

XXXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS
ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING
BRASÍLIA - DF - BRAZIL

ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES EM CONCRETO ARMADO SUBMETIDOS À FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA

Ricardo Gomes Duarte Freire

ricardogomes88@hotmail.com

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro

paulo.vribeiro@ufpe.br

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Centro de Tecnologia e Geociências

Departamento de Engenharia Civil

Carlos Eduardo Luna de Melo

carlosluna@unb.br

Universidade de Brasília – UnB

Departamento de Tecnologia

Faculdade de Arquitetura e Urbanismo

Abstract. Stability analysis of reinforced concrete columns using tables and abacuses often lacks accuracy and leads to more robust structures, with a higher consumption of material (concrete and steel rebars). On the other hand, there are more accurate procedures that derive from detailed models, optimizing the design at the cost of a large number of iterative operations and processes that are not feasible without the use of computers. This paper presents the steps involved in developing a computer code to verify the stability analysis of reinforced concrete columns subjected to axial forces and biaxial bending through computational routines. The computer codes were developed in Matlab, including physical and geometrical nonlinearities, and can be divided into two major parts: (1) characterized by cross section analysis, which is divided into sub-regions for numerical integration, and by varying curvature and neutral axis slope and depth, resistant internal forces and strains are evaluated; (2) a global stability analysis of the structure, where the column is segmented along its height and for each section between the elements a routine evaluates the curvature at equilibrium. The updated deflection is obtained by double curvature integration and provides an additional eccentricity which is added to the initial results into a new iteration. The process is repeated until a convergence criterion is reached or column failure, and thus the final

internal forces are computed. The proposed routine results were validated by experimental analysis and finite element simulations with commercial codes Athena and Midas, confirming the validity and efficiency of the present proposal.

Keywords: *Reinforced concrete columns, Biaxial bending, Stability, Nonlinear, Computational.*

1 INTRODUÇÃO

A análise da estabilidade de pilares em concreto armado de forma aproximada, com uso de tabelas e ábacos, apresenta resultados pouco precisos, que levam a estruturas mais robustas e com um maior consumo de material. Por outro lado, existem procedimentos de maior precisão que aproximam os resultados da situação real, otimizando o projeto ao custo de um grande número de operações e processos iterativos, que são inviáveis sem o emprego de computadores. A Figura 1 mostra uma estrutura com pilares de grande esbeltez onde uma análise sofisticada é indispensável, não sendo admitida nenhuma simplificação.

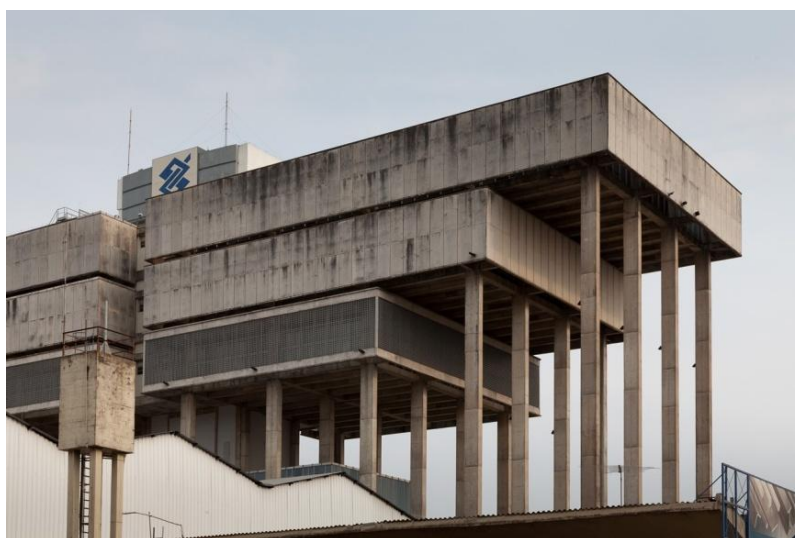


Figura 1 – Exemplo de pilar esbelto em concreto armado, centro do Banco do Brasil Porto Alegre(Site: Archdaily)

Textos clássicos com Fusco(1998) apresentam métodos para avaliação da estabilidade de pilares em concreto armado pelo uso do processo do carregamento progressivo e excentricidade progressiva, esse métodos permitem avaliar a carga crítica de uma peça e mediante a comparação com as solicitações definir se há equilíbrio. Os métodos apresentados são validos para solicitações normais e oblíquas necessitando de alguns ajustes para cada caso particular. França(1991) Trouxe uma proposta de análise simplificada de peças reticuladas em concreto armado através do emprego da relação momento-rigidez secante e também com uma linearização do diagrama momento-curvatura.

Watanabe(2011) e Cardoso (2014) criaram programas para realizar a verificação de pilares em concreto armado submetidos a flexão oblíqua. Cardoso (2014) utilizou técnicas numéricas para solução do problema. Fazendo uso dos modelos apresentados pela NBR 6118 para análise não linear física e geométrica de pilares. Watanabe(2011) usou o método do equilíbrio para avaliar a estabilidade da peça, essa técnica usada permite dispensar a necessidade de avaliação da carga crítica.

Este trabalho apresenta as etapas envolvidas na elaboração de um código computacional para verificação da estabilidade de pilares em concreto armado submetidos à flexão composta oblíqua. As rotinas foram desenvolvidas em Matlab R2010a, considerando as não linearidades física e geométrica, e podem ser divididas em duas grandes partes: (1) caracterizada pela análise da seção em um plano, onde é feita sua divisão em sub-regiões, e através da variação da curvatura, profundidade e inclinação da linha neutra são calculados os esforços internos resistentes; (2) uma etapa de verificação global da barra, onde o pilar é segmentado e para cada seção entre os elementos a rotina avalia a curvatura no equilíbrio. A equação da deformada obtida por integração da curvatura fornece uma excentricidade adicional, que somada à inicial resulta em um novo conjunto de solicitações. O processo é repetido até que seja atingido um critério de convergência ou ruptura, e assim podem ser definidos os esforços finais da peça

Para fazer a validação dos resultados obtidos com o código desenvolvido fora feitas comparações com resultados obtidos em simulações com elementos finitos com os programas comerciais ATENA 3D (2014), da Cervenka Consulting e MidasFea(2009) e com os resultados obtidos em ensaios feitos por Melo(2009) que fez o estudo experimental e numérico de pilares em concreto armado com seção e armadura constante, figura 2, submetidos a flexão composta normal. O outro trabalho usado para validação foi Kim e Lee (2000) que desenvolveram uma formulação em elementos finitos para determinar os deslocamentos em pilares de concreto armado sob flexão composta oblíqua. Seus resultados foram validados através de ensaios realizados em pilares de seção quadrada e retangular com armadura constante submetidos a flexão composta oblíqua.



Figura 2 – Pilar sob flexão composta normal, ensaio realizado por Melo(2009)

2 INSTABILIDADE DE PEÇAS ESBELTAS

A instabilidade de pilares de concreto armado é um estado limite último de perda de equilíbrio proveniente de um esforço adicional gerado pela ação das cargas verticais sobre a estrutura deformada, essas ações são chamadas de efeito de segunda ordem. Segundo Chust (2013), efeitos de segunda ordem são aqueles que se somam aos obtidos numa análise de primeira ordem (em que o equilíbrio da estrutura é estudado na configuração geométrica inicial), quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando a configuração

deformada. A figura 3 mostra o comportamento de uma peça esbelta quando feita a consideração das ações atuando sobre a estrutura deformada.

