



XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

UM ESTUDO COMPARATIVO ANALÍTICO-NUMÉRICO DO COMPORTAMENTO DE UMA PLACA DE PONTE EM GRELHA SOB AÇÃO DE UM TREM TIPO NORMALIZADO

Augusto Escudero⁽¹⁾

Mauricio Vitali⁽¹⁾

augustogonzalesescudero@gmail.com

vitali.mendes@gmail.com

(1) Mestrando do PECC/UnB – Universidade de Brasília –

Abstract. *O avanço da tecnologia e dos recursos computacionais tem oferecido aos engenheiros uma imensa variedade de programas para o cálculo estrutural, que facilita a análise e o dimensionamento de estruturas, contudo muito dos usuários desconhecem a rotina de cálculo realizada por esses programas e/ou não possuem a sensibilidade, experiência e formação adequada para avaliar os resultados obtidos. Em consequência, soluções analíticas balizadoras do comportamento do fenômeno em questão são de fundamental importância no processo preliminar de avaliação e crítica dos resultados. Neste artigo é feito o estudo analítico e numérico de um tramo (zona) de uma laje de ponte submetida a um carregamento estático que simula a ação um trem tipo regulamentado e recomendado no projeto de pontes. O tramo de laje é modelado como uma placa delgada apoiada em transversinas e/ou longarinas, inicialmente indeformáveis e não solidárias a laje, e submetida a carregamentos parcialmente distribuídos, que simulam as rodas do trem tipo. Para a placa são assumidas as hipóteses da Teoria de Kirchhoff-Love. A análise do caso é feita numericamente pelo Método dos Elementos Finitos, e analiticamente, pela solução de Navier. O software SAP2000 será utilizado para análise do caso via Elementos Finitos. Quanto ao Método analítico de Navier, que representa uma aplicação específica da solução clássica de placas delgadas em dupla série trigonométrica, será associado ao princípio da superposição, onde a solução de uma carga concentrada será estendida ao caso da inclusão das rodas e eixos do trem tipo. São comparadas analítica e numericamente as repostas obtidas para a deflexão e os esforços internos da placa devido a ação de um trem tipo normalizado.*

Keywords: *Elementos finitos; Solução de Navier; Cálculo Analítico e Numérico em Placas; Superposição de efeitos; Trem Tipo.*

1 INTRODUÇÃO

Pontes são obras destinadas a ligar dois pontos separados por obstáculos da natureza, seja o mar, um rio ou um vale entre morros. A travessia destes obstáculos representou para a civilização a ligação entre regiões possibilitando o intercâmbio econômico, cultural e intelectual entre diferentes comunidades. Para a ciência foi um impulso para o desenvolvimento de novos métodos e materiais a serem empregados na sua construção.

Na engenharia as pontes apresentam-se como obras grandiosas e desafiadoras, envolvendo profissionais de diversas áreas no seu projeto e na sua execução. Estes são responsáveis pelos estudos de viabilidade técnica/econômica, ambiental e social para a otimização da obra. No caso específico do projetista a solução adotada para a estrutura deve atender a requisitos de resistência, utilização e custo.

Em pontes projetadas para ter a sua superestrutura formada por tabuleiro em grelha e painéis de concreto as peças pré-moldadas surgem então como uma solução. O seu emprego tem como uma das principais justificativas a redução de custos, consequência do maior racionamento de materiais, reutilização das fôrmas e produção em série. Além do viés econômico há um ganho na qualidade e no controle da execução das peças, assim como o aumento da produtividade do processo construtivo.

A atenção para análise estrutural da superestrutura da ponte, usualmente, se concentra em maior parte na análise de esforços das longarinas e transversinas que formam a grelha do tabuleiro. A etapa da análise dos painéis é feita através de tabelas ou então por softwares, assim existe uma lacuna no conhecimento do engenheiro entre as tabelas e os procedimentos adotados pelos modernos programas de cálculo estrutural. Para se ter segurança que a estrutura idealizada foi modelada corretamente os resultados fornecidos pelo programa devem ser comparados com os resultados obtidos por outros métodos existentes

Neste artigo é analisado um painel pré-moldado de uma ponte, idealizado como uma placa delgada, submetida aos carregamentos de multidão e de um trem tipo TB450. É feito o estudo comparativo entre o método analítico proposto por Navier feito no ambiente do programa MAPLE e o programa SAP2000 que utiliza o Método dos Elementos Finitos para as suas análises, a fim de verificar a correta modelagem do problema.

2 METODOLOGIA

Para a análise do problema é considerada uma ponte de 21 m de comprimento com duas vias de rolamento. Segundo estas características, o Manual de Projeto de Obras de Arte Especiais da DNER 698/100-1996 estabelece que para Cargas de Classe 45 a faixa de rolamento deve ter 3,75 metros e a faixa de acostamento 3 metros somando 6,75 metros de largura para uma via e totalizando 13,5 metros. Por outro lado, a norma NBR 7187/2003 especifica que a espessura de lajes destinadas a passagem de tráfego rodoviário deve ser superior a 15 centímetros, adotando-se para o caso uma espessura de 20 cm. O tabuleiro se encontra apoiado em três longarinas, duas laterais e uma intermediária, em duas transversinas, a cada 7 m, e nos apoios nos extremos, como se apresenta na Figura 1. Sendo um estudo acadêmico não serão consideradas as faixas de pedestre, ciclovia ou barreira de segurança.

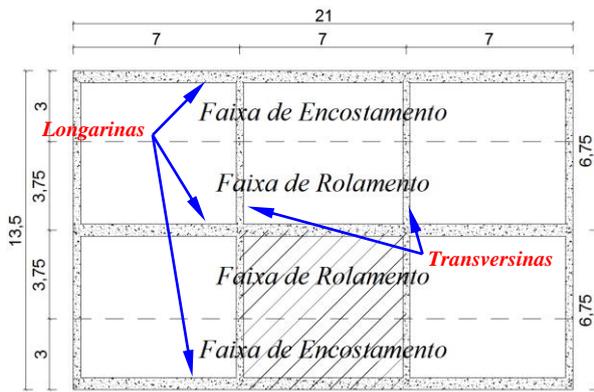


Figura 1. Vista de planta da ponte em estudo.

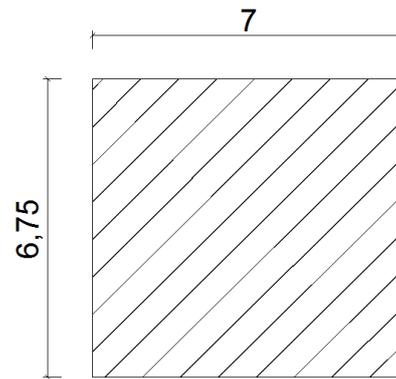


Figura 2. Geometria de um dos painéis centrais.

A ponte possui 6 painéis de 7 m por 6.75 m, ao longo do seu comprimento (Figura 1), e o estudo será focalizado num dos painéis centrais (Figura 2). Os painéis serão considerados pré-moldados apoiados sobre as vigas. Entre estes elementos estruturais não há solidariedade.

