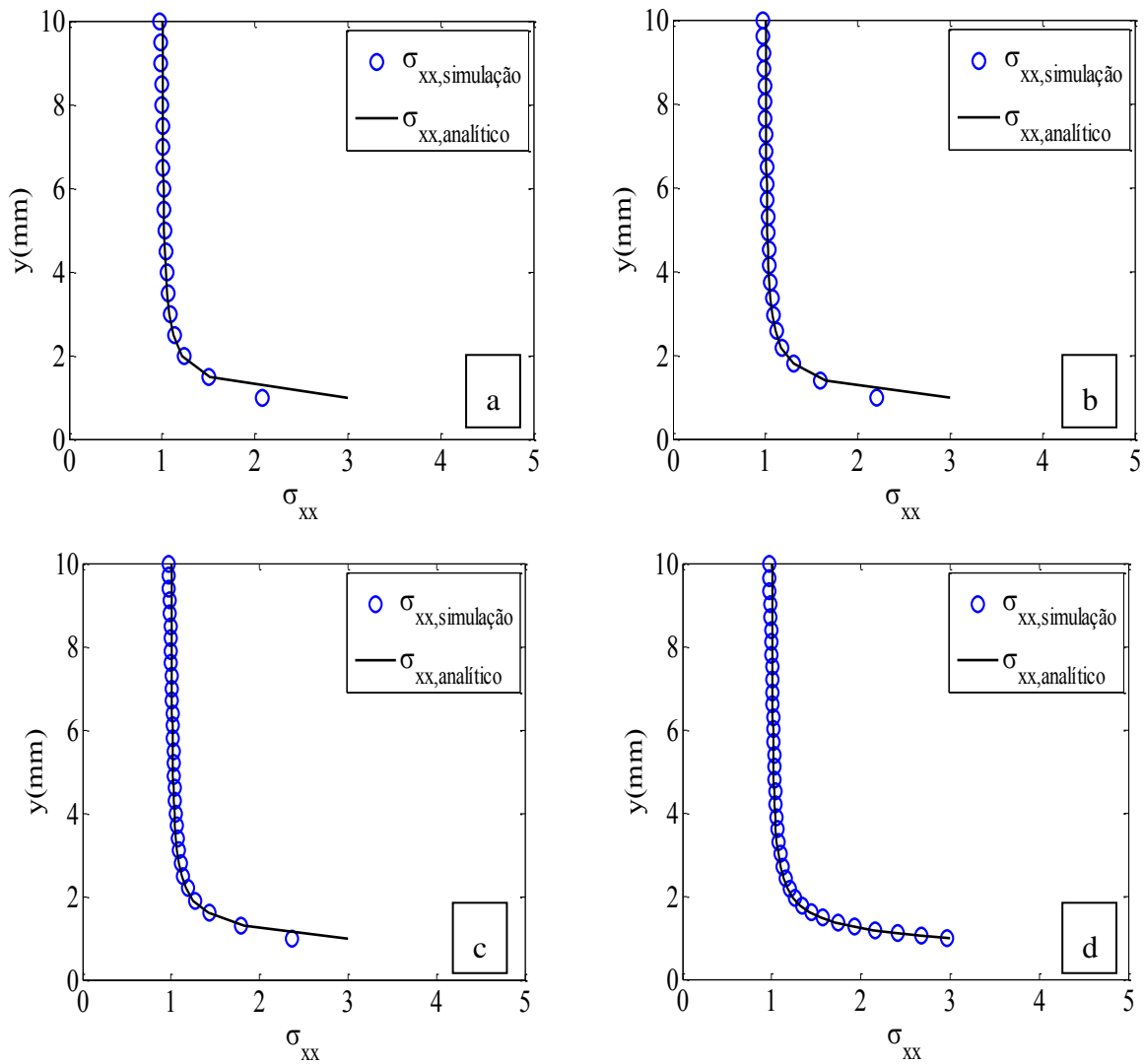


Figura 5: Comparação entre o resultado analítico e o resultado obtido pela simulação. a) Malha grossa. b) Malha média. c) Malha fina. d) Malha finíssima

Após a aplicação da tensão uniaxial, é possível perceber que houve um deslocamento da placa no sentido em que se aplica a tensão, como mostra a Fig. 6. Além da concordância entre o resultado analítico e a simulação numérica, ao comparar com o estudo apresentado por Voller (2009), ver Fig. 6, nota-se a similaridade dos resultados.