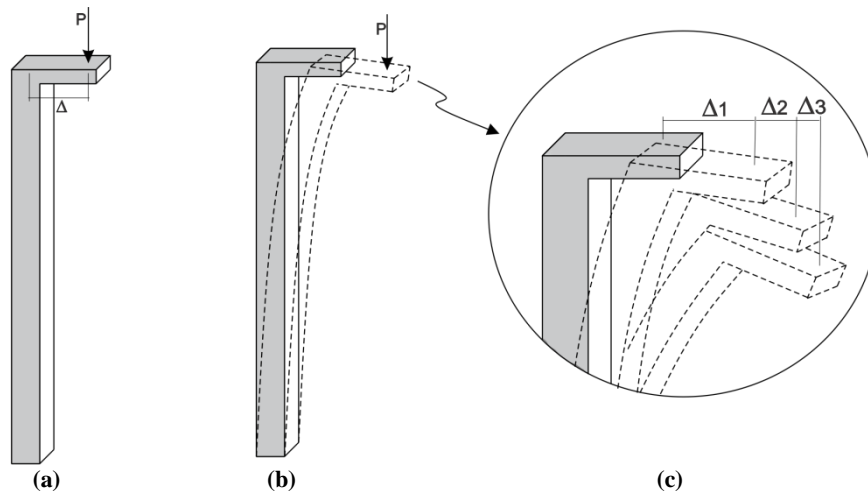


Figura 3 – Evolução das deformações no eixo de uma peça submetida a flexão compressão

Na Figura 3(a) a peça está na sua configuração indeformada e submetida a uma carga vertical com excentricidade Δ , essa ação leva a posição vista em 3(b), que representa a carga atuando sobre a posição deformada da estrutura. Essa ação leva a deformação Δ_2 vista na figura 3(c) essa excentricidade soma-se a de primeira ordem levando a um acréscimo de momento ao longo da peça gerando mais um acréscimo de deformação Δ_3 . Esse efeito segue até que a peça torna-se estável, ou caso a sobreposição dos efeitos não sejam resistido pelo pilar ele rompe.

Quando analisada a flexão oblíqua, caso onde para o esforço vertical existem duas excentricidades perpendiculares entre si, o efeito se dá de forma análoga ao exemplificado anteriormente. Porém a deformada se desenvolve com componentes em dois planos com influência sobre as duas excentricidades que sofrem efeito de segunda ordem. Para Araújo(2003) a flexão compressão oblíqua é a solicitação composta por um esforço normal de compressão agindo fora do eixo de simetria da seção transversal. Quando o esforço normal atua em um eixo de simetria de seção de concreto, mas o arranjo das barras não é simétrico em relação a esse eixo a flexão também é oblíqua e quando a própria seção não possui simetria também será oblíqua. A Figura 4 mostra a linha elástica para uma peça sob flexão composta oblíqua, destacando as excentricidades adicionais segundo os dois planos de flexão.

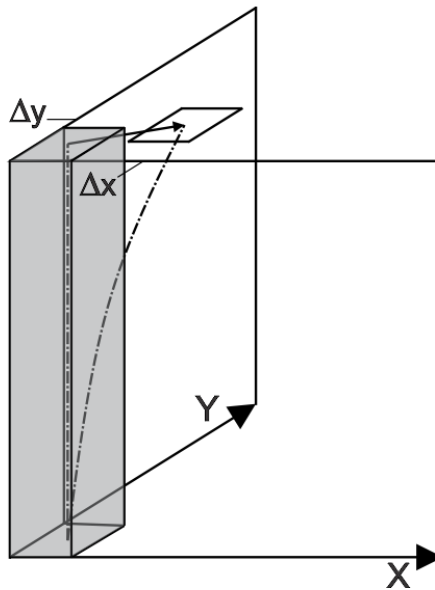


Figura 4 – Linha elástica de um pilar sob flexão composta oblíqua destacando a excentricidade no topo da peça devido a ação externa.

O estudo desse efeito mostra que não há uma relação direta entre as ações externas e as deformações da peça. Isso ocorre devido a um comportamento não linear do conjunto, que pode ser dividida em dois aspectos, não linearidade física, que é caracterizado por uma relação entre a tensão e deformação que não tem uma proporção direta e nem linear. E devido a não linearidade geométrica que é o efeito onde o crescimento das deformações leva a uma nova distribuição de esforços ao longo da peça. Para caracterizar esses efeitos são criados modelos que representam o comportamento dos materiais, esses modelos serão explorados na seção seguinte. Também são utilizados processos iterativos para modelagem da não linearidade geométrica através de sucessivas aplicações da carga na estrutura deformada.

Diante da necessidade de avaliação dos efeitos de segunda ordem e a estabilidade de pilares, foram desenvolvidos métodos que visam prever quais os esforços finais que o pilar estará submetido de forma a verificar se o dimensionamento da peça atendem as prescrições de segurança e estabilidade. Com isso a NBR-6118 2014 sugere uma série de métodos indicados para uma determinada faixa de esbeltez. O método aproximado do pilar padrão consiste em relacionar o pilar estudado com um equivalente que esteja com os extremos engastados e livres, e com sua linha elástica admitida senoidal, estando o máximo deslocamento no topo relacionado com a curvatura da base. Este método apresenta-se com três variações, de acordo com a forma de determinar a curvatura na base do pilar. A forma mais direta e simples é a da curvatura aproximada onde é suposto que a base do pilar tem curvatura máxima com o concreto comprimido com uma deformação específica de 3,5‰ e o aço alongado a 10‰. Outra forma para definir a curvatura, é o uso da rigidez κ aproximada. onde os efeitos da não linearidade física e geométrica já são considerados de forma aproximada e os esforços finais na peça já são obtidos através dos iniciais que atuam sobre o pilar. Por fim a forma mais refinada de usar o método do pilar padrão e fazer o acoplamento à curvatura real da seção para isso pode ser feito o uso de ábacos ou rotinas computacionais como a desenvolvida nesse trabalho. O método que leva a resultados mais precisos e com maior aproximação dos esforços finais é o método geral, onde é feito o cálculo da curvatura de cada seção do pilar de forma a se obter o deslocamento real da estrutura, segundo Fusco(1998) o método geral é aplicável a qualquer tipo de estrutura, podendo portanto ser empregado para a determinação da carga crítica de barras de seção variável com qualquer tipo

de carregamento. A escolha do método é regida pela esbeltez da peça de forma que para peças mais delgadas são exigidos modelos mais refinadas, a tabela 1 mostra o resumo das formas de análise local permitidos pela NBR-6118 2014, o valor de λ_1 é dado pela norma.

Tabela 1. Modelos de análise de pilares Segundo a NBR-6118 2014

Esbeltez da peça	Método admitido
$\lambda < \lambda_1$	Dispensa análise local
$\lambda_1 < \lambda < 90$	Pilar padrão com curvature aproximada ou rigidez κ aproximada
$90 < \lambda < 140$	Pilar padrão com curvatura real
$140 < \lambda < 200$	Método geral
$200 < \lambda$	Não admitido para pilares

Quando se faz necessário o uso do método geral a norma brasileira apenas indica que deve ser feita uma análise com uma discretização adequada, considerando a curvatura real em cada seção e atribuindo a não linearidade geométrica de forma não aproximada, com isso surge uma lacuna de como empregar esta análise, tendo em vista que para todos os outros procedimentos são apresentadas as formulações necessárias a seu uso. Com isso o procedimento apresentado nesse trabalho é de grande importância por permitir compreender como se desenvolve uma análise de segunda ordem onde se deseja utilizar um método exato de cálculo e com isso realizar o correto dimensionamento do elemento.

Mais modelos simplificados são apresentados por outras referências normativas. De maneira geral é admitir uma configuração deformada para a peça baseada em uma curvatura da seção mais solicitada. Os processos consideram seções transversais constantes incluindo armadura. Para peças de esbeltez mais elevada ou com variação de seção Não são fornecidos métodos para cálculo, são feitas recomendações, porém o emprego e de responsabilidade do projetista.

Além disso, são apresentados critérios onde é possível omitir qualquer análise de segunda ordem.

Segundo o Eurocode 2 é possível dispensar os efeitos de segunda ordem em pilares onde a esbeltez é inferior ao valor dado na equação 1:

$$\lambda_{crit} = 25 \left(2 - \frac{e_{o1}}{e_{o2}} \right) \quad (1)$$

Sendo e_{o1} e e_{o2} os momentos que atuam nos extremos da peça, admitindo:

$$|e_{o1}| \leq |e_{o2}|$$

O seu texto também traz a possibilidade de analisar peças sujeitas a flexão composta oblíqua considerando os momentos atuando isoladamente, desde que uma das excentricidades iniciais não exceda 20% da outra.

O CEB admite não ser necessário o cálculo de efeitos de segunda ordem para pilares com:

$$\lambda \leq 12 \left(2 - \frac{e_{o1}}{e_{o2}} \right) \quad (2)$$

Quando necessário é possível definir a excentricidade de segunda ordem de forma aproximada com o uso da equação 3:

$$e_2 = 0,5 K_1 \ell^2 \frac{1}{r_1} \quad (3)$$

Onde

$\frac{1}{r_1}$ Representa a curvatura devido aos esforços de primeira ordem, e

K_1 é o coeficiente que caracteriza a variação não linear na rigidez em função da esbeltez da peça.