A norma NBR 7188/2013 considera nas ações para pontes e viadutos uma carga móvel rodoviária padrão TB450 definida para um veículo tipo de 450 kN, com seis rodas de $P = 75$ kN cada, três eixos de carga afastados entre eles em 1.5 m, com área de ocupação de 18 m², circundada por uma carga uniformemente distribuída de $p = 5$ kN/m² conforme as Figura 3 e Figura 4.

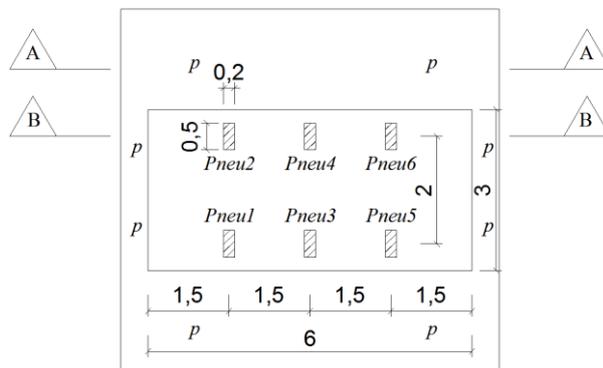


Figura 3. Distribuição dos Carregamentos Estáticos no Painel Central.

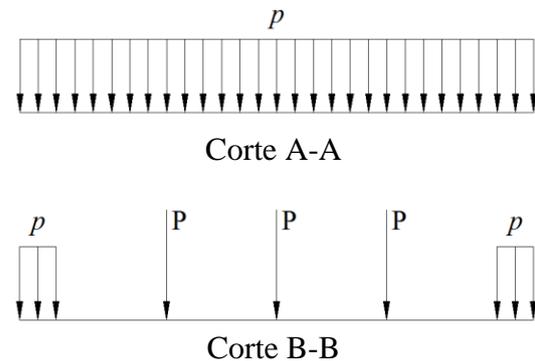


Figura 4. Cortes dos Carregamentos estáticos no Painel Central.

A carga “p” pode assumir qualquer posição em toda a pista, no entanto a carga P assumira a posição mais desfavorável, isto é, localizada na posição central do painel. A carga “p” é referente à carga de multidão, enquanto que “P” refere-se à carga pontual do trem tipo, mesmo que a carga seja distribuída na área do contato do pneu.

Segundo a norma NBR 6118/2014 em respeito ao material constitutivo do painel quanto ao seu Módulo de Elasticidade é necessário considerar o modulo de elasticidade inicial “ E_{ci} ” e o modulo de deformação secante “ E_{cs} ” em MPa como:

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}; \quad E_{cs} = 0.85E_{ci}$$

Sendo “ f_{ck} ” a resistência característica do concreto em MPa. No estudo foi escolhido $f_{ck} = 25$ MPa, resultando $E_{cs} = 23800$ MPa.

Para o estudo da placa será considerada apenas a combinação COMB1 que é expressa como:

$$\text{COMB1} = \text{DEAD} + \text{CARGAMULTIDÃO} + 6 \cdot \text{CARGAPONTUAL}$$

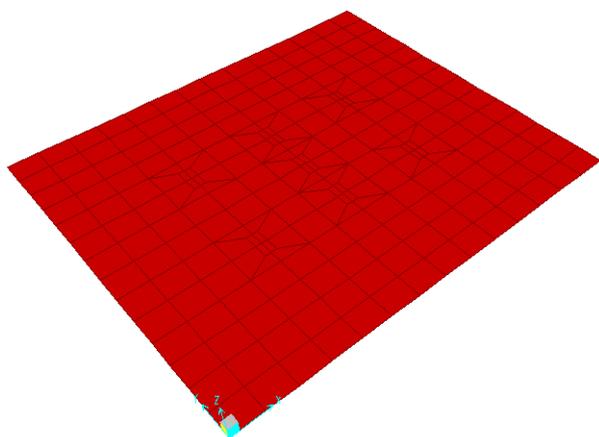


Figura 5. Vista 3D do Painel (SAP2000).

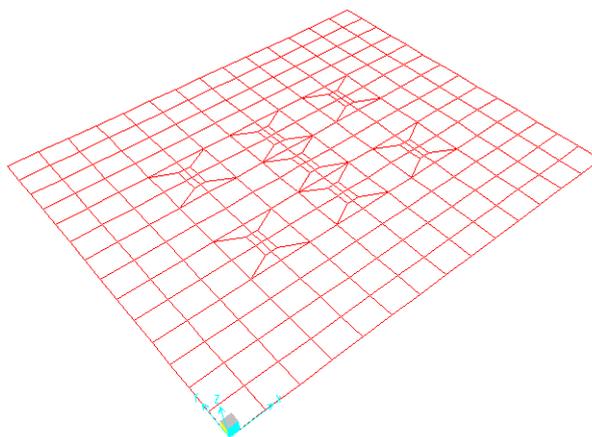


Figura 6. Vista 3D da discretização do Painel (SAP2000).

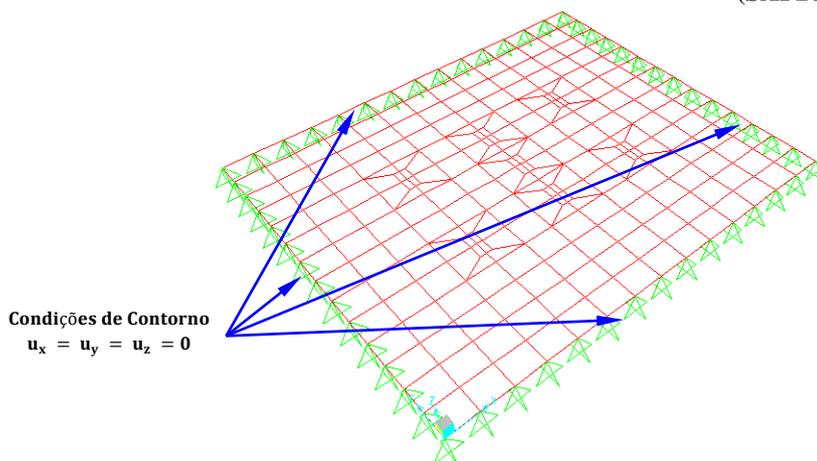


Figura 7. Condições de Contorno do Painel (SAP2000).

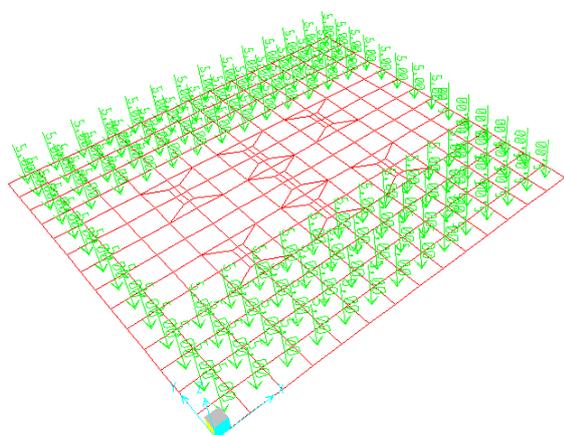


Figura 8. Carregamento CARGAMULTIDÃO de 5 kN/m^2 no Painel (SAP2000).