Os resultados obtidos para o primeiro caso foram satisfatórios, considerando a proximidade entre a solução analítica e a solução numérica. E também a proximidade qualitativa entre resultado do presente trabalho e do estudo de Voller (2009). Assim, conclui-se que o código de simulação baseado na modelagem apresentada é eficaz na previsão de tensões e sua programação está parcialmente verificada.

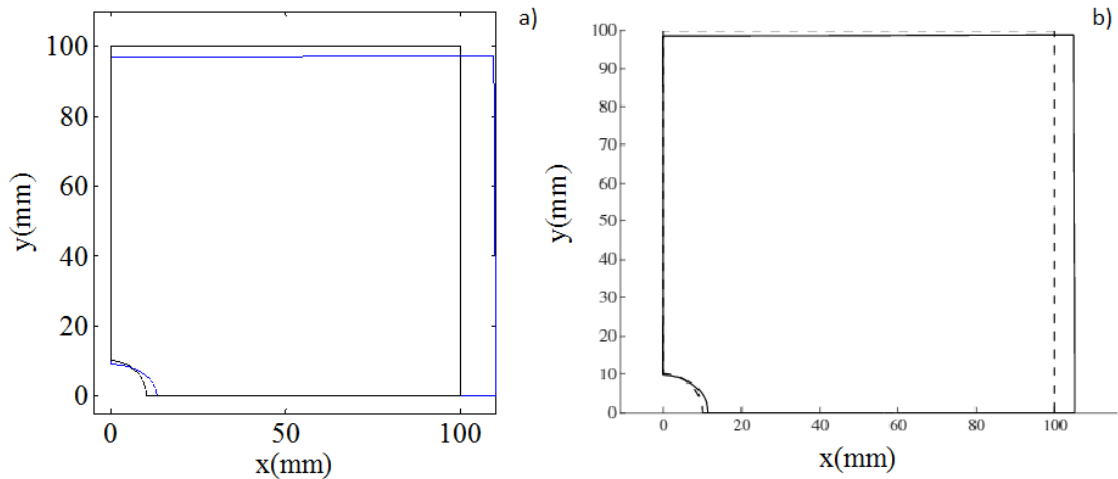


Figura 6: Comparação entre a) Resultado obtido nesse estudo de caso b) Resultado obtido no estudo de Voller (2009)

4.2. Viga submetida a tensões térmicas-caso 2

O caso de uma viga submetida a tensões térmicas é simulado a seguir. O objetivo deste caso é testar a capacidade da modelagem proposta para predição de deformações térmicas. A viga considerada é longa o suficiente no eixo x, comparada às outras direções, o que torna aceitável a utilização do estado plano de tensões. O domínio consiste em uma geometria retangular, com as dimensões de 200x1000 mm, observar Fig. 7.

Quatro malhas foram utilizadas para as simulações, conforme apresentado na tabela 3.

Tabela 3: Parâmetros das malhas utilizadas nos casos 2

Malha	Descrição	Nº de nós	Nº de Elementos
1	Grossa	33	40
2	Média	105	160
3	Fina	369	640
4	Finíssima	8241	16000

Neste caso as tensões eram geradas pela dilatação térmica do material. As deformações foram calculadas da seguinte forma: $\varepsilon_{xx,0} = \alpha\Delta T$ e $\varepsilon_{yy,0} = \alpha\Delta T$. E com base nas deformações as tensões térmicas foram calculadas conforme as equações: $\sigma_{xx,0} = -(D_{11}\varepsilon_{xx,0} + D_{12}\varepsilon_{yy,0})$ e $\sigma_{yy,0} = -(D_{21}\varepsilon_{xx,0} + D_{22}\varepsilon_{yy,0})$. Tais tensões aparecem nas Eqs. (48) e (49).

A distribuição de diferença de temperatura imposta na região do domínio seguia a equação: $\Delta T = \Delta T(y) = \frac{y}{4}$.