3 HIPÓTESES DE CÁLCULO E EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Para criação dos modelos matemáticos que descrevem a estrutura são adotados padrões idealizados para o comportamento dos materiais, estes modelos visam tornar viável a avaliação do comportamento de um determinado material de forma simplificada e sem perder a fidelidade com a realidade. Para a situação em questão as principais grandezas envolvidas são as deformações e tensões que se relacionam de forma diferente para cada material, concreto e o aço que constituem a seção.

Para o aço a relação que representa seu comportamento é fornecida por um diagrama bilinear onde até o limite de escoamento o comportamento é linear elástico, sendo a relação tensão deformação obtida através do módulo de elasticidade, que é constante, além do ponto de escoamento é admitido que o aço se deforma sem haver nenhum aumento de tensão, até o limite de 10‰ onde é considerada a ruptura do material. A Figura 5 mostra o diagrama apresentado pela NBR-6118 2014 para aço de armadura passiva.

O comportamento definido para o concreto leva a um comportamento não linear ao longo de todo o diagrama, porem apresenta dois trechos bem definidos. No primeiro há uma curva parabólica até a resistência característica, que para concretos até a classe C50 acontece em uma deformação de 2‰, a partir desse ponto se dá início a um intenso processo de micro fissuração na região comprimida levando a uma pseudo plastificação até uma deformação específica de 3,5‰ onde se esgota a capacidade do material. A Figura 6 mostra o comportamento para o concreto em compressão proposto pela NBR 6118.

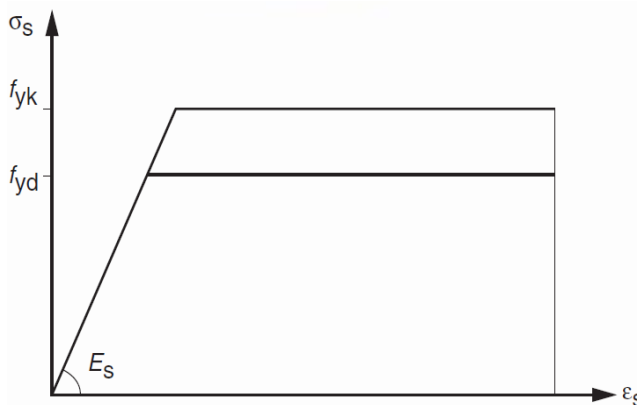


Figura 5 diagrama tensão-deformação para aço de armadura passiva (NBR 6118 2014)

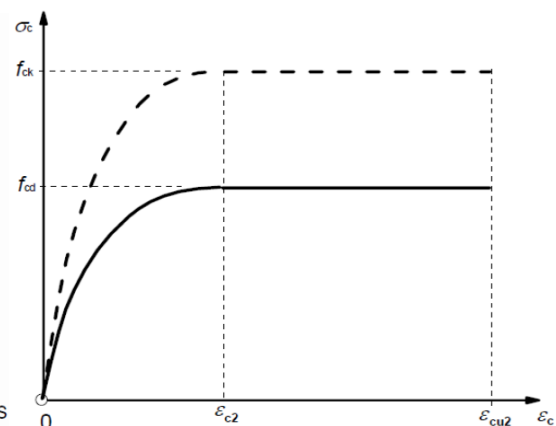


Figura 6 diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão (NBR 6118 2014)

A tensão no trecho parabólico em função da deformação é fornecida pela expressão:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (4)$$

onde f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto.

Para o estudo realizado é necessário levar em conta o comportamento desses dois materiais de forma simultânea, obtendo dessa interação o comportamento da seção de concreto armado e por fim da peça, para isso devem ser admitidas as seguintes hipóteses:

- Seções planas: As seções da peça de concreto permanecem planas até atingida um estado limite ultimo.
- Resistência a tração do concreto é nula, apenas a armação resiste aos esforços de tensão que podem surgir na seção.
- Pequenos deslocamentos: os deslocamentos provocados pelos esforços nas peças são pequenos diante das dimensões preponderantes do elemento
- Aderência perfeita: admite-se que a ligação entre aço e concreto é perfeita e com isso a deformação específica em um determinado ponto é igual para o aço e para o concreto que o envolve.

Na flexão composta oblíqua além da ação do esforço normal, também atuam na seção um par de momentos em direções ortogonais, que nesse texto serão chamados de M_x e M_y respectivamente o momento em torno do eixo x e y. Segundo Fusco(1998), Para uma seção arbitrária como a da Figura 7, as condições de equilíbrio são dadas por:

$$N = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} + \int_{A_{cc}} \sigma_c \cdot dA \quad (5)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot y_{si} + \int_{A_{cc}} \sigma_c \cdot y \cdot dA \quad (6)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot x_{si} + \int_{A_{cc}} \sigma_c \cdot x \cdot dA \quad (7)$$

Sendo

A_{si} e σ_{si} A área e tensão respectivamente, da armação considerada.

σ_c Tensão na fibra de concreto considerada

x e y Coordenada x e y do ponto considerado.

É possível fazer a substituição da integral por um somatório através da divisão da seção em elementos discretos com o objetivo de fazer uma integração numérica, esse artifício é bastante útil quando se deseja programar com o intuito de se analisar uma peça de concreto armado. Neste trabalho foi admitido que cada elemento esta submetido a uma tensão uniforme determinada através da deformação obtida no seu eixo. A Figura 7 mostra a análise da tensão sobre um elemento isolado.

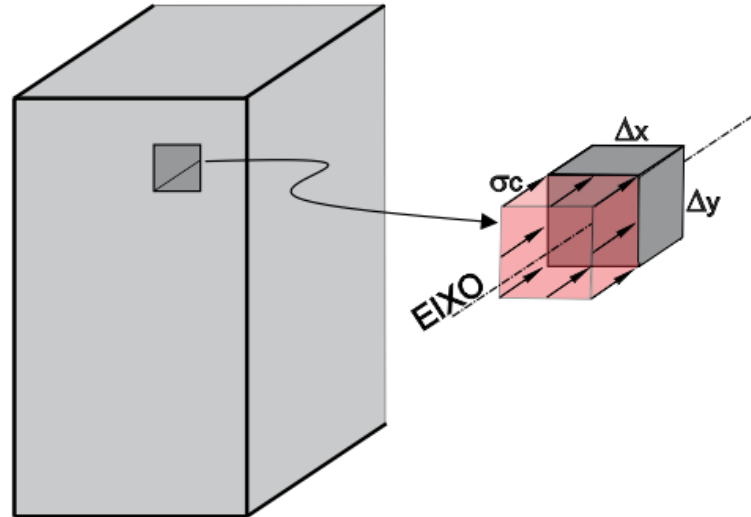


Figura 7 Seção transversal dividida em elementos discretos, com destaque para a distribuição de tensões em um elemento.

Com isso as equações (5), (6) e (7) podem ser substituídas por:

$$N = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} + \sum \sigma_c \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \quad (8)$$

$$M_X = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot y_{si} + \sum \sigma_c \cdot y \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \quad (9)$$

$$M_Y = \sum_{i=1}^n A_{si} \cdot \sigma_{si} \cdot x_{si} + \sum \sigma_c \cdot x \cdot \Delta_x \cdot \Delta_y \quad (10)$$

Onde a melhor aproximação com os resultados obtidos em (5), (6) e (7) é feita com uma maior discretização da seção, menores deltas.

A determinação das tensões em cada elemento é feita mediante a deformação do seu eixo que por sua vez é obtida pela curvatura da seção e sua distância ao eixo neutro.

Na Figura 8 onde a curvatura é:

$$\frac{1}{r_\alpha} = \tan(\alpha) \quad (11)$$

O valor da deformação no nível do eixo do elemento destacado é dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{r_\alpha} \times d \quad (12)$$

Onde d é a distância do eixo do elemento a linha neutra.

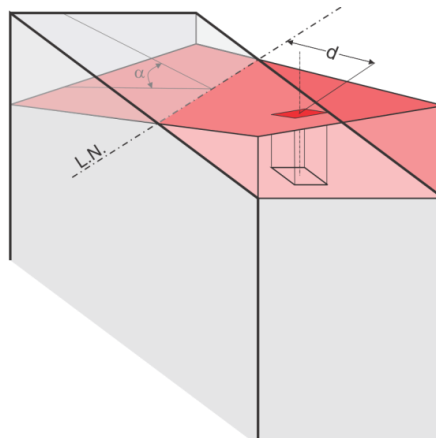


Figura 8 - Deformação em elemento genérico de uma seção sob flexão oblíqua.