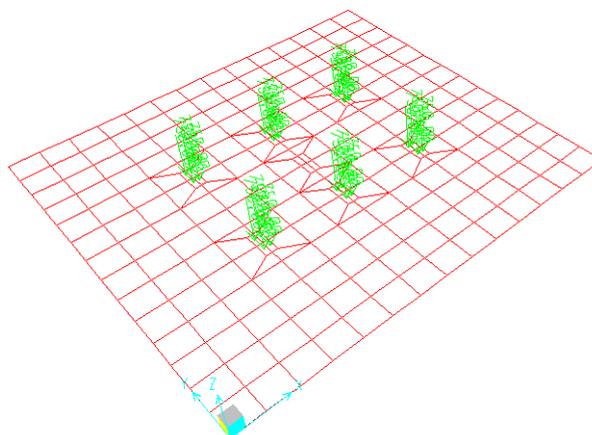


Figura 9. Carregamento CARGAPONTUAL de 750 kN/m^2 dos Pneus no Painel (SAP2000).

3 DESENVOLVIMENTO TEORICO

3.1 Teoria de Placas

A análise matemática das tensões de uma placa fina submetida às cargas que atuam normalmente na superfície exige uma solução das equações diferenciais da teoria da elasticidade tridimensional. No entanto, para a grande maioria das aplicações técnicas a teoria clássica de Kirchhoff-Love de placas finas fornece resultados suficientemente precisos, sem a necessidade de realizar uma análise de tensão tridimensional completa. A teoria é formulada em termos da deflexão $w(x, y)$ para o qual a equação diferencial que a governa é de quarta ordem:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} p_z(x, y); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1)$$

Onde:

E: Módulo de Elasticidade

h: Espessura da Placa

ν : Coeficiente de Poisson

$w(x, y)$: Deflexão da Placa

$p_z(x, y)$: Carregamento na Superfície da Placa

Exigindo apenas duas condições de contorno a serem satisfeitas em cada borda.

$$w(x, y)|_{x=0, x=a} = 0; \quad w(x, y)|_{y=0, y=b} = 0; \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, x=a} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0, y=b} = 0 \quad (3)$$

Resolvendo a Eq.1 pode se obter os momentos para a placa, calculados por:

$$M_x(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$M_y(x, y) = -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

$$M_{xy}(x, y) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (6)$$

E os esforços cortantes no interior por:

$$Q_x(x, y) = -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$Q_y(x, y) = -D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (8)$$

4 METODOS DE SOLUÇÃO

4.1 Método de Navier

Segundo Szilard (2004), em 1820 Navier apresentou para Frech Academy of Sciences, um trabalho intitulado “The Solution of Bending of Simply Supported Rectangular Plates by Double Trigonometric Series” isto é “Solução de placas retangulares em Flexão simplesmente apoiadas”. A solução da Eq.1 proposta em series trigonométrica duplas é:

$$w(x; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (9)$$

O carregamento $p_z(x; y)$ sobre a superfície, também é expresso em série trigonométrica dupla como:

$$p_z(x; y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (10)$$

Substituindo a Eq.10 e as derivadas necessárias da Eq.9 na Eq.1 se obtêm:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (11)$$

Onde a igualdade é válida para todos os valores $m, n = 1, 2, 3, \dots$ logo para relacionar as constantes, pode se escolher algum valor particular de m e n . Isolando W_{mn} resulta:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{D \cdot \pi^4 \cdot \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \quad (12)$$

Substituindo a Eq.12 na Eq.9:

$$w(x; y) = \frac{1}{D \cdot \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (13)$$

Retornando à Eq.8, esta equação possui termos com funções trigonométricas de períodos $T = 2a$ e $T = 2b$ respectivamente, portanto se a equação é multiplicada por $\operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{a} \right)$; $k = 1, 2, 3, \dots$ e calculando as integrais de 0 ate “a” e de 0 ate “b”, resulta:

$$P_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_z(x; y) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (14)$$

Para o painel da ponte considera-se o carregamento do peso próprio e o carregamento de multidão sendo estes carregamentos uniformemente distribuídos, por tanto:

$$p_z(x; y) = P_0 \quad (15)$$

Substituindo a Eq.15 na Eq.14 e resolvendo as integrais, resulta:

$$P_{mn} = \frac{4P_0}{ab} \cdot \frac{a}{m\pi} \cdot \frac{b}{n\pi} (1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi)) \quad (16)$$

E considerando valores ímpares para m, n tem:

$$P_{mn} = \frac{16P_0}{mn\pi^2} \quad (17)$$

Substituindo a Eq.17 na Eq.13 vem:

$$w(x; y) = \frac{16P_0}{D \cdot \pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (18)$$

A Figura 10 mostra a gráfica que corresponde para o caso estudado.

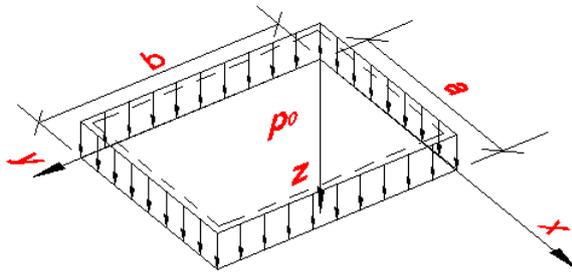


Figura 10. Carregamento P_0 uniformemente distribuído na Placa.

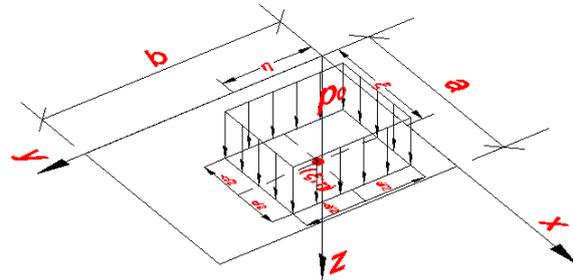


Figura 11. Posicionamento da carga p_0 numa área retangular de dimensões c e d, com centro de gravidade (ξ, η) na Placa.

Para o caso de um carregamento retangular, cuja área de abrangência seja menor que a área do painel de dimensões c x d e de centro de gravidade (ξ, η) , como se mostra na Figura 11, deve se utilizar a seguinte formulação:

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{m\pi\xi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\eta}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi c}{2a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi d}{2b} \right)}{mn \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (19)$$

Retornando para o cálculo dos esforços, derivando a Eq.9, substituindo e simplificando nas Eq.4 até Eq.8 se obtêm:

$$M_x(x; y) = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) W_{m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (20)$$

$$M_y(x; y) = D\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) W_{m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (21)$$

$$M_{xy}(x; y) = \frac{D(1-\nu)\pi^2}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \cdot W_{m,n} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (22)$$

$$Q_x(x; y) = D\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{mn^2}{ab^2} \right) \cdot W_{m,n} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (23)$$

$$Q_y(x; y) = D\pi^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{nm^2}{ba^2} \right) \cdot W_{m,n} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (24)$$

Aonde $W_{m,n}$ será escolhido dependendo das condições de contorno.