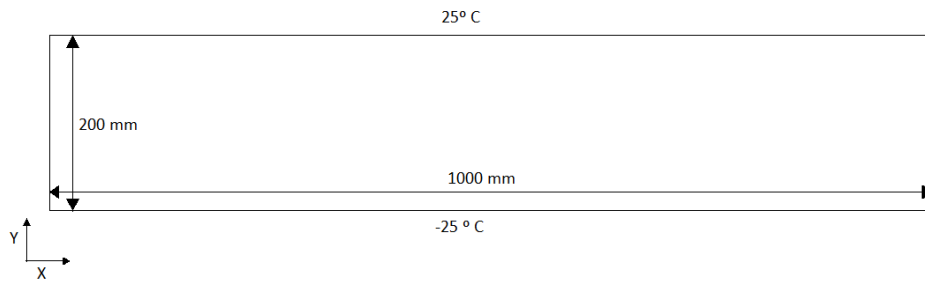


Figura 7: Barra submetida a tensões térmicas

Para este caso o nó central da malha foi fixado tanto na direção x quanto na direção y, identifica pela cor verde na Fig. 8. Além disso, fixaram-se também na direção x todos nós localizados na reta que conectava os pontos vermelhos da Fig. 8.

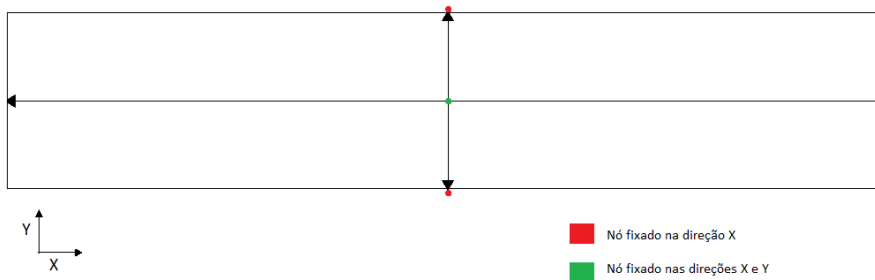


Figura 8: Condições de contorno

As propriedades do material estão resumidas no Quadro 4 e as condições de contorno no Quadro 5.

Quadro 4: Propriedades do material

Módulo de Young (E)	210000 n/mm ²
Coefficiente de Poisson (ν)	0,25
Coefficiente de expansão térmica (α)	0.01

Quadro 5: Condições de contorno

v = 0	x = 500 mm ; y = 0
u = 0	x = 500 mm ; -100 mm ≤ y ≤ 100 mm

A solução analítica para este problema é dada por Boley e Weiner (1967) e será utilizada para comparação nesse estudo. Além disso, os resultados obtidos serão comparados aos resultados apresentados por Fryer (1993).

A Fig. 8 apresenta o resultado gráfico da barra submetida às tensões térmicas: Malha sem deformação e a malha exageradamente deformada.

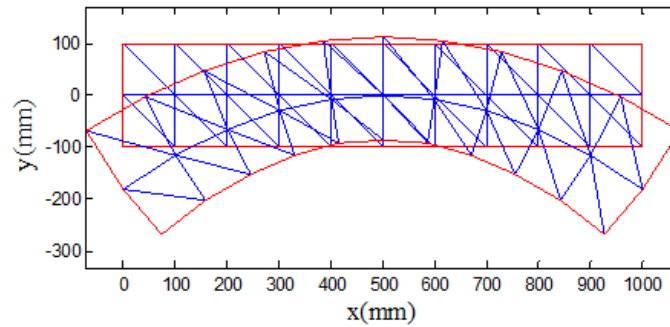


Figura 8: Barra deformada devido a tensões térmicas.

Os resultados calculados pela simulação foram comparados com os dados disponíveis no estudo de Fryer (1991), e podem ser verificados na Tabela 4. Os resultados calculados com o método de volumes finitos coincidem com os valores obtidos com o método de elementos finitos. Além disso, os resultados obtidos com a malha finíssima convergem para o resultado analítico. Os resultados encontrados são satisfatórios e condizentes com a literatura, o que atesta a validade do modelo físico e que o método numérico proposto foi adequadamente programado.