De forma análoga pode ser estendida a análise para avaliação da deformação nas barras da armação. Com isso ficam definidos os elementos para compor as equações (8), (9) e (10). Assim é possível conhecendo a seção, sua curvatura e a inclinação da linha neutra, obter o esforço normal e os momentos resistentes internos. Com o mesmo princípio desenvolvido e com o auxílio de processos iterativos é possível fazer a relação inversa onde diante do conhecimento da seção e dos esforços externos obter os dados como curvatura, inclinação e posição da linha neutra da seção. Esses são os princípios fundamentais para aplicação do método geral a peças de concreto armado.

O desenvolvimento da análise de uma peça pelo método geral é feita através da divisão da peça em um número finito de seções de estudo onde para um conjunto de esforços iniciais é determinada a distribuição de esforços ao longo do eixo da peça. Com isso em cada seção é feita a determinação de sua curvatura, inclinação e posição da linha neutra.

Para a montagem da deformada da estrutura é aplicada a definição da resistência dos materiais onde a derivada segunda da equação da linha elástica é igual à distribuição da curvatura ao longo da peça, como mostrado abaixo:

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{1}{r}(x) \quad (13)$$

O valor para a curvatura ao longo do eixo da peça é obtido em pontos discretos através do seu cálculo em cada seção pelo processo iterativo já descrito. Com isso é feita a uma interpolação polinomial dos pontos da curvatura de forma a se obter uma equação que descreva a distribuição da curvatura ao longo do eixo da peça, um modelo genérico desse processo é mostrado na Figura 9.

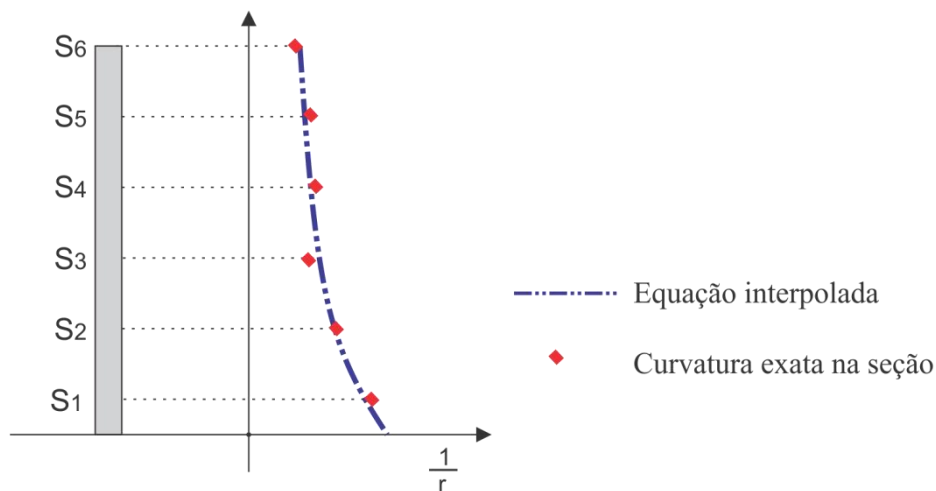


Figura 9 - Modelo de interpolação da equação da curvatura através de pontos discretos.

Com isso a equação da curvatura é aproximada por um polinômio de ordem 2:

$$\frac{1}{r}(x) = ax^2 + bx + c \quad (14)$$

E por integração direta é obtido o polinômio que descreve a linha elástica do pilar.

$$v(x) = \frac{ax^4}{12} + \frac{bx^3}{6} + \frac{cx^2}{2} + C_1x + C_2 \quad (15)$$

Os valores de a , b e c são determinados na interpolação. No MATLAB foi utilizado o comando POLIFIT, e as constantes de integração C_1 e C_2 são definidas com o conhecimento das condições de contorno da peça, Para um pilar engastado e livre com o sistema de eixos com origem da base fica definido que:

$$v(0) = 0 \quad (16)$$

e

$$\frac{dv(0)}{dx} = 0 \quad (17)$$

Assim:

$$C_1 = C_2 = 0$$

Então fica definida a função para a linha elástica da peça, porém esses valores são obtidos em um plano qualquer e para um análise coerente é importante que as deformações estejam definidas no mesmo sistema de eixos que definem as componentes dos momentos, Figura 10. Para isso é feito o desacoplamento da curvatura nas duas direções principais através do ângulo de inclinação da linha neutra, essa formulação foi apresentada por Fusco(1998), de forma que as curvaturas nas duas direções são dadas por:

$$\frac{1}{r_x} = \tan(\alpha_x) \quad (18)$$

$$\frac{1}{r_y} = \tan(\alpha_y) \quad (19)$$

Também podem ser definidas as componentes da curvatura segundo inclinação da linha neutra como:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r} \sin(\varphi) \quad (20)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r} \cos(\varphi) \quad (21)$$

Sendo φ o ângulo da linha neutra com os eixo principal.

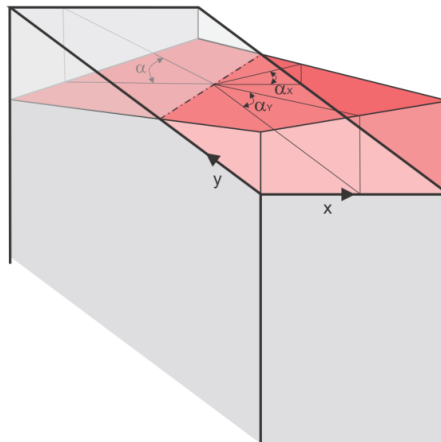


Figura 10 - Componentes da curvatura segundo os eixos principais.

Com esse modelo é possível se definir a deformação dos dois eixos da peça e assim obtido as excentricidade de segunda ordem. A Figura 11 resume os passos envolvidos nesse processo para a componente x do sistema. Essa deformação é obtida com a decomposição da curvatura usando as equações (20) e (21) sendo necessário saber a inclinação da linha neutra.

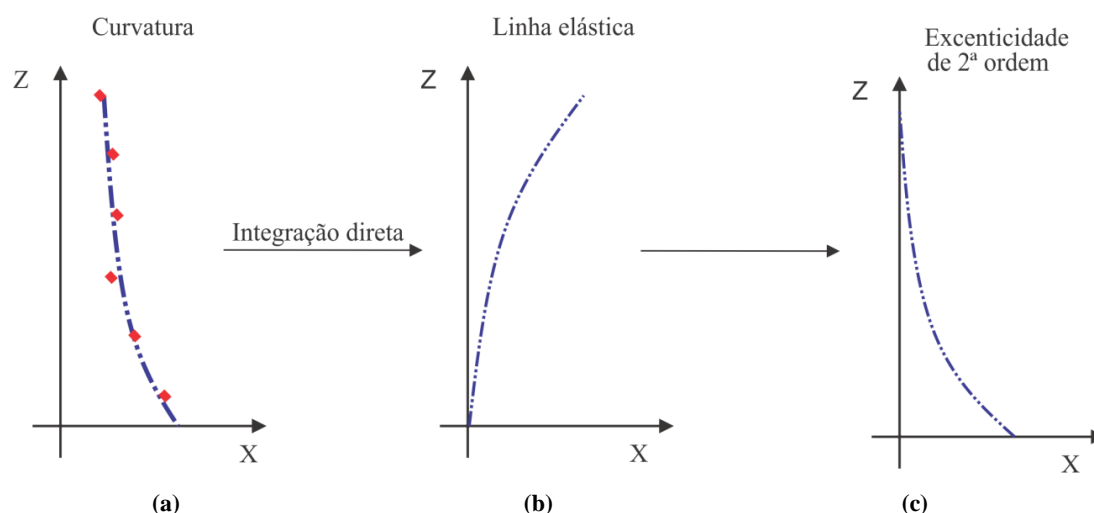


Figura 11 - Componentes da curvatura segundo os eixos principais no plano XZ (a); linha elástica obtida pela integração a equação interpolada da curvatura (b); excentricidade de segunda ordem obtida com a linha elástica (c).

4 ANÁLISE COMPUTACIONAL DA ESTABILIDADE DE PILARES PELO MÉTODO GERAL

O código computacional desenvolvido funciona através da divisão da peça contínua em um número finito de seções, onde para cada uma diante dos esforços de 1º ordem são definidas suas respectivas curvaturas. Pela relação mostrada na equação (13) e aplicando o processo de integração da equação interpolada da curvatura encontram-se quais as excentricidades de segunda ordem para uma determinada peça. Esse processo segue de forma contínua sempre aplicando os esforços provenientes da nova configuração deformada do pilar, essa sequência é repetida até que haja convergência dos resultados ou ruptura da peça em alguma das seções.