4.2 Relação Constitutiva

Para uma placa 2D os deslocamentos no plano x e y são expressos, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (25)$$

As componentes de deformação, derivadas dos deslocamentos

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Onde

$$[k] = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

As correspondentes componentes de tensão naquele ponto são:

$$\{\sigma\} = -z[D][k] \quad (28)$$

Onde [D] é a matriz de propriedades do material, dada por:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

4.3 Método dos Elementos Finitos

Segundo Kwon e Bang (1996) cada nó do elemento de placa possui três graus de liberdade: deslocamento em w na direção z ; rotação no eixo x , w_y (derivada de w em relação a y); e rotação no eixo y , w_x (derivada de w em relação a x).

O vetor deslocamento $w(x,y)$ é obtido pela multiplicação entre a matriz linha da função de forma ϕ_i do elemento plano e as suas constantes a_i

$$\{w\} = [\phi_i]\{a_i\} \quad (30)$$

O deslocamento nodal (w , w_x e w_y) pode ser escrito como

$$\{d\} = [\phi']\{a\} \quad (31)$$

Onde o vetor deslocamento é

$$\{d\} = [w_1 \quad w_{1x} \quad w_{1y} \quad w_2 \quad w_{2x} \quad w_{2y} \quad \dots \quad w_n \quad w_{nx} \quad w_{ny}]^T \quad (32)$$

E a matriz $[\phi']$ é expressa como

$$[\phi'] = \left[\phi_1 \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad \phi_2 \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \quad \dots \quad \phi_n \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right]^T \quad (33)$$

Invertendo a matriz $[\phi']$

$$\{a\} = [\phi']^{-1}\{d\} \quad (34)$$

E substituindo em

$$\{w\} = [\phi_i]\{a_i\} \quad (35)$$

Temos a equação matricial

$$\{w\} = [\Phi][\Phi']^{-1}\{d\} \quad (36)$$

As deformações no plano são obtidas a través da equação

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (37)$$

Em que a matriz $[B]$ para placas é expressa seguinte forma

$$[B] = -z[L][\Phi']^{-1} \quad (38)$$

E a matriz $[L]$ como

$$[L] = \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (39)$$

Da elasticidade temos que a matriz de rigidez para um elemento finito é expressa como

$$[K^e] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (40)$$

Para o caso específico de uma placa delgada temos

$$[K^e] = \int_{\Omega} \int_z [B]^T [D] [B] dz d\Omega \quad (41)$$

Substituindo na equação a equação a matriz de rigidez do elemento de placa fica

$$[K^e] = [\bar{\Phi}]^{-T} \int_{\Omega} [L]^T [\bar{D}] [L] d\Omega [\bar{\Phi}] \quad (42)$$

Em que a matriz $[\bar{D}]$ resulta da integral em z

$$[\bar{D}] = \frac{h^3}{12} [D] \quad (43)$$

4.4 Método de Superposição

Na Álgebra é dito que uma função “f” é Linear se possui a propriedade Aditiva e Homogênea, isto é:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (44)$$

Mas na engenharia o Método de Superposição de Efeitos aplica a propriedade Aditiva para descompor um problema complexo em parcelas mais simples para a análise. Neste estudo será utilizada a Superposição de Efeitos para analisar os efeitos produzidos por cada um das rodas do trem tipo e somar os efeitos produzidos por estes nas grandezas analisadas, sejam deslocamentos ou esforços.

5 RESULTADOS

A formulação analítica dos carregamentos considerados no estudo, como peso próprio do painel pré-moldado, carga de multidão e trem tipo, fornecem a deflexão da placa para cada um dos casos de carregamento. A partir da superposição destes três casos, que representam o painel estudado é feita a comparação com os resultados obtidos na análise realizada no SAP2000.

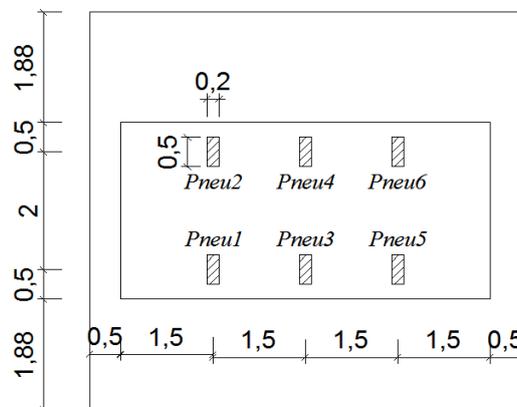


Figura 12. Localização das rodas no Painel estudado.

Para a deflexão $w(x,y)$ do painel a região central apresentou os maiores deslocamentos, sendo nessa região a deflexão máxima da placa.

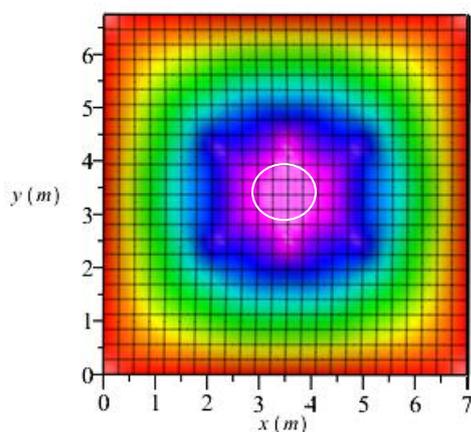


Figura 13. Deflexão $w(x,y)$ do painel (Maple)

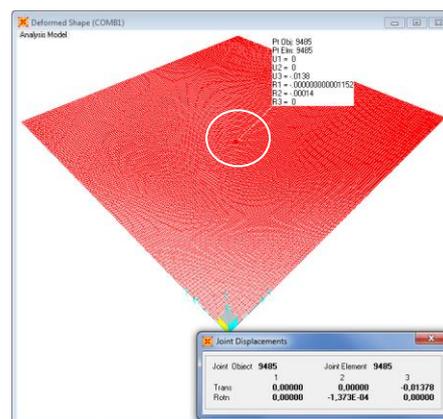


Figura 14. Deflexão $w(x,y)$ do painel(SAP2000)

A deflexão máxima tem valor de 1,378 cm. Está localizada em dois pontos do painel, ambos com x igual a 3,5 metros e um ponto com y em 2,5 metros e outro ponto com y em 4,24 metros. Os pontos são $w(3.5;2.5)$ e $w(3.5,4.24)$.

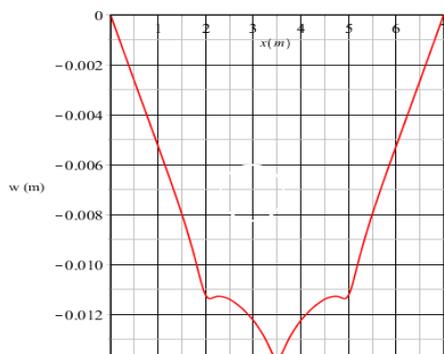


Figura 15. Corte em x da deflexão máxima do painel (Maple)

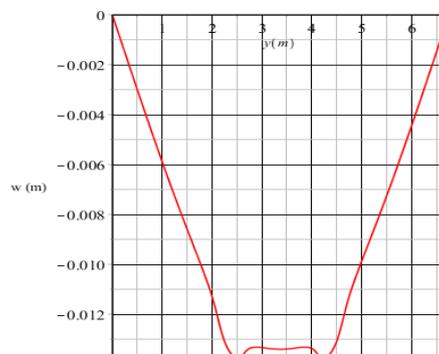


Figura 16. Corte em y da deflexão máxima do painel(SAP2000)

O esforço cortante Q_x na placa apresentou seus valores máximos na região anterior ao primeiro eixo e na região posterior ao último eixo do trem tipo.