Tabela 4: Comparação entre os resultados obtidos e os disponíveis na literatura

Malha	Deslocamento em u (mm)			Deslocamento em v (mm)		
	Analítico	EF	Obtidos	Analítico	EF	Obtidos
Grossa	-125	-72.9	-72.867	-300	-168	-168.5315
Média	-125	-104.6	-104.627	-300	-249	-249.8779
Fina	-125	-118.8	-118.8228	-300	-285	-285.4468
Finíssima	-125	-	-124.6971	-300	-	-299.3673

Os tempos de processamento de cada malha são mostrados na Tabela 5. Observa-se um aumento significativo do tempo de execução entre a malha Fina e a Finíssima, e ao observar a precisão dos resultados, nota-se que a malha Fina já era precisa o bastante, sendo a mais adequada para estudos mais complexos, transientes, por exemplo, que demandassem mais tempo de execução.

Tabela 5: Tempos de processamento

Tipo de Malha	Tempo de Execução
Grossa	0,834s
Média	0,982s
Fina	1,148s
Finíssima	14,090s

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentada a modelagem e simulação numérica bidimensional da deformação térmica de sólidos isotrópicos.

A discretização das equações diferenciais foi realizada seguindo o método de volumes de controle baseado em elementos. Todos os passos do método de discretização foram cuidadosamente apresentados e um modo de arranjo das matrizes para solução do conjunto de equações foi apresentado.

Um código na linguagem do Matlab foi escrito para a realização das simulações. Devido a facilidade oferecida pelo Matlab, o conjunto de equações algébricas foi resolvido de forma direta e acoplada. Os resultados das simulações foram condizentes com os dados encontrados na literatura. O que atestou que o código de simulação foi adequadamente programado e que o método de volumes de controle é bem sucedido para discretização das equações de tensão-deformação térmica.

Finalmente, a pesar da simplicidade dos casos resolvidos, problemas com geometrias mais complexas podem ser explorados com o método apresentado no presente trabalho, uma vez que não existe limitação de forma para a criação de malhas não estruturadas no espaço bidimensional.

REFERÊNCIAS

- BEER, Ferdinand P. et al. **Estática e Mecânica dos Materiais**. São Paulo: Mcgraw-hill, 2013. 728 p.
- BUDYNAS, Richard G.. **Advanced Strength and Applied Stress Analysis**. 2. ed. Usa: Mcgraw-hill, 1999. 935 p.
- BYARS, Edward F.; SNYDER, Robert D.. **Engineering Mechanics of Deformable Bodies**. 2. ed. Usa: International Textbook Company, 1969.
- FILIPPINI, Gerson; MALISKA, Clovis R.; VAZ JUNIOR, Miguel. **An Element-Based Finite Volume Method For Solid Mechanics Problems**. In: EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, 5, 2010, Lisboa. Eccomas Cfd, 2010.
- FRYER, Y. D. et al. **A control volume procedure for solving the elastic stress-strain equations on an unstructured mesh**. In: APPL. MATH. MODELLING, 15., 1991, Londres.
- HURTADO, Fernando Sandro Velasco. **Uma formulação de volumes finitos baseada em elementos para a simulação do deslocamento bifásico imiscível em meios porosos**. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.
- SILVA, Jadir N.; CARDOSO Sobrinho, José; SAIKI, Emílio T.. **Utilização De Biomassa Na Secagem De Produtos Agrícolas Via Gaseificação Com Combustão Adjacente Dos Gases Produzidos**. Engenharia Agrícola, Jaboticabal, v. 24, n. 2, p.405-411, maio 2004. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/eagri/v24n2/v24n2a20.pdf>>. Acesso em: 25 ago. 2015.
- SORIANO, Humberto Lima. **Estática das Estruturas**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2013. 72 p.
- STRAPASSON, Alexandre Betinardi. **A energia térmica e o paradoxo da eficiência energética: Desafios para um novo modelo de planejamento energético**. 2004. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Pós Graduação em Energia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- VOLLER, Vaughan R. A Plane Stress CVFEM Solution. In: VOLLER, Vaughan R. **Basic Control Volume Finite Element Methods fo Fluids and Solids**. Minnessota: World Scientific, 2009. Cap. 8. p. 106-120