Para solução do problema da verificação da estabilidade foram desenvolvidas duas rotinas principais. Uma delas é responsável por analisar cada seção diante de esforços fornecidos e com isso determinar a sua curvatura, inclinação e posição da linha neutra; Esses dados fornecem a informação necessária a uma segunda parte do código que define a forma da linha elástica e com isso as novas excentricidades que vão realimentar o processamento.

Na rotina inicial o processo usado para definição dos parâmetros internos da seção faz uma varredura nos valores da grandeza procurada, e em cada etapa calcula os valores dos esforços internos e os compara com os solicitantes. Nesta etapa existem três incógnitas a serem definidas, curvatura, inclinação e posição da linha neutra e três valores que servem de referência que são os esforços solicitantes. A convenção dos esforços e grandezas é o apresentado na Figura 12

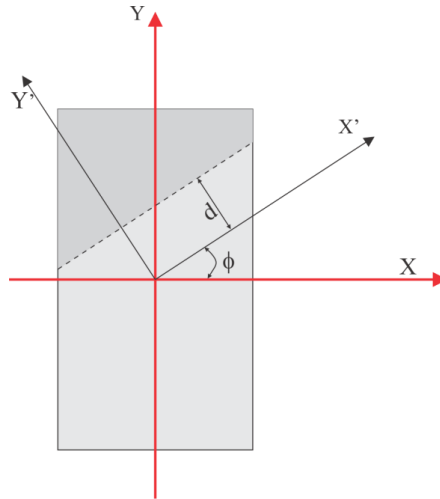


Figura 12 – Convenção utilizada no desenvolvimento da rotina

A sequencia de busca parte de um intervalo possível para a curvatura e outro para a posição da linha neutra, que é admitida inicialmente com uma inclinação nula. São conhecidos os esforços externos.

$$\text{Parâmetros iniciais da seção} \begin{cases} \text{Posição da linha neutra} \rightarrow (d_i, d_f) \\ \text{Curvatura da seção} \rightarrow (1/r_i, 1/r_f) \\ \text{Inclinação da linha neutra} \rightarrow (\phi_0) \end{cases}$$

Os subscritos *i*, *f* e *m* indicam os valores iniciais finais e médios dos intervalos analisados.

$$\text{Esforços externos} \begin{cases} N_{sd} \\ M_{x,sd} \\ M_{y,sd} \end{cases}$$

Em um primeiro instante são calculados para os pontos extremos e médio da posição da linha neutra qual o valor de esforço normal interno correspondente.

$$(d_i, d_m, d_f) = (N_{i,i}, N_{i,m}, N_{i,f})$$

Os valores das normais internas são comparados com N_{sd} e então é definido em que intervalo se encontra a solução, com isso os limites da posição da linha neutra são redefinidos para um intervalo menor. Por exemplo, o valor N_{sd} pode estar no intervalo $(N_{i,m}, N_{i,f})$ com isso é possível afirmar que a posição da linha neutra está contido em (d_m, d_f) e os limites para o novo cálculo serão:

$$\begin{cases} d_0 = d_m \\ d_f = d_f \\ d_m = \frac{d_m + d_f}{2} \end{cases}$$

O processo é repetido até que o intervalo seja tão estreito quanto se deseje e leve a uma posição da linha neutra, que será chamada de d_c .

Porém para definir o esforço normal interno não apenas a posição da linha neutra deve ser arbitrada, mas também é necessário saber sua inclinação e a curvatura que atua sobre a seção. Assim as relações descritas são mais realistas se escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} d_i(1/r, \phi) &= N_{i,i} \\ d_m(1/r, \phi) &= N_{i,m} \\ d_f(1/r, \phi) &= N_{i,f} \end{aligned}$$

Com isso o cálculo da posição da linha neutra que foi apresentado é aplicado em paralelo para cada ponto extremos e médio do intervalo proposto para a curvatura da seção. E então é encontrada um posição para a linha neutra referente a cada curvatura.

$$\begin{array}{lll}
 d_i(1/r_i, \phi) & d_i(1/r_m, \phi) & d_i(1/r_f, \phi) \\
 d_m(1/r_i, \phi) \rightarrow d_{c,i} & d_m(1/r_m, \phi) \rightarrow d_{c,m} & d_m(1/r_f, \phi) \rightarrow d_{c,f} \\
 d_f(1/r_i, \phi) & d_f(1/r_m, \phi) & d_f(1/r_f, \phi)
 \end{array}$$

Neste instante temos para cada situação os parâmetros da seção definidos como apresentado abaixo:

Caso 1: $(d_{c,i}, 1/r_i, \phi)$

Caso 2: $(d_{c,m}, 1/r_m, \phi)$

Caso 3: $(d_{c,f}, 1/r_f, \phi)$

Com esses dados é possível calcular qual o momento interno em torno no eixo x, para esta seção, cada caso está associado a uma curvatura e apresenta um momento particular.

$$\begin{array}{l}
 (d_{c,i}, 1/r_m, \phi) \rightarrow Mx_{i,i} \\
 (d_{c,m}, 1/r_m, \phi) \rightarrow Mx_{i,m} \\
 (d_{c,f}, 1/r_f, \phi) \rightarrow Mx_{i,f}
 \end{array}$$

Pode ser feita uma verificação similar a utilizada para determinação da posição da linha neutra. O momento externo $M_{x,sd}$ é comparado a $Mx_{i,i}$, $Mx_{i,m}$ e $Mx_{i,f}$ e define-se assim em que intervalo ele se encontra, e os pontos da curvatura são redefinidos. As operações descritas até este instante são repetidas e com a redução das faixas os valores dos pontos da curvatura e também da posição da linha neutra vão convergindo, assim chega-se aos parâmetros que equilibram $M_{x,sd}$ e N_{sd} Respectivamente. Por fim esses dados são utilizados para cálculo de My_i que é comparado com $M_{y,sd}$ caso o esforço interno seja inferior ao externo indica que a inclinação da linha neutra é insuficiente com isso é feito um acréscimo no seu valor e a rotina volta ao início. Quando My_i atingir $M_{y,sd}$ os valores dos parâmetros estarão definidos. A utilização de incrementos sucessivos no valor de ϕ faz com que não seja necessário um loop adicional considerando um intervalo para essa grandeza, com isso o custo computacional é reduzindo levando a um menor tempo de processamento.

Com essa sequência lógica é possível definir em uma seção transversal qual o valor da curvatura, posição e inclinação da linha neutra que equilibra os esforços externos, porém por si só ela não é capaz de fornecer parâmetros de estabilidade da peça. Para isso é preciso avaliar a deformação de todo o corpo do pilar, assim foi utilizada a relação já exposta onde a curvatura é igual à segunda derivada da linha elástica. Então com os valores das curvaturas em cada seção, encontradas na etapa anterior, é possível fazer uma interpolação dos pontos e obter uma função da curvatura relacionada à posição do eixo da peça. Neste trabalho foi utilizada uma interpolação polinomial de segundo grau, onde os coeficientes são determinados por uma função própria do Matlab R2010a. Assim fica pela integração direta definida a função que descreve a deformada da peça, e com isso, as excentricidades de segunda ordem são rapidamente encontradas através da soma das excentricidades iniciais com as obtidas no processo acima. Os momentos de segunda ordem em cada seção são obtidos pela multiplicação do esforço normal pela excentricidade de segunda ordem. Esses novos valores de esforços são utilizados para realimentar o código como esforços iniciais.

Com o propósito de definir um instante onde o processamento do código deve ser interrompido foram definidos critérios de parada e acontecem quando se verifica a ruptura de alguma das seções ou a estabilidade do elemento analisado. A ruptura é definida pelos critérios apresentados por Fusco(1998) que utiliza as deformações limites tratadas na seção 3, caso isso ocorra a rotina é interrompida e é emitido um aviso informando a ruptura da peça. A estabilidade foi convencionada através da avaliação da deformação relativa do topo da peça em iterações sucessivas, foi adotado como atingida a estabilidade quando a deformação máxima não excede 2,5% da deformação encontrada anteriormente. Esse valor foi definido através de comparações sucessivas de resultados onde se constatou que quando esta condição ocorre os incrementos posteriores na deformação são irrelevantes.