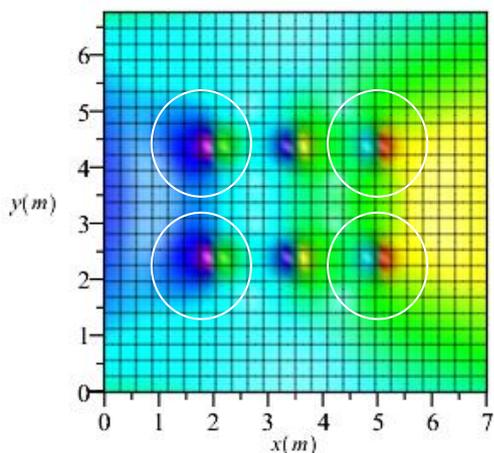


Figura 17. Esforço cortante Q_x (Maple).

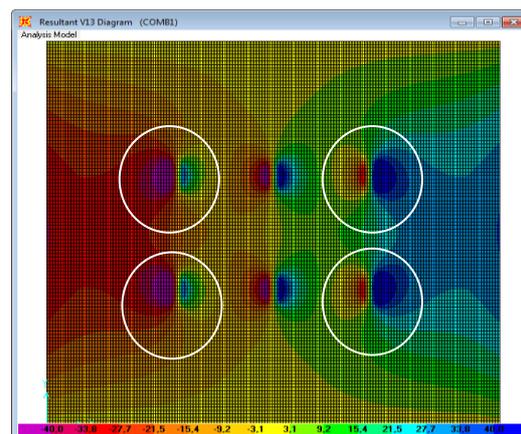


Figura 18. Esforço Cortante Q_x (SAP2000)

O esforço cortante máximo de Q_x foi igual a 75,80 kN/m. As figuras x e x apresentam o corte da seção em que se tem o cortante Q_x máximo pela solução analítica e a figura x apresenta o valor máximo obtido no SAP2000.

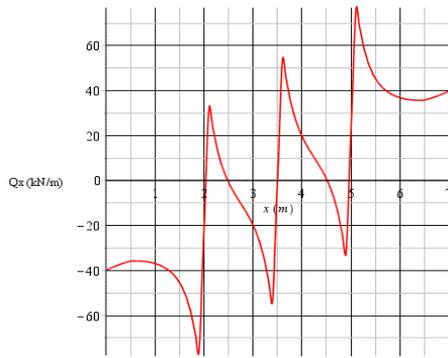


Figura 19. Corte em x do esforço cortante Q_x máximo (Maple)

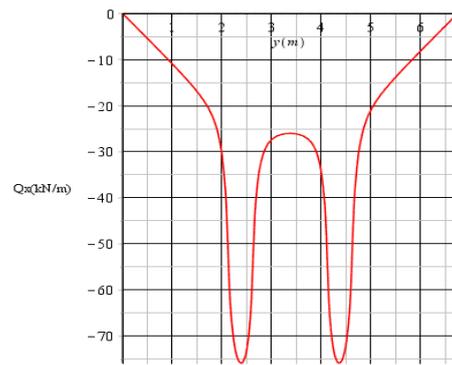


Figura 20. Corte em y do esforço cortante Q_x máximo (Maple)

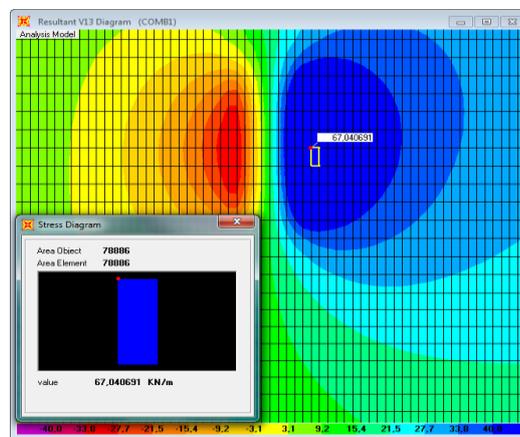


Figura 21. Cortante V13 de 67.04 kN/m no Pannel produzido pela COMB1 (SAP2000)

A figuraX mostra tridimensionalmente a distribuição dos esforços cortante Q_x na placa.

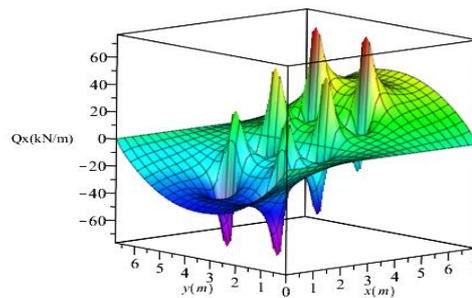


Figura 22. Esforço cortante Q_x da placa em 3D (Maple)

Já o esforço cortante Q_y na placa apresentou seus valores máximos absolutos na região anterior a roda 3 e na região posterior a roda 4, ambas as rodas posicionadas no eixo central do trem tipo.

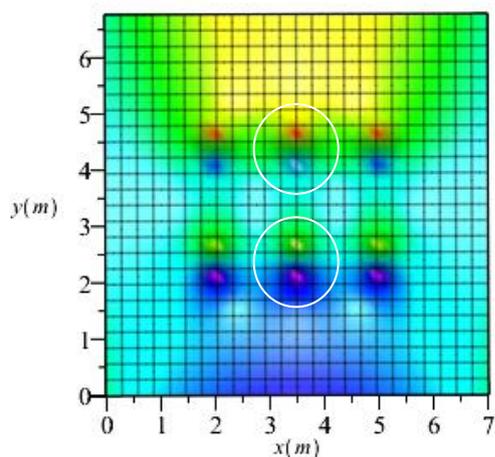


Figura 23. Esforço cortante Q_y (Maple)

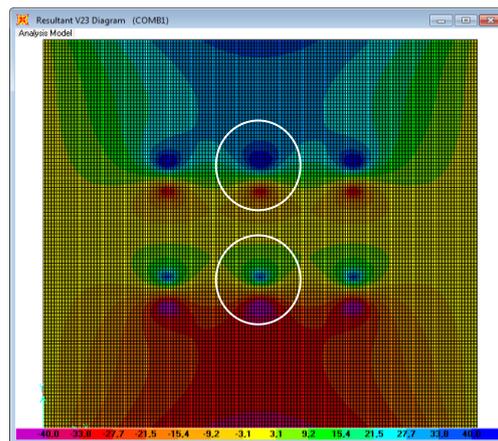


Figura 24. Esforço cortante Q_y (SAP2000)

O esforço cortante máximo de Q_y foi igual a 77,06 kN/m. As figuras x e x apresentam o corte da seção em que se tem o cortante Q_y máximo pela solução analítica e a figura x apresenta o valor máximo obtido no SAP2000.

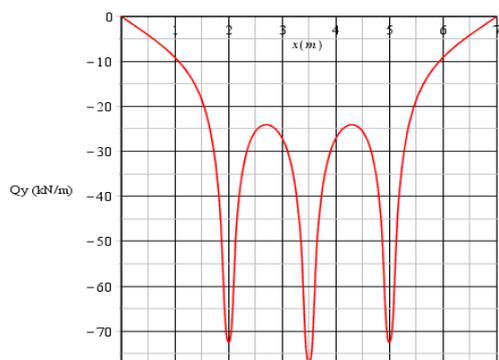


Figura 3. Corte em x do esforço cortante Q_y máximo (Maple)

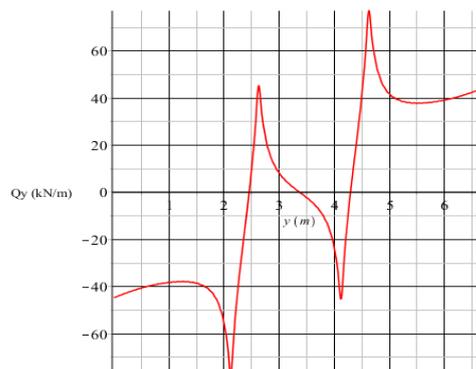


Figura 2. Corte em y do esforço cortante Q_y máximo (Maple)

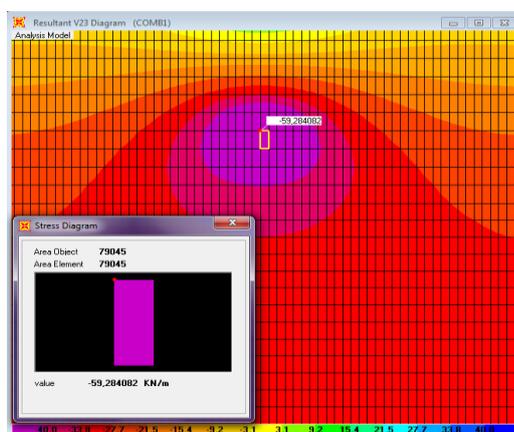


Figura 25. Cortante V23 de 59.28 kN/m no Pannel produzido pela COMB1 (SAP2000).

A figuraX mostra tridimensionalmente a distribuição do esforços cortante Q_y na placa.

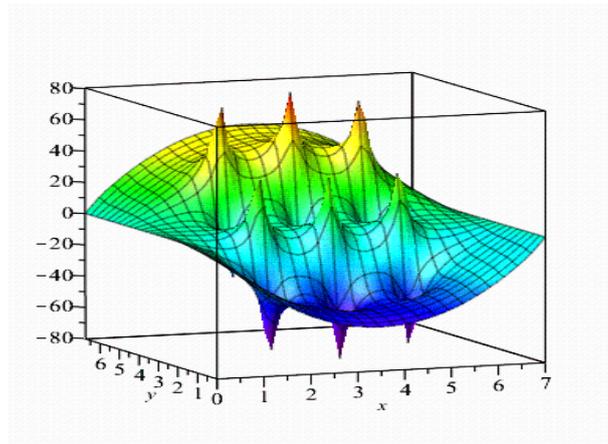


Figura 26. Esforço cortante Q_y da placa em 3D (Maple)

No caso da análise do momento fletor a placa apresentou seus valores máximos, tanto para M_x como para M_y , na região do eixo intermediário do trem tipo onde estão posicionadas as rodas 3 e 4, cujo corresponde à região central do painel.

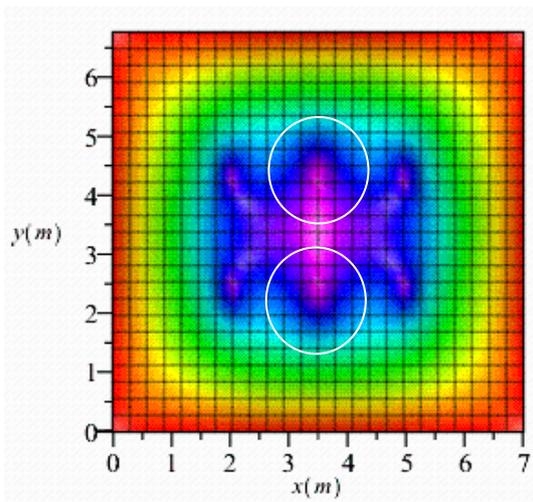


Figura 27. Momento fletor M_x (Maple)

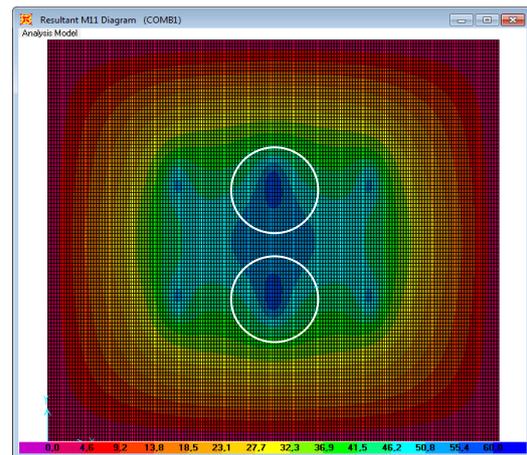


Figura 28. Momento fletor M_x (SAP2000)

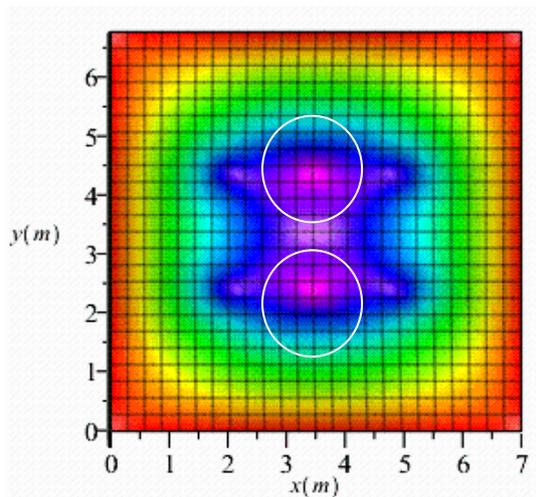


Figura 29. Momento fletor M_y (Maple)

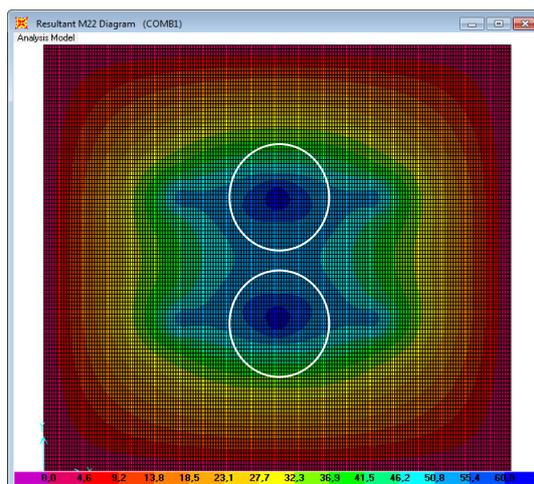


Figura 30. Momento fletor M_y (SAP2000)

O valor máximo de M_x de 59,276 kN·m/m foi encontrado em dois pontos próximos ao eixo intermediário do caminhão. As figuras x e x apresentam o corte da seção em que se tem o momento M_x máximo pela solução analítica e a figura x apresenta o valor máximo obtido no SAP2000.