Com isso ficaram apresentados todos os passos envolvidos no desenvolvimento do código, as informações estão condensadas em forma de fluxograma apresentado na Figura 13, Nesta apresentação o trecho do código que define a curvatura será definida apenas como *rotina da curvatura*.



Figura 13 – Fluxograma para avaliação da estabilidade do pilar.

5 VALIDAÇÃO DOS RESULTADOS

A validação da rotina desenvolvida foi feita através da comparação dos resultados obtidos em ensaios, com modelos em elementos finitos e no código desenvolvido. Foram comparados os diagramas carga flecha obtidos nas três situações. Esse diagrama fornece a deformação no topo do pilar para cada passo de carga até atingir o limite da peça. Com a deformação fornecida também é possível definir os esforços de segunda ordem que atuam na peças.

Os resultados experimentais foram retirados do trabalho de Melo(2009), que fez o estudo experimental e numérico de pilares em concreto armado com seção e armadura constante, submetidos a flexão composta normal. Foi feita a variação da excentricidade da carga e a esbeltez das peças para coleta de resultados. A modelagem numérica utilizou os códigos computacionais pré-existentis dentre os quais podemos destacar o CACODI elaborado em FORTRAN77, esse código aplicava-se na determinação da curvatura das seções de concreto, o FLECO2C desenvolvido em FORTRAN90 utilizado para determinar os deslocamentos horizontais usando como base o CACODI e o FLECO2H que é uma variação do FLECO2C com uma alteração da relação constitutiva do concreto. O outro trabalho que forneceu dados foi Kim e Lee (2000), que desenvolveu uma formulação em elementos finitos para determinar os deslocamentos em pilares de concreto armado sob flexão composta oblíqua, seu código criava um modelo da seção que era discretizada em fibras, onde para cada

fibra era obtida a relação tensão deformação através dos esforços iniciais e das relações constitutivas para cada material. Seus resultados foram validados através de ensaios realizados em pilares de seção quadrada e retangular com armadura constante submetidos a flexão composta oblíqua.

Os modelos de validação desenvolvidos para representar os ensaios de Kim e Lee (2000) foram criados utilizando o MidasFea (Versão 2.9.6, 2009) através da modelagem do pilar em elementos de sólido hexaédricos, as barras longitudinais foram modeladas utilizando o elemento Line 3D que define o eixo da barra que posteriormente será convertido em sólido. Além desses elementos principais foi adicionado no topo do pilar um bloco rígido, essa parte tem a função de receber as cargas e distribuí-las uniformemente no topo do pilar. As condições de contorno para a peça foram engastado na base e livre no topo com comprimento equivalente que fornecia a mesma esbelteza do utilizado nos ensaios. O material definido para o concreto foi do tipo Total Stain Crack, com coeficiente de Poisson de 0,2. As relações constitutivas Brittle e Thotenfheldt foram empregadas para o comportamento a tração e compressão respectivamente, Figura 14. Para o concreto tracionado, com o intuito de reduzir ao máximo sua participação, considerou-se $f_t=0,1\text{MPa}$, para definir os elementos comprimidos os valores de f_c e do módulo de elasticidade adotados foram os obtidos com ensaios em corpos de prova com o concreto usado nos ensaios.

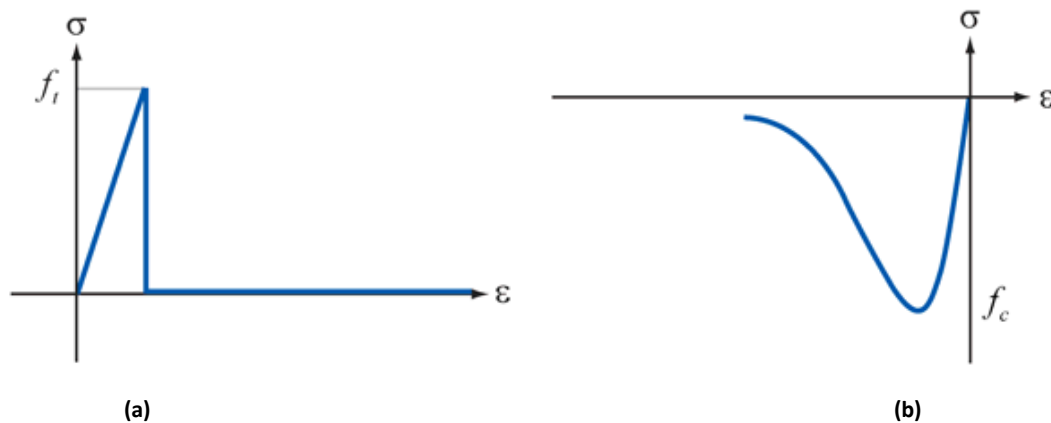


Figura 14 – Relação tensão deformação adotada para o concreto tracionado (a) e comprimido (b).

O material para o bloco rígido é linear elástico com módulo de elasticidade de 100.000GPa. O valor elevado foi utilizado para que as cargas concentradas se tornassem uniformes em um pequeno trecho e para que as deformações desse elemento fossem irrelevantes diante das demais. Finalmente para o aço foi definido o modelo tipo Von Mises, utilizando módulo de elasticidade de 200GPa, coeficiente de Poisson 0,3 e tensão de escoamento de 595MPa.

O modelo tem um número total de 3.200 elementos no pilar e mais 100 no trecho rígido. Esses valores foram definidos através de testes de convergência da malha. As cargas foram aplicadas através de dois binários e uma carga vertical, representando os dois momentos e a ação normal sobre a peça. A análise feita foi Nonlinear Static, com consideração das não linearidades físicas e geométricas. O carregamento foi aplicado em 100 passos onde para cada passo admitia-se 100 iterações para atingir a convergência, caso não houvesse convergência nas iterações o processo era interrompido. A Figura 15 mostra o modelo do pilar criado no MidasFea (Versão 2.9.6, 2009).

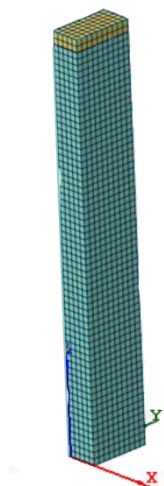


Figura 15 – Malha de elementos finitos MIDAS FEA, em azul o fuste do pilar e amarelo o bloco rígido.

Do trabalho de Melo(2009) foram extraídos os resultados da série PFN e – 3 onde PFN foi usado para designar pilar sob flexão normal; “e” é a excentricidade em milímetros e 3 é a altura da peça em metros. A seção do pilar mede 250x120mm sendo a flexão em torno da menor inércia. A armadura é composta por 6 barras longitudinais com diâmetro de 10mm, taxa geométrica de 1,57% , transversalmente foram utilizados estribos simples com barras de 5,0mm espaçadas a cada 10cm. A Figura 16 mostra a distribuição das barras na seção transversal.

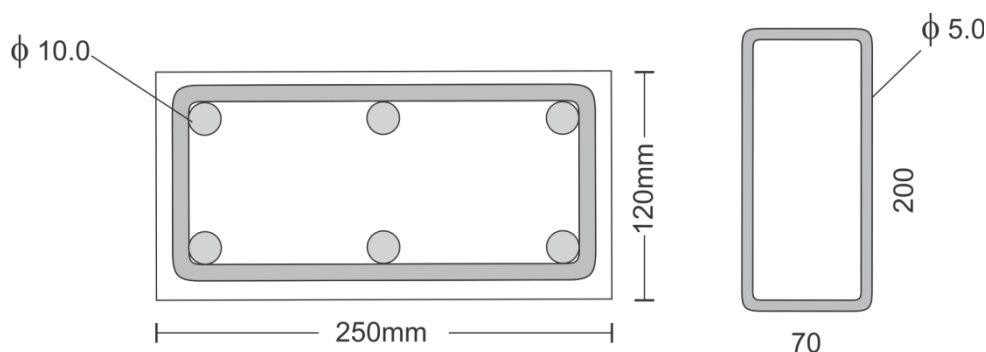


Figura 16 – Seção transversal dos pilares ensaiados por Melo(2009).

Os modelos em elementos finitos foram feitos utilizando o *software* ATENA 3D, da Cervenka Consulting, com elementos hexaédricos para modelagem do topo e região central do pilar. Na região de apoio e capitel, com largura variável, foram aplicados os elementos TETRAHEDRAL e PYRAMID, as armaduras foram criadas com elementos tipo TRUSS; após teste de refinamento a malha utilizada apresentava dimensões globais de 25mm. A Figura 17 mostra uma visão geral dos elementos do pilar, as armaduras modeladas e uma visão geral da malha. Neste modelo também foi adotada uma região rígida para aplicação das cargas, nesse caso o material utilizado foi o mesmo das armações caracterizado por um comportamento bilinear sendo linear elástico até a tensão de escoamento e após esse ponto as deformações não representavam incrementos de tensão. O concreto foi modelado como Nonlinear Cementitious 2, adotando a relação proposta por Chen(1982 apud Atena, 2014) para o concreto. O modelo adotado representa metade da peça completa, sendo adotada condição de simetria na seção média.

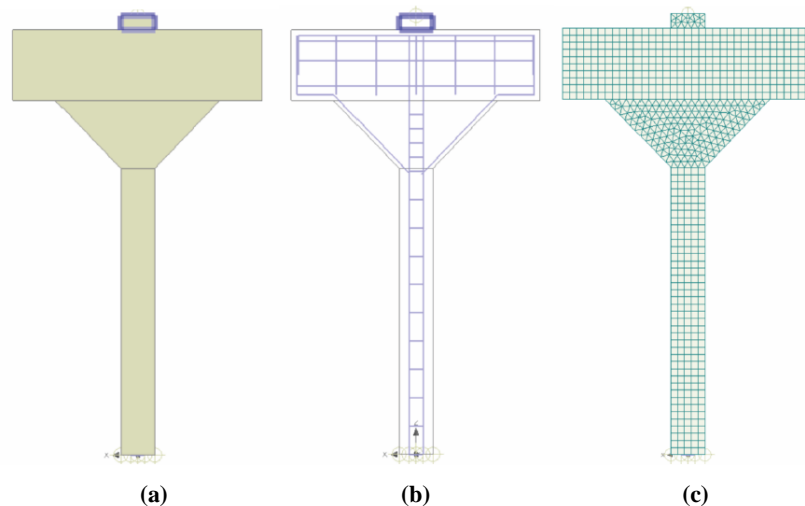


Figura 17 – Macro elementos do modelo(a); Posicionamento das armaduras(b); Malha de elementos finitos; (Melo 2015)

Com o processamento dos modelos e coleta de dados foram obtidos os diagramas carga flecha apresentados a baixo. Os diagramas 1 a 6, da Figura 19, são referentes aos testes em peças sob flexão composta normal e os diagramas 7 a 10, Figura 20, representam os dados das peças sob flexão composta oblíqua. O sentido das deformações segue a convenção mostrada na Figura 18.

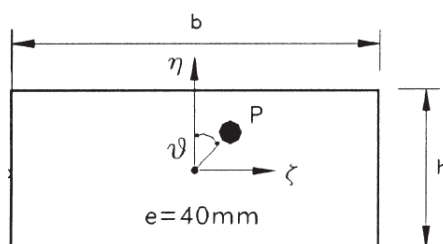
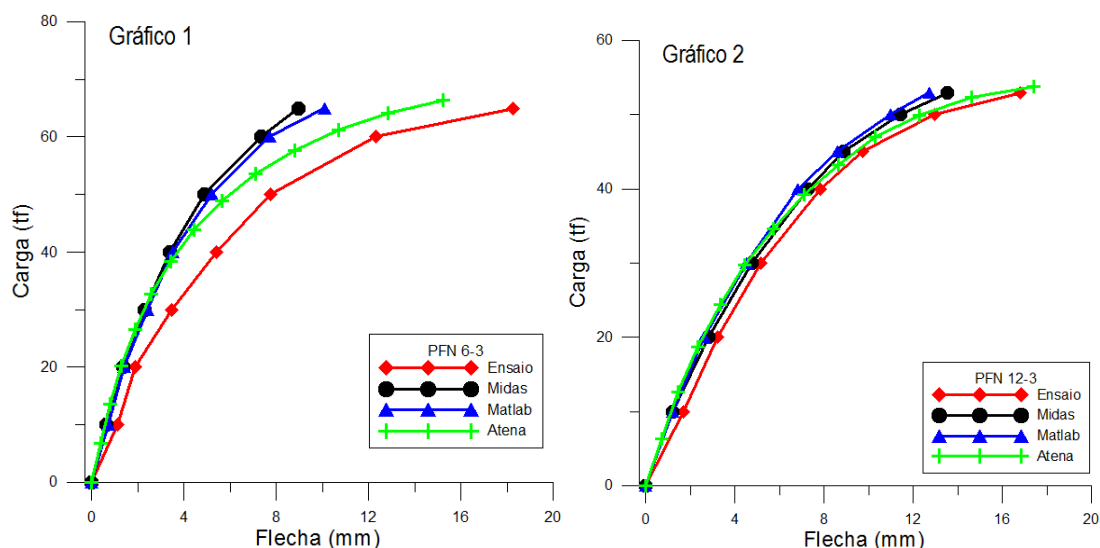


Figura 18 – Característica do posicionamento da carga usado, e convenção de deslocamentos. Kim e Lee (2000)