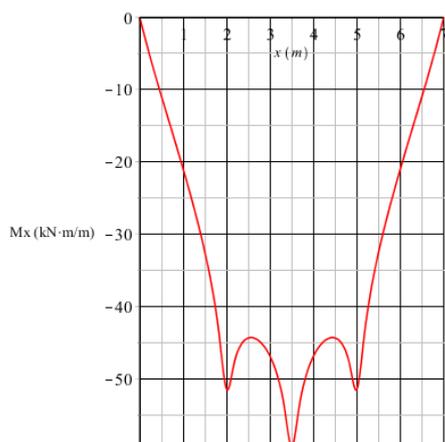


Figura 31. Corte em x do Momento fletor M_x máximo (Maple)

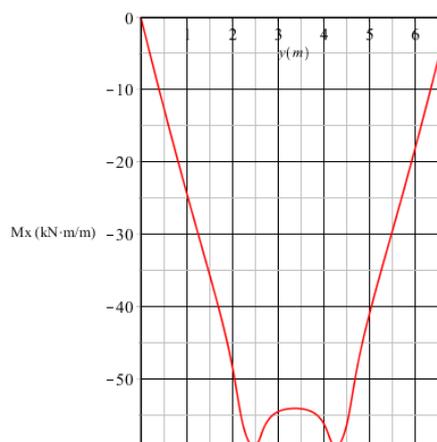


Figura 32. Corte em y do Momento fletor M_x máximo (Maple)

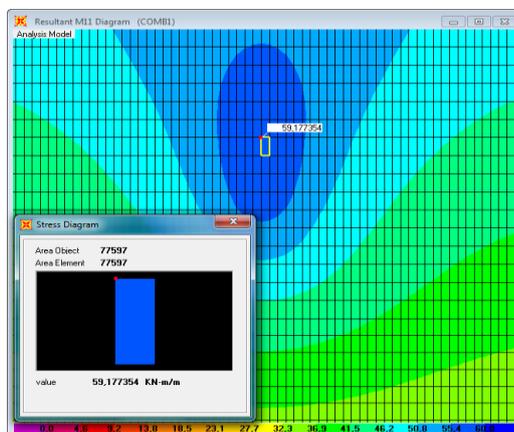


Figura 33. Momento M11 de 59.18 kN.m/m no Painel produzido pela COMB1 (SAP2000)

O valor máximo de M_y igual a 62,347 kN·m/m também está situado em pontos próximos ao eixo central do trem tipo.

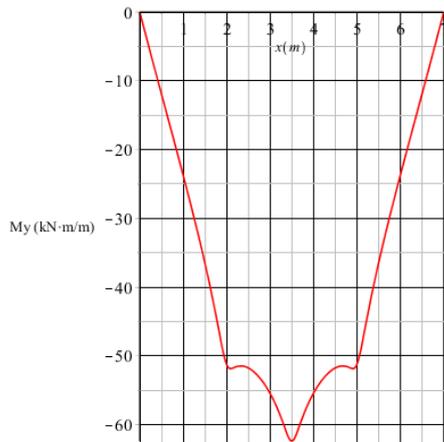


Figura 34. Corte em x do Momento fletor M_y máximo (Maple)

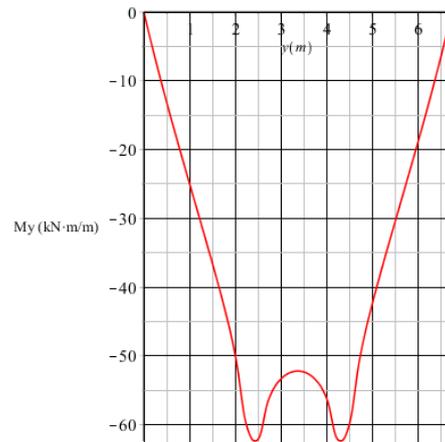


Figura 35. Corte em y do Momento fletor M_y máximo (Maple)

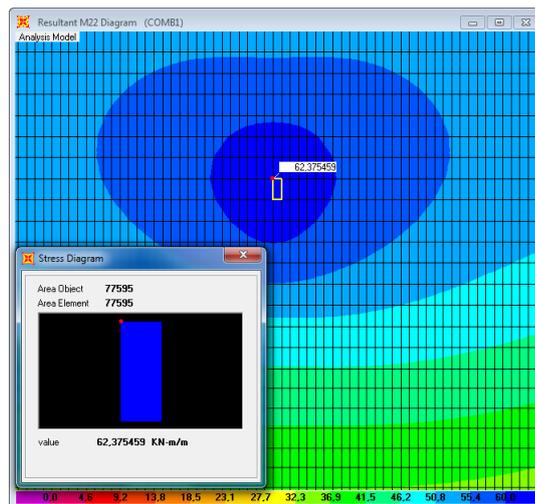


Figura 36. Momento M22 de 62.38 kN.m/m no Painel produzido pela COMB1 (SAP2000)

Os valores resultantes para a deflexão e esforços internos para a placa pelo método Navier são mostrados na Tabela 1.

TABELA 1. Valores obtidos pelo Método de Navier

Método Analítico	Deflexão (cm)	V13 (kN/m)	V23 (kN/m)	M11 (kN.m/m)	M22 (kN.m/m)
	1,378	75,802	77,065	59,276	62,347

Inicialmente a análise do painel pré-moldado no SAP2000 foi feita com uma malha formada por 228 elementos, apresentando um valor próximo ao exato para a deflexão e para os momentos. Entretanto o esforço cortante, especificamente Q_y , esteve distante do valor analítico. A medida em que foi realizado o refinamento da malha o valor do esforço Q_y aumentou gradativamente, apresentando uma diferença significativa da primeira análise com 228 elementos para a análise adotado para o trabalho com 31.360 elementos.

TABELA 2. Deflexão e esforços internos para cada n° de elementos

Número Elementos	Deflexão (cm)	V13 (kN/m)	V23 (kN/m)	M11 (kN·m/m)	M22 (kN·m/m)
228	1.385	64.71	38.38	60.49	61.51
1960	1.379	56.63	42.62	58.97	62.62
3920	1.377	57.26	51.56	59.29	62.22
7840	1.377	63.57	52.39	59.21	62.22
15680	1.378	63.25	59.15	59.19	62.37
31360	1.378	67.04	59.28	59.18	62.38

Os gráficos das Figuras x a x mostram a evolução dos valores para a deflexão e esforços internos da placa na medida em que foi alterado o número de elementos que formam a malha.

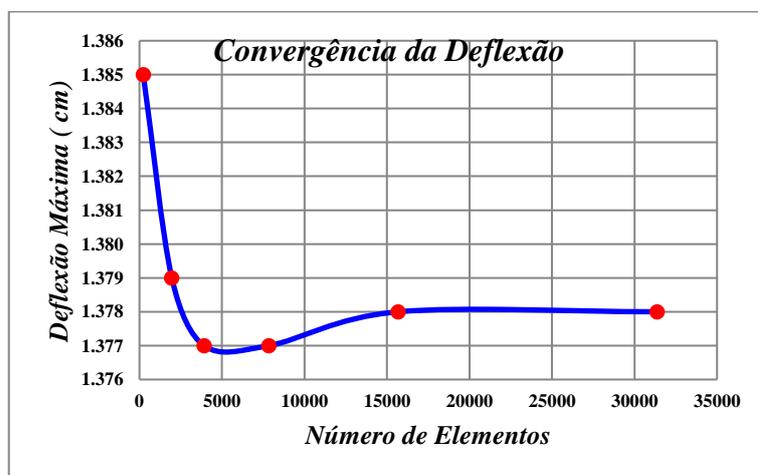
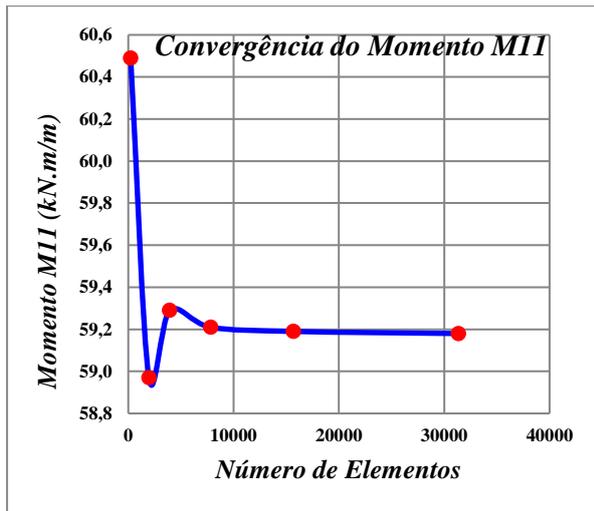
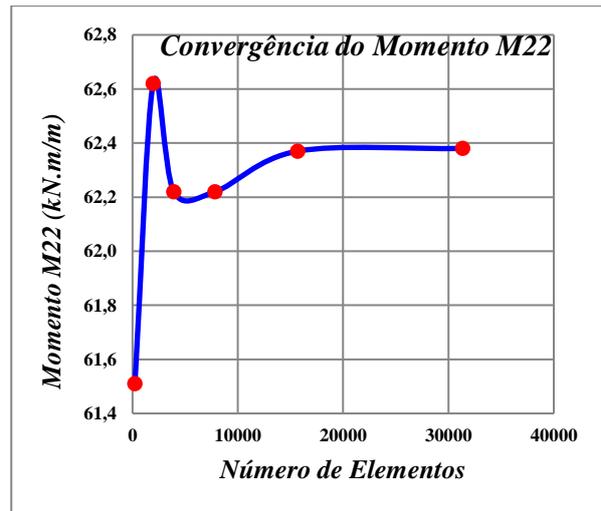
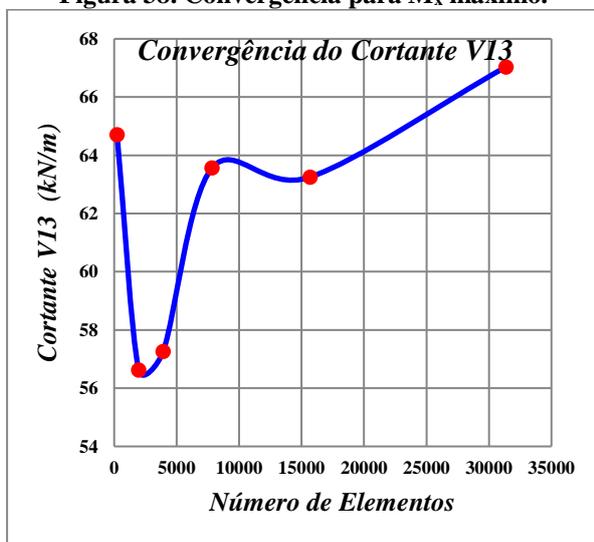
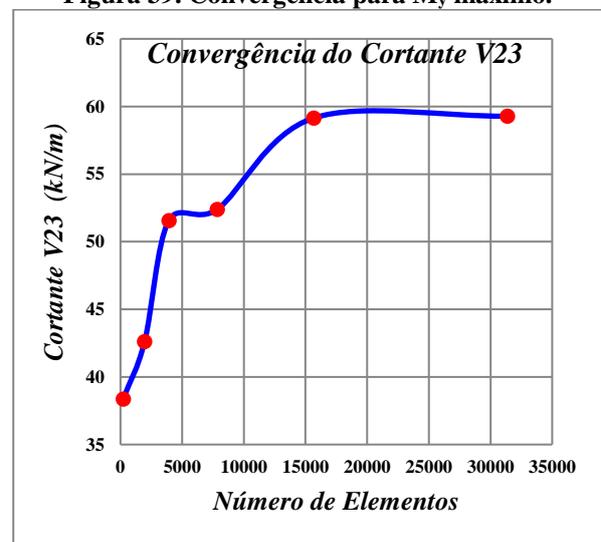


Figura 37. Convergência para deflexão máxima.

Figura 38. Convergência para M_x máximo.Figura 39. Convergência para M_y máximo.Figura 40. Convergência para Q_x máximo.Figura 41. Convergência para Q_y máximo.

6 CONCLUSÕES

A comparação do Método Analítico e Numérico fornece um alto grau de confiabilidade dos resultados para a deflexão e os momentos fletores, sendo as margens de erro muito estreitas. Já no caso dos esforços cortantes note-se uma diferença entre os resultados analítico e numérico fornecido pelo SAP2000. Em busca de se aproximar os resultados do método numérico foi necessário um refinamento da malha para se atingir os valores exatos.

Este estudo mostra que o cálculo de painéis pré-moldados pode ser calculado tanto pelos métodos analíticos como pelos métodos numéricos. O uso de programas comerciais exige que o usuário faça comparações com formulações teóricas exatas, uma vez que nas regiões próximas as rodas o programa não conseguiu reproduzir com exatidão o comportamento da placa, mesmo com um número elevado de elementos.

Deixa-se como sugestão para um posterior estudo a comparação Analítica e Numérica dos painéis e as vigas representadas como vinculações elásticas representando a solidariedade entre os elementos para aproximar-se do comportamento mais real da estrutura.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BAKER, E. H., *Finite Element – Computational Engineering Sciences*, , John Wiley & Sons, Ltd., New Jersey, 2012.

BAKER, E. H., et al, *Structural Analysis of Shells*, McGraw-Hill, New York, London, 1972.

BATHE, K. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.

COOK, R., et al, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2002.

FLUGGE, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1973

HUGHES, T. *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1987.

KWON, Y., BANG, H., *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC Press LLC, New York, 1997.

RAO, S. *The Finite Element Method in Engineering*, Butterworth-Heinemann., Oxford, 2011.

REDDY, J. N., *Theory and Analysis of Elastic Plates*, Taylor and Francis, London, 1999.

SZILARD, R., *Theories and Application of Plate Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2004.

TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.

UGURAL, A., *Stresses in Beams, Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1999.