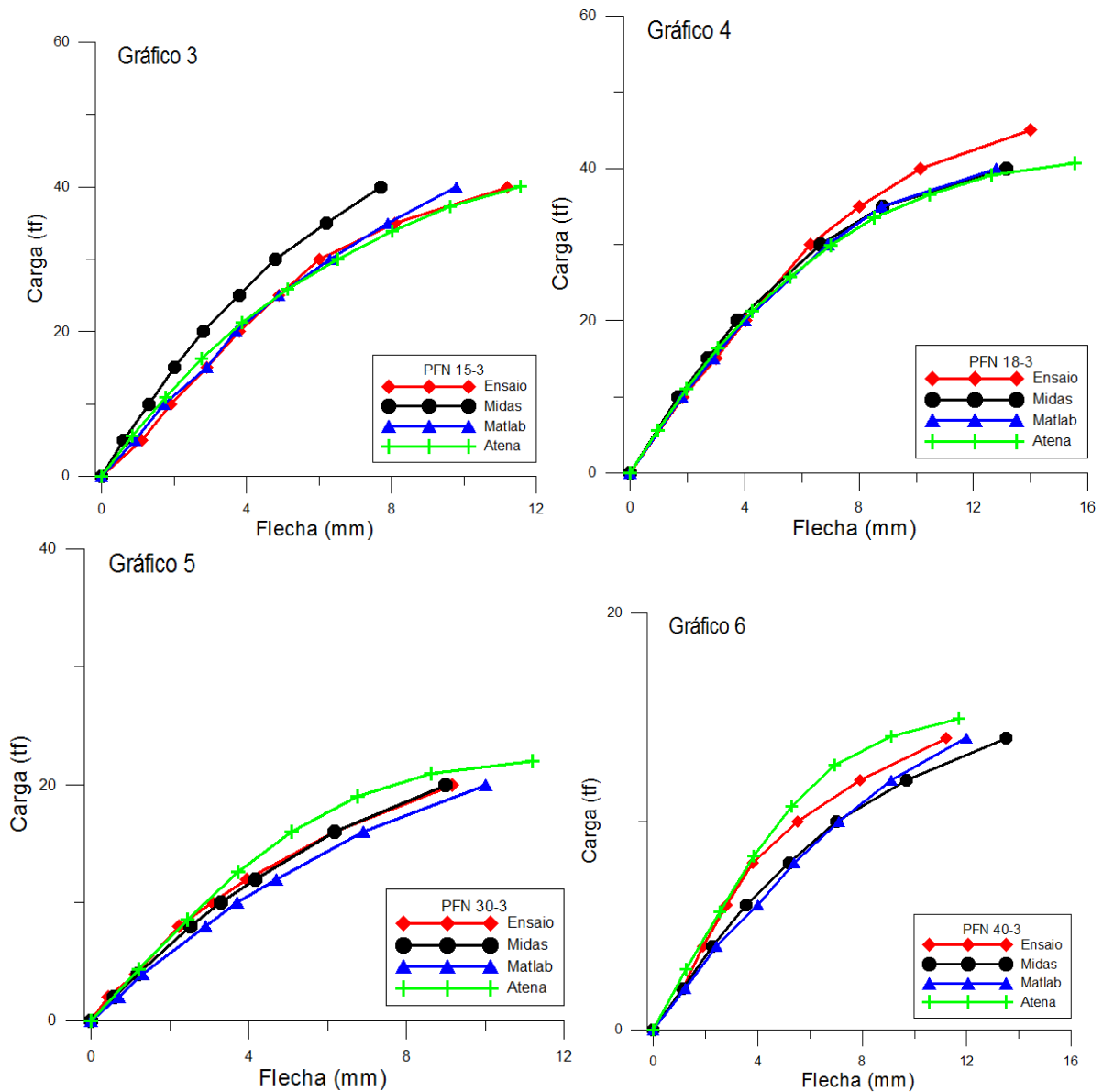


Figura 19 – Resultado dos testes nas peças sob flexão composta normal

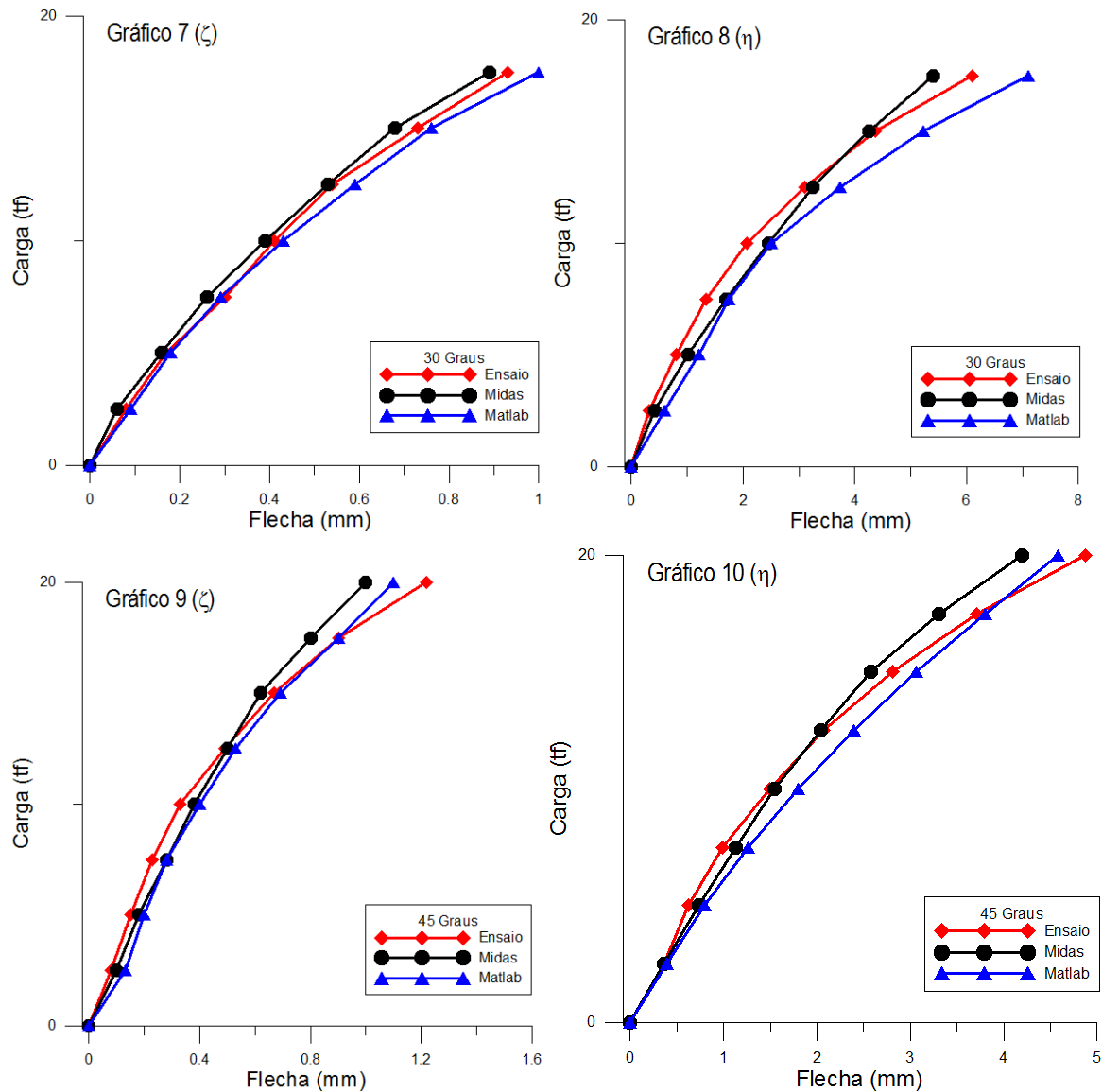


Figura 20 – Resultado dos testes nas peças sob flexão composta normal

6 CONCLUSÃO

O código computacional desenvolvido, usando o método apresentado nesse texto, apresenta resultados satisfatórios quando comparado com técnicas sofisticadas de análise estrutural e até mesmo ensaios em pilares reais. Os valores das deformações encontradas na peça sob flexão composta normal, gráficos 1 a 6. O erro máximo detectado foi no PFN 6-3 e é de 17,3%, quando comparado com o modelo em elementos finitos esse valor cai para 7,9%. O erro médio relativo entre o modelo do MidasFea e o código em Matlab foi de 6,1% e 7,5 para a comparação com os ensaios. Na comparação das peças sob flexão composta oblíqua, fora obtidos resultados com um erro relativo que chegou a 16,1% no sentido de menor inércia no pilar com excentricidade a 45 graus esse valor se manteve próximo a comparação com o modelo numérico que foi de 12,6%. O valor médio dos erros obtidos se manteve próximo aos 8%

Atualmente o código se apresenta como uma ferramenta que fornecer dados importantes para análise de pilares e complementa uma relativa escassez de programas que

deem esses dados ao engenheiro. A rotina tem uma entrada de dados simples, quando comparados a programas mais sofisticados, e não necessita de intervenções do usuário para o processamento, eliminando com isso possíveis fontes de erros nos resultados.

O trabalho apresentado representa um primeiro passo para o desenvolvimento de um projeto capaz de realizar análises não lineares de elementos e estruturas com geometrias e carregamentos variados, fornecendo uma ferramenta completa para análise não linear de estruturas de concreto armado.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO J.M., 2003, *Curso de concreto armado*, v3, Dunas.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto e execução de obras em concreto armado e protendido – procedimentos. Rio de Janeiro 2014.
- ATENA – ATENA 3D, Version 5.1.1.11203, *Cervenka Consulting*.
- ATENA, 2014, *ATENA Program Documentation Part 1 Theory*, Cervenka Consulting.
- CARLOS EDUARDO LUNA DE MELO, 2009, *Análise experimental e numérica de pilares birrotulados de concreto armado submetidos a flexo-compressão normal*, Tese de doutorado em estruturas e construção civil departamento de engenharia civil e ambiental, Faculdade de tecnologia UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA.
- CLÁSSICOS DA ARQUITETURA: CENTRO DE MECANIZAÇÃO DO BANCO DO BRASIL, Disponível em <http://www.archdaily.com.br/br/01-156395/classicos-da-arquitetura-centro-de-mecanizacao-do-banco-do-brasil-slash-irmaos-roberto> , Acesso em : 11 Jul, 2016.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. CEB-FIP, *Design Code*, 2010, Lausanne, 1993.
- EUROCODE 2, *Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Buildings*, British Standards Institution, UK.
- FUSCO, P.B., 1998. *Estruturas de concreto: Solicitações normais*, LTC
- JIM-KEUN KIM e SANG-SOON LEE, 2000, *The behavior of reinforced concrete columns subject to axial forces and biaxial bending*.
- MATLAB, Version 7.10.0.499 (R2010a), 2010, *The Language of Technical Computing*
- Midas Fea, Version 2.9.6, 2009, *Nonlinear and Detail FE Analysis System for Civil Structures*
- RICARDO LEOPOLDO E SILVA FRANÇA, 1991, *Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado*.
- ROBERTO CHUST DE CARVALHO e LIBÂNIO MIRANDA PINHEIRO, 2013, *Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado*, v.2, PINI
- SANDER DAVID CARDOSO JÚNIOR, 2014, *Sistema Computacional para análise não linear de pilares de concreto armado*, Monografia de especialização em gestão de projetos de sistemas estruturais da Escola politécnica da UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO.
- WALDSON TAKEO WATANABE, 2011, *Verificação da Estabilidade de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Submetidos à Flexo-compressão Oblíqua pelo Método Exato: Proposta de Programa Computacional*, Trabalho de diplomação Departamento de Engenharia Civil, UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL.